PROBLEMATHS
7 février 2011

Voici les derniers énoncés de cette année académique 2010-2011

Problemath 10

Combien l'équation $2010^x + 2011^x = 2012^x$ a-t-elle de racines réelles?

Problemath 11

Une fonction $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ vérifie la condition
$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ ou 1 quels que soient $m, n \in \mathbb{N}_0$.
De plus , $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ et $f(9999) = 3333$. Que vaut $f(2011)$?

Problemath 12

Un paquet de 52 cartes est mélangé aléatoirement et placé sur une table, faces non visibles. Les cartes sont ensuite retournées une à une , en partant du sommet du paquet. Si vous deviez deviner à l'avance la position du premier as noir rencontré , quel nombre naturel $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 51\}$ choisiriez-vous de façon à maximiser la probabilité de faire une prédiction correcte?

Problemath 13

Soit D un disque fermé dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Existe-t-il une partition de l'ensemble des points de D en deux sous-ensembles A et B isométriques (c'est-à-dire tels que B soit l'image de A par une isométrie de $\mathbb{R}^2$)?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 4 mars à 14h.

"A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas" (G.H. Hardy dans "A Mathematician's Apology ").

Solution du Problemath 7 Posons $E = \{2, 3, 4, \ldots, 69, 70\}$, $S = x + y$ et $P = xy$. Après la première affirmation d'Alice, Bob réfléchit: "Puisqu'Alice sait que je ne peux pas déterminer x et y, c'est qu'on lui a donné un nombre S ayant la propriété suivante: quels que soient les entiers distincts $a, b \in E$ ayant une somme égale à S, l'entier ab se décompose d'au moins deux façons différentes en un produit de deux facteurs distincts $\in E$". Bob en déduit facilement que S ne peut être qu'un des éléments de l'ensemble $\sum = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37\}$. Comme Bob connaît P, la réponse de Bob à Alice nous informe que P ne peut se décomposer que d'une seule manière en un produit de deux facteurs distincts $x, y \in E$ tels que $x + y \in \sum$. Un examen cas par cas (un peu long, mais routinier) montre alors qu'il n'y a que 79 couples (S, P) possibles. Comme Alice serait incapable de déterminer x et y si la somme S (qu'elle connaît) pouvait donner lieu à des produits P différents, il faut rejeter, parmi ces 79 couples, tout couple (S, P) pour lequel il existe un couple (S, P')avec $P' \neq P$. Il ne reste alors qu'un seul couple possible, à savoir $(S, P) = (17, 52)$. Les entiers x et y sont donc 4 et 13.

Ont fourni une solution correcte : A. DUJARDIN (BA1 polytech), DORMEUR, GRINCHEUX, PROF (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), C. LARIVIERE (prof de maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), S. PROKOFIEV (compositeur) et "Les Sept Nains"

Solution du Problemath 8 (N.B. : ce problème a été posé à la "70th Putnam Mathematical competition aux USA en 2010). Tout point p du plan $\mathbb{R}^2$ est le centre d'un carré $abcd$, dont les milieux des côtés forment un autre carré $a'b'c'd'$. De plus, les droites $a'c'$ et $b'd'$ partagent $abcd$ en 4 carrés plus petits. En ajoutant membre à membre les égalités vérifiées par la fonction f sur ces 4 petits carrés, puis en soustrayant l'égalité vérifiée sur $abcd$ et 2 fois celle vérifiée sur $a'b'c'd'$, on obtient $f(p) = 0$. Donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^2$.

Ont fourni une solution correcte K. SWAMINATHAN, L. SCHOPEN (resp. en 4ème et en 5ème à la St John's International School à Waterloo), M. BADALYAN, P. SCHRAM, R. WALRAVENS (BA1 maths), A. DUJARDIN (BA1 polytech), ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET , TIMIDE (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), O. DECKERS, H. VERMEIREN, Y. SUPRIN (profs de maths), R. DENDIEVEL (assistant au Dépt de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), S. PROKOFIEV (compositeur), M. LE BLANC (alias Sophie GERMAIN) et "Les Sept Nains".

Rémi DENDIEVEL a montré que la conclusion du Problemath 8 reste la même si on impose que $f(a_1) + \cdots + f(a_n) = 0$ chaque fois que $a_1, \ldots, a_n$ sont les sommets d'un $n-gone$ régulier dans $\mathbb{R}^2$ (avec n fixé≥ 3). D'autre part, Cédric DE GROOTE (alias PROF) et Mitia DUERINCKX (alias SIMPLET), tous deux en BA2 maths, ont prouvé plus généralement que , si on se donne un ensemble fini non vide quelconque E de n points dans $\mathbb{R}^k$ et si on impose que la somme des valeurs de f sur les n points de toute image de E par une similitude soit nulle, alors f est la fonction nulle sur R^k (résultat également prouvé dans $\mathbb{R}^2$ par Serguei PROKOFIEV, alias Christophe DUMEUNIER, chercheur au Département d'informatique).

Solution du Problemath 9 Contrairement à ce qu'on aurait pu croire, il existe des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les conditions du problème. En voici un exemple (parmi d'autres): les fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} 2 \; si \; x = 0 \\ \dfrac{1}{n} \; si \; \dfrac{1}{n+1} \leq |x| < \dfrac{1}{n} (n \in \mathbb{N}_0) \\ 1 \; si \; |x| \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x = 2 \\ 2 \; si \; x = \dfrac{1}{n} (n \in \mathbb{N}_0) \\ 3 \; si \; x = 0 \\ 4 \; si \; x > 1 \; et \; x \neq 2 \\ 5 \; sinon \end{cases}$$

sont telles que les expressions (1) à (5) de l'énoncé valent respectivement $1, 2, 3, 4, 5$ pour $a = 0$.

Ont fourni une solution correcte M. BADALYAN (BA1 maths), DORMEUR (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL) et "Les Sept Nains".

La théorie mathématique de la chasse au lion dans le désert (suite)

- La méthode de bissection de Bolzano-Weierstrass: Le chasseur partage le désert en deux par une ligne nord-sud. Le lion est soit à l'est soit à l'ouest de cette ligne. Supposons qu'il soit dans la région ouest. On partage cette région en deux par une ligne est-ouest. Le lion est soit au nord soit au sud de cette ligne. On répète ce processus un grand nombre de fois, en entourant à chaque étape la région choisie d'une clôture infranchissable. Le diamètre des régions successives tendant vers zéro, le lion sera finalement entouré d'une clôture de périmètre aussi petit que l'on veut.

- La méthode de descente de Fermat: Considérons l'affirmation $P(n)$: "Il est possible de capturer n lions dans le désert". Cette affirmation est vraie si n est suffisamment grand car alors les lions sont serrés les uns contre les autres comme des sardines dans une boîte et n'ont aucun moyen de s'échapper. D'autre part, $P(n)$ implique $P(n-1)$ car, après avoir capturé n lions, on peut toujours en relâcher un. Il en résulte que $P(1)$ est vrai.