PROBLEMATHS
29 novembre 2010

Problemath 7

On informe deux brillants mathématiciens Alice et Bob que deux nombres naturels distincts x et y ont été choisis dans l'ensemble $\{2, 3, 4, \dots, 69, 70\}$ et qu'ensuite on a donné à Alice la valeur de la somme $x + y$ et à Bob la valeur du produit xy. La conversation suivante s'engage alors:
Alice dit : "Je sais que tu ne peux pas déterminer x et y."
Bob répond : "Dans ce cas, je connais x et y."
Alice s'écrie : "Alors, moi aussi!"
Que valent x et y?

Problemath 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction attribuant une valeur réelle à tout point du plan $\mathbb{R}^2$. Si $f(a)+f(b)+f(c)+f(d) = 0$ chaque fois que a, b, c, d sont les 4 sommets d'un carré, peut-on en conclure que $f(p) = 0$ pour tout point p de $\mathbb{R}^2$?

Problemath 9

Existe-t-il deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour un certain nombre réel a, les 5 expressions ci-dessous soient des nombres réels distincts deux à deux?
(1) $g(f(a))$
(2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} g(f(x))$
(3) $g(\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x))$
(4) $\lim\limits_{\substack{y \to f(a) \\ \neq}} g(y)$
(5) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \lim\limits_{\substack{y \to f(x) \\ \neq}} g(y)$

Les solutions doivent nous parvenir <u>au plus tard le jeudi 23 décembre à 14h</u>.

<u>**Solution du Problemath 4**</u> On va appliquer le "principe des tiroirs de Dirichlet": si on place $n + 1$ objets dans n tiroirs, au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 objets. Au départ, aucun des 30 négociateurs n'est assis en face de son nom. De ce fait, pour un négociateur donné, une des 29 rotations de $k12^o$ $(k = 1, 2, \dots, 29)$ dans le sens horlogique permet d'amener la table dans une position où ce négociateur se retrouvera assis en face de son nom. Comme il y a 30 négociateurs et 29 nouvelles positions de la table après rotation, au moins 2 négociateurs seront assis en face de leur nom dans une de ces positions.

<u>Ont fourni une solution correcte</u> : L. SCHOPEN (élève de 5ème à la St John's International School à Waterloo), P. SCHRAM, R. WALRAVENS (BA1 maths), T. DEFOIN, A. DUJARDIN (BA1 polytech), ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), C. LARIVIERE,H. VERMEIREN, Y. SUPRIN (profs de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), S. PROKOFIEV (compositeur), M. LE BLANC (alias Sophie GERMAIN) et BLANCHE-NEIGE .

Solution du Problemath 5 Si $p(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1}x + \alpha_k$ est un polynôme à coefficients entiers et si m et n sont deux entiers distincts, alors
$p(m) - p(n) = \alpha_0(m^k - n^k) + \alpha_1(m^{k-1} - n^{k-1}) + \cdots + \alpha_{k-1}(m - n)$
et, comme chaque terme du membre de droite est divisible par $m - n$, on en déduit que $m - n$ divise $p(m) - p(n)$, c'est-à-dire que $\dfrac{p(m) - p(n)}{m - n}$ est un entier. Dés lors, s'il existait un polynôme vérifiant les conditions de l'énoncé, les trois nombres $\dfrac{b-c}{a-b}, \dfrac{c-a}{b-c}$ et $\dfrac{a-b}{c-a}$ seraient des entiers. Comme leur produit est trivialement égal à 1, la valeur absolue de chacun d'eux vaudrait 1, autrement dit $|a - b| = |b - c| = |c - a|$, ce qui est impossible puisque a, b, c sont supposés distincts deux à deux.

Ont fourni une solution correcte : P. SCHRAM (BA1 maths), T. DEFOIN (BA1 polytech), ATCHOUM, DORMEUR, GRINCHEUX, JOYEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), Y. SUPRIN (prof de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), S. PROKOFIEV (compositeur) et BLANCHE-NEIGE .

Solution du Problemath 6 Si n a un seul chiffre, $\alpha(n) = 101$ ou 011. Si n a deux chiffres, $\alpha(n) = 202, 112$ ou 022. Si n a trois chiffres, $\alpha(n) = 303, 213, 123$ ou 033. On vérifie que ces 9 nombres sont bien attirés par 123. Si n a au moins 4 et au plus 9 chiffres, alors $\alpha(n)$ a au plus 3 chiffres, donc n est encore attiré par 123 grâce à ce qui précède. Si n a au moins 10^{k-1} et au plus $10^k - 1$ chiffres (avec $k \geq 2$) $\alpha(n)$ a au plus $3k$ chiffres, donc moins de chiffres que n. Donc $\alpha^p(n)$ a moins de 10 chiffres pour p suffisamment grand et est encore attiré par 123. Il y a donc un trou noir dans $\mathbb{N}$!.

Ont fourni une solution correcte : K. SWAMINATHAN, L. SCHOPEN (resp. en 4ème et en 5ème à la St John's International School à Waterloo), M. BADALYAN, P. SCHRAM, R. WALRAVENS (BA1 maths), T. DEFOIN, A. DUJARDIN, C. LABAR (BA1 polytech), DORMEUR, GRINCHEUX, PROF, SIMPLET (BA2 maths), N. RADU (BA2 maths à l'ULg), A. OUEDRAOGO (BA2 polytech), P.A. JACQMIN (BA3 maths à l'UCL), "Le tueur de nains"(BA3 polytech), C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (prof de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, B.DETERME, F. DOIGNIE, R. ENGLEBERT, N. GUMUCHDJIAN, G. VERHAEGEN (ingénieurs), P. MASAI (directeur informatique à Toyota Motor Europe), A. WAJNBERG (journaliste scientifique), S. PROKOFIEV (compositeur), M. LE BLANC (alias Sophie GERMAIN), BLANCHE-NEIGE et les "Les Sept Nains".

La théorie mathématique de la chasse au lion dans le désert (suite)

- La méthode topologique: Un rapide examen anatomique montre que tout lion normalement constitué est traversé de part en part par un trou, donc se comporte topologiquement comme un tore. Or on sait que dans un espace euclidien à 4 dimensions, on peut, par déformation continue, faire un noeud dans un tore. Il suffit donc de transporter le désert dans un espace à 4 dimensions, de faire un noeud dans le lion, puis de ramener le tout à 3 dimensions. La capture d'un lion noué de cette façon est laissée comme exercice (facile) au lecteur.

- La méthode du crible d'Eratosthène: L'ensemble des objets qui se trouvent dans le désert est manifestement dénombrable. Le chasseur les énumère un à un, en rejetant tous ceux qui ne sont pas des lions. Un raffinement de cette méthode permet de ne capturer que des lions premiers.

- La méthode de Bourbaki : La capture d'un lion dans le désert est un cas particulier d'un problème beaucoup plus général. Il suffit donc de formuler ce problème et de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il ait une solution . La capture d'un lion est alors un corollaire tout à fait trivial de cette théorie plus générale.