PROBLEMATHS
22 mars 2010

Voici les solutions des 3 derniers Problemaths, ainsi que le Palmarès final de cette année.

Solution du Problemath 11. Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ les n inconnues, et par a et r le premier terme et la raison de la progression arithmétique. Si on soustrait chaque équation de la suivante, on obtient toujours $(n+1)rx_1 + \cdots + (n+1)rx_n = (n+1)r$,
c'est-à-dire $\quad x_1 + \cdots + x_n = 1 \quad (*)$, puisque $r \neq 0$.
Le système de départ est donc équivalent au système formé de sa première équation et de l'équation $(*)$ ci-dessus. Comme ce système de 2 équations a par hypothèse une solution unique, il faut que $n \leq 2$. Si $n = 1$, les 2 équations sont $ax_1 = a + r$ et $x_1 = 1$, et il n'y a pas de solution puisque $r \neq 0$. Par contre, si $n = 2$, les équations sont $ax_1 + (a+r)x_2 = a + 2r$ et $x_1 + x_2 = 1$, et l'unique solution du système est donc $(x_1, x_2) = (-1, 2)$.
Ont fourni une solution correcte :
C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT, F. THILMANY (BA1 maths), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), P. ANTONIK (BA2 physique), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), W. DE DONDER (ingénieur), Y. SUPRIN (prof de maths à l'Ecole Européenne Bruxelles II), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 12. On va prouver que $\dfrac{1}{n}$ est inévitable pour tout entier $n > 1$. Notons d'abord que

$$(f(\frac{1}{n}) - f(\frac{0}{n})) + (f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n})) + (f(\frac{3}{n}) - f(\frac{2}{n})) + \cdots + (f(\frac{n}{n}) - f(\frac{n-1}{n})) = f(1) - f(0) = 0$$

Si un des n termes de la somme ci-dessus est nul, alors $\dfrac{1}{n}$ est clairement inévitable. Si aucun de ces termes n'est nul, la fonction continue g définie par $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ est telle que $g(\frac{0}{n}) + g(\frac{1}{n}) + \cdots + g(\frac{n-1}{n}) = 0$. Comme tous les termes de cette somme ont été supposés non nuls, il existe $i \neq j$ dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tels que $g(\frac{i}{n}) > 0$ et $g(\frac{j}{n}) < 0$. Comme g est continue, il existe un réel $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$, ce qui prouve que $\frac{1}{n}$ est inévitable.
Il est remarquable que les seuls réels inévitables sont les nombres $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$. Pour le prouver, considérons un réel $r > 0$ qui n'est pas de cette forme, c'est-à-dire tel que son inverse $p = \frac{1}{r}$ ne soit pas un entier. La fonction continue
$f(x) = x\ sin^2\ (p\pi) - sin^2(p\pi x)$
satisfait la condition $f(0) = f(1) = 0$, mais son graphe n'a aucune corde horizontale de longueur $r = \frac{1}{p}$ car $f(x + \frac{1}{p}) - f(x) = (x + \frac{1}{p})sin^2(p\pi) - sin^2(p\pi(x + \frac{1}{p})) - xsin^2(p\pi) + sin^2(p\pi x) = \frac{1}{p}\ sin^2(p\pi)$ est une constante non nulle, puisque p n'est pas entier!
Ont fourni une solution correcte :
C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT (BA1 maths), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), C. LARIVIERE (prof de maths à la St John's International School Brussels), Y. SUPRIN (prof de maths à l'Ecole Européenne Bruxelles II), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 13. Après que Saint Michel ait donné t_i coups d'épée coupant i têtes du dragon ($i = 1$ ou 2) et q_j coups d'épée coupant j queues ($j = 1$ ou 2), il reste $99-2t_2+q_2$ têtes et $99+q_1-2q_2$ queues. On doit donc résoudre les équations $2t_2 - q_2 = 99(*)$ et $2q_2 - q_1 = 99(**)$ en minimisant $t_2 + q_1 + q_2$ (il est clair que Saint Michel a intérêt à faire $t_1 = 0$). Il résulte de $(*)$ que q_2 est impair, et de $(**)$ que $q_2 \geq 99/2$. Donc $q_2 \geq 51$. De ce fait, $t_2 = \frac{1}{2}(q_2 + 99) \geq 75$ et $q_1 = 2q_2 - 99 \geq 3$. Par conséquent, $t_2 + q_1 + q_2 \geq 129$. Il reste à montrer que Saint Michel peut effectivement terrasser le dragon en 129 coups d'épée. Il lui suffit par exemple de couper successivement 3 fois une seule queue (le nombre de queues passe à 102 et le nombre de têtes reste égal à 99), puis 51 fois deux queues (ceci élimine toutes les queues et fait passer le nombre de têtes à $99 + 51 = 150$), et enfin 75 fois deux têtes.
Ont fourni une solution correcte :
C. ANTONY, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT (BA1 maths), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), S. REXHEP (MA1 maths), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), W. DE DONDER (ingénieur), P. MASAI (directeur informatique à Toyota Motor Europe), C. LARIVIERE (prof de maths à la St John's International School Brussels), Y. SUPRIN (prof de maths à l'Ecole Européenne Bruxelles II), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des Problemaths en 2009-2010 :

- Ont résolu 13 Problemaths : M. DUERINCKX (BA1 maths), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL) et José HAPPART (politicien francophone retraité) qui se voient tous attribuer le titre convoité d'Hyperproblematheur intégral non borné au sens de Schpotzermann et Wienerschnitzel.
- Ont résolu 12 Problemaths : J. DI COSMO (doctorant à l'UCL) et C. VAN HOOSTE (assistant en polytech).
- Ont résolu 11 Problemaths : C. DE GROOTE, F. THILMANY (BA1 maths).
- A résolu 10 Problemaths : N. RADU (BA1 maths à l'ULg).
- Ont résolu 9 Problemaths : C. ANTONY (BA1 maths) et W. DE DONDER (ingénieur) .
- A résolu 8 Problemaths : P. ANTONIK (BA2 physique).
- Ont résolu 7 Problemaths : J.F. DETERME (BA2 polytech) et F. DOIGNIE (ingénieur).
- Ont résolu 6 Problemaths : L. MOORTGAT (BA1 maths), J. SPIECE (BA1 physique), G. NISOL (BA3 maths et polytech), C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths).
- Ont résolu 4 Problemaths : H. DELANNOY (BA1 physique) et S. REXHEP (MA1 maths)
- Ont résolu 3 Problemaths : F. REMY (BA1 polytech) et Felix Le Chat.
- Ont résolu 2 Problemaths : L. SCHOPEN (élève de 4ème à la St John's International School Brussels), M. MARION (BA1 polytech), N. WEILER (BA2 polytech), B. OBLAK (BA3 physique) et J. ROBE (MA1 polytech).
- Ont résolu 1 Problemath : M. BAILLY, C. PRIEELS(élèves de 5ème au collège Don Bosco), AVERROES, G. TILLEMA (BA1 polytech), F. FONTAINE, A. REGNIER (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole d'Arlon), M. MOSKOVIC (MA2 maths) et P. MASAI (directeur informatique à Toyota Motor Europe).

Tous ces problematheurs et problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le jeudi 1 avril à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus Plaine de l'ULB, Boulevard du Triomphe).