PROBLEMATHS
23 novembre 2009

Problemath 7

(Pour le 175ème anniversaire de l'ULB)
Lequel des deux nombres ci-dessous est le plus grand :
$(18342009!)^2$ ou $(18342009)^{18342009}$?

Problemath 8

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les paraboles P_1 et P_2 d'équations respectives $y = x^2$ et $y = -x^2$. Si la parabole P_1 roule sans glisser sur la parabole P_2 qui reste fixe, quelle est la trajectoire décrite par le foyer de P_1?

Problemath 9

Alice : "Aujourd'hui c'est mon anniversaire et ce polynôme en x à coefficients entiers a mon âge comme racine".
Bob : "Si je remplace x par 7, j'obtiens 77".
Alice : "Est-ce que j'ai l'air d'avoir 7 ans?"
Bob : "Non, effectivement. Je vais remplacer x par un entier N plus grand... j'obtiens 85 à présent, pas zéro".
Alice : "Tu vois quand même bien que mon âge est supérieur à N".
Quelle âge a Alice?

Problemath 10

Dans un cercle de rayon r, on inscrit un 2010-gone régulier convexe. Prouver que le produit des distances d'un des sommets aux 2009 autres est égale à $2010\ r^{2009}$.

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 18 décembre à 14h.

Solution du Problemath 4. Désignons par $a', a'', b', b'', c', c''$ respectivement les points construits sur le prolongement de $[c, a]$ au-delà de a, de $[b, a]$ au-delà de a, de $[a, b]$ au-delà de b, de $[c, b]$ au-delà de b, de $[b, c]$ au-delà de c, de $[a, c]$ au-delà de c. Soit o le centre du cercle inscrit au triangle abc.
Le triangle $a'aa''$ étant isocèle par construction, la médiatrice de $[a', a'']$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{a'aa''}$, donc aussi de l'angle $\widehat{bac}$, donc elle passe par le point o. Le triangle $a'cb''$ étant lui aussi isocèle par contruction, la médiatrice de $[a', b'']$ est la bissectrice de $\widehat{acb}$, donc elle passe par o. Il en résulte que $|oa'| = |oa''| = |ob''|$. Des arguments analogues montrent que o est équidistant des 6 points $a', a'', b', b'', c', c''$. Ces points sont donc situés sur un cercle , appelé cercle de Conway car découvert par le mathématicien anglais John Conway (actuellement professeur à Princeton et célèbre notamment pour ses travaux en théorie des groupes)
Ont fourni une solution correcte:
C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H. DELANNOY, J. SPIECE (BA1 physique), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), P. ANTONIK (BA2 physique), J.F. DETERME, N. WEILER (BA2 polytech), A. REGNIER (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole d'Arlon), G. NISOL (BA3 polytech), J. DI COSMO (doctorant

à l'UCL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech) et José HAPPART (politicien francophone retraité).

<u>Solution du Problemath 5</u>. En prenant comme unité d'angle un angle de 6° (c'est-à-dire l'angle parcouru par l'aiguille des secondes en 1 seconde), on peut exprimer l'angle parcouru par chacune des aiguilles à un instant quelconque $t \in [0, 12[$ par rapport à leur position à 0h.
On obtient ainsi

- pour l'aiguille des heures : $5t$
- pour l'aiguille des minutes : $60t$
- pour l'aiguille des secondes : $3600t$

On va prouver que les aiguilles ne forment jamais trois angles de 120°. En effet, dans le cas contraire, il existerait un instant t et deux nombres naturels m et n tels que

$$\begin{cases} 5t + 20 + 60m = 60t \\ 5t + 40 + 60n = 3600t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5t + 20 + 60m = 3600t \\ 5t + 40 + 60n = 60t \end{cases}$$

En éliminant t entre les deux équations de chaque système, on aurait
$719(1 + 3m) = 11(2 + 3n)$ ou $11(1 + 3m) = 719(2 + 3n)$,
d'où la contradiction car, dans les deux cas, le membre de gauche est congru à 2 modulo 3 et celui de droite à 1 modulo 3.
<u>Ont fourni une solution correcte</u>:
L. SCHOPEN(élève de 4ème à la St Johns International School Brussels), C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths),N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H. DELANNOY (BA1 physique), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), P. ANTONIK (BA2 physique), J.F. DETERME (BA2 polytech), G. NISOL (BA3 polytech),J.DI COSMO (doctorant à l'UCL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech) et José HAPPART (politicien francophone retraité).

<u>Solution du Problemath 6</u>. En partant de (0,0) et en procédant à un "balayage diagonal" des éléments de $\mathbb{N}^2$, on peut ranger ceux-ci dans la suite (0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3),..., ce qui fournit une bijection évidente de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$. Si $p(x, y)$ désigne le nombre de termes précédant (x, y) dans cette suite, un comptage élémentaire montre que $p(x, y) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (x + y) + y = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + y$, c'est-à-dire $p(x, y) = \frac{1}{2}((x + y)^2 + x + 3y)$ et ce polynôme définit une bijection $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Bien entendu, le polynôme $q(x, y)$ obtenu en permutant les variables x et y dans $p(x, y)$ fournit une deuxième solution du problème. Ces polynômes ont été construits en 1878 par Cantor. Actuellement, on ignore s'il existe d'autres polynômes en x et y définissant une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$. En 1923, Fueter et Polya ont prouvé que les seuls polynômes de degré 2 répondant à la question sont les deux polynômes construits par Cantor. En 1978, Rosenberg et Lew ont démontré que s'il existe d'autres exemples, ils sont de degré au moins 5. Avis aux amateurs!
Signalons aussi que personne ne sait s'il existe une bijection polynomiale de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}$.
<u>Ont fourni une solution correcte</u>:
C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H. DELANNOY, J. SPIECE (BA1 physique), M. MARION (BA1 polytech), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), P. ANTONIK (BA2 physique), G. NISOL (BA3 polytech), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech)et José HAPPART (politicien francophone retraité).