PROBLEMATHS
19 octobre 2009

Problemath 4

Etant donné un triangle abc dans le plan euclidien, on prolonge les côtés $[a, b]$ et $[a, c]$ au-delà du sommet a d'une longueur égale à $|bc|$, les côtés $[b, a]$ et $[b, c]$ au-delà du sommet b d'une longueur égale à $|ac|$, et les côtés $[c, a]$ et $[c, b,]$ au-delà du sommet c d'une longueur égale à $|ab|$. Prouvez que les 6 points ainsi obtenus à l'extérieur du triangle sont cocycliques (c'est-à-dire situés sur un même cercle).

Problemath 5

Sur le cadran d'une montre, les aiguilles des heures, des minutes et des secondes sont toutes animées d'un mouvement circulaire uniforme, sans à-coup. Si la montre marche correctement, les trois aiguilles peuvent-elles, à un instant donné, former trois angles de 120°?

Problemath 6

Existe-t-il un polynôme $p(x, y)$ à coefficients réels tel que $p(m, n) \in \mathbb{N}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et tel que l'application $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ soit une bijection?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 13 novembre à 14h.

Solution du Problemath 1.

On va prouver que les seules solutions sont les triples(x, y, z) où $x = y = z$.
Rappelons d'abord que, pour des nombres réels a et b strictement positifs, $a^b < 1$ si et seulement si $a < 1$. Par conséquent, si l'un des nombres x, y, z est < 1, ils sont tous < 1. D'autre part, il est facile de vérifier que si (x, y, z) est une solution , alors $(1/x, 1/z, 1/y)$ l'est aussi. On peut donc supposer que x, y, et z sont ≥ 1 et, par la symétrie du système, que $x \leq z$ et $y \leq z$. Il en résulte que

$$x \geq x^{y/z} = y^{z/x} \geq y$$

et, de ce fait,

$$x \geq x^{y/z} = z^{x/y} \geq z.$$

Donc $x = z$ et les équations de départ se réduisent à

$$x^{y/x} = y = x^{x/y}$$

Si $x = 1$, alors $y = 1$. Si $x > 1$, alors $y/x = x/y$, c'est-à-dire $x = y$. Dans les deux cas, on conclut que $x = y = z$.

Ont fourni une solution correcte:
C.DE GROOTE, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS (BA1 maths à Cambridge), J. SPIECE(BA1 physique), M. MARION, F. REMY (BA1 polytech), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), A. LEDENT (BA2 maths à Cambridge), J.F. DETERME(BA2 polytech), G. NISOL (BA3 maths et polytech), S. REXHEP (MA1 maths), W. DE DONDER (ingénieur), FELIX Le Chat, José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 2.

Si $p(x)$ est un polynôme de degré impair $d \succ 1$, un point (a, b) du plan $\mathbb{R}^2$ se trouve sur une tangente à la courbe d'équation $y = p(x)$ si et seulement si l'équation $p(x) - b = p\prime(x)(x - a)$ a au moins une solution $x \in \mathbb{R}$. Cette équation peut s'écrire

$$xp\prime(x) - p(x) - ap\prime(x) + b = 0.$$

Comme $d \succ 1$, le membre de gauche est un polynôme de degré d. Comme d est impair, ce polynôme a au moins une racine réelle. Il existe donc un nombre réel $x_\circ$ tel que la tangente à la courbe d'équation $y = p(x)$ au point $(x_\circ, p(x_\circ))$ passe par le point (a, b). On en conclut que tous les polynômes de degré impair $\succ 1$ sont joviaux. C'est clairement faux pour les polynômes de degré 1.
D'autre part, les polynômes $x^{2k}(k \in \mathbb{N}_\circ)$ ne sont pas non plus joviaux, car on vérifie facilement que le point $(0, 1)$, ne se trouve sur aucune tangente à la courbe d'équation $y = x^{2k}$.
Ont fourni une solution correcte:
M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS (BA1 maths à Cambridge), J. SPIECE(BA1 physique), G. TILLEMA, F. REMY (BA1 polytech), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), A. LEDENT (BA2 maths à Cambridge), P. ANTONIK (BA2 physique), J.F. DETERME(BA2 polytech), G. NISOL (BA3 maths et polytech), J. ROBE (BA3 polytech), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), J.DI COSMO (doctorant à l'UCL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), FELIX Le Chat, José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 3.

On sait que $sin3x = 3sinx - 4sin^3x$, d'où on tire $sin^3x = \frac{1}{4}(3sinx - sin3x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'expression dans le membre de gauche de l'égalité proposée peut donc s'écrire $\frac{27}{4}(3sin9° - sin27°) + \frac{9}{4}(3sin27° - sin81°) + \frac{3}{4}(3sin81° - sin243°) + \frac{1}{4}(3sin243° - sin729°) = \frac{1}{4}(81sin9° - sin729°) = \frac{1}{4}(81sin9° - sin9°) = 20sin9°$.
Ont fourni une solution correcte:
M. BAILLY, C. PRIEELS (élèves de 5ème secondaire au Collège Don Bosco), C.DE GROOTE, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS (BA1 maths à Cambridge), H. DELANNOY (BA1 physique), AVERROES (?), F. REMY (BA1 polytech), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), A. LEDENT (BA2 maths à Cambridge), P. ANTONIK (BA2 physique), J.F. DETERME(BA2 polytech), F. FONTAINE (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole d'Arlon), N. WEILER (BA2 polytech), G. NISOL (BA3 maths et polytech), S. REXHEP (MA1 maths), J. ROBE (MA1 polytech), J.DI COSMO (doctorant à l'UCL), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), FELIX Le Chat, José HAPPART (politicien francophone retraité).
P.S. (!) José HAPPART signale que ses acquis sociaux d'ancien Président du Parlement wallon lui ont permis d'engager deux collaborateurs pour faire les Problemaths.
Il propose d'organiser (à ses frais ?) le drink final des Problemaths à Francorchamps.