PROBLEMATHS
23 mars 2009

Voici les solutions des 3 derniers Problemaths, ainsi que le Palmarès final de cette année 2008-2009:

Solution du Problemath 11.

Soit $S = \sum_{n=1}^{2008} \frac{5^{2009}}{25^n + 5^{2009}} = \sum_{n=1}^{2008} \frac{5^{2009-n}}{5^n + 5^{2009-n}}$ (1)

En posant $m = 2009 - n$, on a aussi

$S = \sum_{m=1}^{2008} \frac{5^m}{5^{2009-m} + 5^m}$ (2)

Par conséquent, en ajoutant(1) et (2) membre à membre,

$$2\,S = \sum_{k=1}^{2008} \left(\frac{5^{2009-k}}{5^k + 5^{2009-k}} + \frac{5^k}{5^{2009-k} + 5^k} \right) = \sum_{k=1}^{2008} 1 = 2008$$

d'où on tire $S = 1004$.

Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de 6ème à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, C. GENIN, G. KERG (BA1 maths), P. ANTONIK (BA1 physique), M. GHEYSENS (BA2 maths), G. NISOL(BA2 polytech.), A. KIEFER(MA1 maths), G. VAN BEVER (MA2 maths), F. MERCIER (agrèg. philo), C. VAN HOOSTE(assistant en polytech), W. DE DONDER (ingénieur), Natalie PORTMAN (actrice), Antonio VIVALDI (compositeur), CUBITUS et TROLL MASTER.

Solution du Problemath 12. a) Voici la solution de Maxime GHEYSENS: Supposons qu'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prenant chacune de ses valeurs exactement 2 fois (notons que la fonction $-f$ jouit des mêmes propriétés). Soit y_1 une des valeurs de f. Il existe donc deux réels $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y_1$. Comme f est continue, f admet un minimum et un maximum sur $I = [x_1, x_2]$ et, comme f n'est pas constante sur I (sinon elle prendrait la valeur y_1 une infinité de fois), ces extrema sont distincts. Soit y^* le maximum de f sur I. On peut supposer $y^* \neq y_1$ (sinon y^* serait le minimum de $-f$ sur I et on continuerait le raisonnement avec la fonction $-f$), donc il existe un réel x^*, strictement entre x_1 et x_2, tel que $f(x^*) = y^*$. Posons $I_1 = [x_1, x^*]$ et $I_2 = [x^*, x_2]$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, $[y_1, y^*]$ est contenu dans $f(I_1) et f(I_2)$. Comme f est continue et prend chacune de ses valeurs exactement 2 fois, f est strictement croissante sur I_1 et strictement décroissante sur I_2, donc f est bijective sur chacun des intervalles I_1 et I_2. Or f doit prendre 2 fois la valeur y^*, donc il existe un réel $x^{'} \notin I$ tel que $f(x^{'}) = y^*$. Désignons par J l'intervalle $[x^{'}, x_1]$(si $x^{'} < x_1$) ou $[x_2, x^{'}]$ (si $x_2 < x^{'}$). Par le théorème de la valeur intermédiaire, $[y_1, y^*]$ est contenu dans $f(J)$. La fonction f prend donc chaque valeur de $]y_1,\ y^*[$ au moins 3 fois, d'où la contradiction.

b) CUBITUS a donné un exemple très simple de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prenant chacune de ses valeurs exactement 3 fois. Considérons la fonction $g : [0, 1] \to [0, 1]$ linéaire sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$ et telle que $g(0) = g(\frac{2}{3}) = 0$ et $g(\frac{1}{3}) = g(1) = 1$. On vérifie facilement que la fonction "en dents de scie" f définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + g(x - \lfloor x \rfloor)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, a les propriétés requises ($\lfloor x \rfloor$ désigne le plancher de x, c'est-à-dire le plus grand entier $\leq x$).

Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de 6ème à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, C. GENIN, G. KERG (BA1 maths), M. GHEYSENS (BA2 maths), G. VAN BEVER (MA2 maths), C. VAN HOOSTE(assistant en polytech), Antonio VIVALDI (compositeur) et CUBITUS

Solution du Problemath 13. Le volume d'un tétraèdre n'est pas déterminé par la donnée des aires des 4 faces. Soit h la hauteur du tétraèdre régulier T dont toutes les faces sont d'aire 1. Etant donné un nombre réel ϵ tel que $0 < \epsilon < h$, considérons le tétraèdre $T^{'}$ dont les 4 faces sont des triangles isocèles isométriques d'aire 1 ayant une base de longueur ϵ (il est facile de prouver qu'un tel tétraèdre existe si ϵ est suffisamment petit). Si a, b, c, d sont les sommets de $T^{'}$, on a donc $|ac| = |bd| = \epsilon,\ ac \perp bd$ et $|ab| = |bc| = |cd| = |da|$. La distance du sommet a au plan bcd est inférieure à $|ac| = \epsilon$, donc inférieure à h. Le volume de $T^{'}$ est donc inférieur au volume de T, malgré que toutes leurs faces soient de même aire 1.

Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), C. GENIN, G. KERG (BA1 maths), P. ANTONIK (BA1 physique), C. VAN HOOSTE(assistant en polytech), W. DE DONDER (ingénieur), Natalie PORTMAN (actrice), Antonio VIVALDI (compositeur)et CUBITUS

Pour terminer en beauté, voici le palmarès final de tous ceux qui ont résolu au moins deux Problemaths en 2008-2009 :

- A résolu 12 Problemaths : Nicolas RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège) qui se voit attribuer le titre convoité d'Hyperproblematheur intégral non borné au sens de Schpotzermann et Wienerschnitzel.

- Ont résolu 11 Problemaths : H.P. BUI, G. KERG (BA1 maths)et Natalie PORTMAN (actrice).
- Ont résolu 10 Problemaths : G. VAN BEVER (MA2 maths) et W. DE DONDER (ingénieur).
- Ont résolu 9 Problemaths : N. RICHARD (assistant au Dépt de maths) et C. VAN HOOSTE(assistant en polytech).
- Ont résolu 8 Problemaths : P. ANTONIK (BA1 physique) et M. GHEYSENS (BA2 maths).
- A résolu 7 Problemaths : TROLL MASTER.
- A résolu 6 Problemaths : F. DOIGNIE (ingénieur).
- Ont résolu 5 Problemaths : G. NISOL(BA2 polytech.), M. LESSINNES (MA2 polytech) et Antonio VIVALDI (compositeur).
- Ont résolu 3 Problemaths : C. GENIN, C. LONARDO (BA1 maths), Angelina JOLIE (BA2 maths), S. REXHEP (BA3 maths), Tia HELLEBAUT (championne olympique) et CUBITUS (alias Luc DUPANLOUP).
- Ont résolu 2 Problemaths : A. GOTTCHEINER (BA3 Solvay), R. DENDIEVEL (BA3 médecine), B. DETERME (ingénieur), A. WAJNBERG (journaliste scientifique à Radio Campus) et SPIDERMAN.

Tous ces problematheurs et problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le jeudi 2 avril à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus Plaine,Boulevard du Triomphe)