PROBLEMATHS
2 février 2009

Voici les 3 derniers énoncés de cette année académique 2008-2009:

Problemath 11

$$\text{Que vaut} \sum_{n=1}^{2008} \frac{5^{2009}}{25^n + 5^{2009}} \ ?$$

Problemath 12

Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prenant chacune de ses valeurs exactement 2 fois? exactement 3 fois?

Problemath 13

L'aire d'un triangle est déterminée par la donnée des longueurs des 3 côtés. Le volume d'un tétraèdre est-il déterminé par la donnée des aires des 4 faces?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 6 mars à 16 h

Solution du Problemath 7. Si α était rationnel, son développement décimal serait périodique à partir d'un certain rang, avec une période de longueur k. Or, pour tout entier $n \geq 10^k$, l'écriture décimale de $n!$ se termine par au moins k chiffres 0. De ce fait , le développement décimal de α ne peut admettre une période de longueur k que si celle-ci ne contient que des 0, autrement dit tous les chiffres du développement de α devraient être des 0 à partir d'un certain rang, d'où la contradiction puisque l'écriture décimale de $n!$ contient au moins un chiffre $\neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc α est irrationnel.

Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG (BA1 maths), P. ANTONIK (BA1 physique), M. GHEYSENS (BA2 maths), S. REXHEP (BA3 maths), M. LESSINNES (MA2 polytech), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths), W. DE DONDER, B. DETERME, F. DOIGNIE (ingénieurs), Natalie PORTMAN (actrice), Antonio VIVALDI (compositeur) et TROLL MATSTER.

Solution du Problemath 8. La $n^{\text{ème}}$ traction sur l'élastique multiplie par $(n+10)/(n+9)$ la distance que l'araignée doit encore parcourir. Soit d_n la distance restant à parcourir après n progressions de l'araignée, juste avant la $n^{\text{ème}}$ traction sur l'élastique. Prouvons par récurrence sur n que $d_n = (n+9)(1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+10})$ pour tout $n \geq 1$. C'est vrai pour $n = 1$ car $d_1 = 10-1 = 10(1-\frac{1}{10})$. D'autre part, si c'est vrai pour n, ce l'est aussi pour $n+1$ car

$$d_{n+1} = d_n\frac{n+10}{n+9} - 1 = (n+10)(1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+10}) - 1 = (n+10)(1-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+10})$$

Dans le second facteur du membre de droite apparaît une somme partielle de la série harmonique (amputée de ses 9 premiers termes). Comme cette série diverge, ce facteur va devenir négatif en un nombre fini d'étapes, ce qui montre que l'araignée atteindra bien l'extrémité de l'élastique en un temps fini.

Ont fourni une solution correcte: N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG (BA1 maths) P. ANTONIK (BA1 physique), M. GHEYSENS(BA2 maths), R.D. (BA3 médecine), M. LESSINNES (MA2 polytech), G. VAN BEVER (MA2 maths), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths), W. DE DONDER, B. DETERME, F. DOIGNIE (ingénieurs), A. WAJNBERG(journaliste scientifique à Radio Campus), Natalie PORTMAN (actrice), Antonio VIVALDI (compositeur) et TROLL MATSTER.

Solution du Problemath 9. Supposons que le plan $\mathbb{R}^2$ puisse être couvert par une famille infinie dénombrable F de droites. Comme $\mathbb{R}^2$ comprend une infinité non dénombrable de droites verticales(puisqu'il y en a une pour chaque abscisse réelle), il existe une droite verticale D qui n'est pas dans F. Comme chaque droite de F coupe D en au plus un point, les droites de F couvrent au plus une infinité dénombrable de points de D. L'ensemble des points de D n'étant pas dénombrable, il existe un point de D non couvert par une droite de F, d'où la contradiction.

Ont fourni une solution correcte: N. RADU(élève de 6$^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG (BA1 maths),P. ANTONIK (BA1 physique), M. GHEYSENS(BA2 maths), S. REXHEP (BA3 maths), R.D. (BA3 médecine), G. VAN BEVER (MA2 maths), M. LESSINNES (MA2 polytech), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), Natalie PORTMAN (actrice) et TROLL MATSTER.

Solution du Problemath 10. Etant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$, soit A le carré fermé de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 ayant respectivement pour coordonnées $(a, a), (a, -a), (-a, -a), (-a, a)$ et soit B le carré fermé de sommets b_1, b_2, b_3, b_4 ayant pour coordonnées $(b, b), (b, -b), (-b, -b), (-b, b)$. Considérons également les 4 points $c_1(b, a), c_2(a, -b), c_3(-b, -a)$ et $c_4(-a, b)$. En enlevant des rectangles fermés $a_1c_2b_2c_1, a_2c_3b_3c_2, a_3c_4b_4c_3$ et $a_4c_1b_1c_4$ respectivement les côtés $[b_2, c_1], [b_3, c_2], [b_4, c_3]$ et $[b_1, c_4]$, on obtient 4 rectangles semi-ouverts formant une partition de la "couronne" semi-ouverte $A \backslash B$. Comme tout rectangle semi-ouvert peut être partitionné en segments fermés(il suffit de couper un tel rectangle par les droites parallèles au côté enlevé), il en est de même pour toute couronne semi-ouverte du type décrit ci-dessus.

Tout carré ouvert C de $\mathbb{R}^2$ est la réunion d'une famille infinie dénombrable de carrés fermés emboîtés $C_\circ \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ ayant le même centre que C et dont les côtés sont parallèles à ceux de C. Ceci fournit une partition de C en une infinité dénombrable d'ensembles, à savoir $C_\circ, C_1 \backslash C_\circ, C_2 \backslash C_1, \ldots$ Il est facile de partitionner le carré fermé $C_\circ$ en segments fermés et on a vu ci-dessus qu'on peut le faire aussi pour toute couronne semi-ouverte $C_{i+1} \backslash C_i$. Par conséquent, C lui-même peut être partitionné en segments fermés.

Nous n'avons reçu aucune solution correcte de ce problème.