

Le nom de votre école ici

Nom :

Prof : Votre nom ici

La date ici

partie 1

Examen de mathématiques : 6 GT 4H/semaine

Calculatrice interdite !

## 1 Fonctions trigonométriques (30 points)

1. (4 points) Dérive, factorise et simplifie la réponse à l'aide d'une formule :

$$f(x) = \frac{4\sqrt{\cos^3 8x}}{\sin^3 4x}$$

2. (6 points) Calcule les limites suivantes par la règle de l'Hospital :

1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{5 \cos^2 2x}{3 - 3 \sin 2x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin 2x \cdot \cos 4x}$

3. (20 points) Soit la fonction  $f(x) = \sin x$

- 1) Précise  $dom f$ ,  $im f$  ainsi que **toutes** ses racines dans  $dom f$
- 2) A l'aide de l'étude de sa dérivée, détermine les coordonnées de ses maxima dans **l'intervalle**  $[0, 2\pi]$
- 3) Dans **l'intervalle**  $[0, 2\pi]$ , trace son graphe avec soin et précision (unité : 2 cm)
- 4) Par manipulations graphiques et en justifiant, déduis le graphe de  $g(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ ; trace-le.
- 5) Résous graphiquement  $g(x) > \frac{1}{2}$
- 6) Dans un port, la hauteur  $h$  du niveau de l'eau varie avec les marées. Cette hauteur peut être modélisée par la fonction

$$h(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} x\right) + 5 \quad \text{où la hauteur de l'eau } h \text{ est exprimée en mètres et où } x \text{ représente le nombre d'heures après minuit.}$$

- a) A quelles heures le niveau d'eau atteint-il 4 mètres dans le port? Justifie ton calcul.
- b) A l'aide du calcul de la dérivée, détermine à quelles heures le niveau d'eau sera maximum ou minimum?

## 2 Logarithmes (15 points)

1. (6 points) Calcule :

1)  $\log 0,00001$

2)  $\ln \frac{e^2}{\sqrt[4]{e^3}}$

3)  $\log_4 8\sqrt{2}$

4)  $\log_{2\sqrt{3}} \frac{1}{144}$

2. (9 points) Résous :

1)  $\ln(x+1) = 2$

2)  $\log_{3x-1}(5x+2) = 1$

3)  $\log_x 32 = -5$

4)  $\log_{x-3}(2x-3) = 2$

Le nom de votre école ici

Nom :

Prof : Votre nom ici

La date ici

partie 1

Examen de mathématiques : 6 GT

4H/semaine

Calculatrice autorisée!

### 3 Fonctions exponentielles (50 points)

1. ( 17 points) Résous les équations et inéquations suivantes :

1)  $25^{2x-1} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5^{-x}} = 5^{2x} \cdot 5^{-4}$

2)  $5^{4x} = 6$

3)  $3^{2x+2} - 242 \cdot 3^x = 27$

4)  $\frac{5}{2} \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+2} - 6 \cdot 4^{x-1} = 98$

5)  $e \cdot e^{2+x} \leq \frac{\sqrt{e^3}}{e^{2x}}$

6)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1}$

2. (6 points) Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes en précisant clairement les différentes C.E. :

1)  $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - e}}{3^{2x-4} - \sqrt{3}}$

2)  $f(x) = \sqrt{\frac{2+4^x}{2-4^x}}$

3. (6 points) Calcule les limites suivantes : (détaille toutes les étapes et justifie la réponse finale à l'aide du graphe de référence)

1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1-x}{2x-6}\right)}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{4x^2-9}{5-x}\right)}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{2 \cos^2 x - 2}{3 \sin x}\right)}$

4. (9 points) Soit la fonction  $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

1) Trace le graphe de cette fonction en précisant au minimum 6 points (travaille en fractions)

2) Déduis-en par manipulations graphiques et en justifiant celui de  $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \frac{4}{5}$

3) Précise *domg*, *img*, les limites et asymptote(s) de  $g(x)$ .

Détermine par calcul les intersections du graphe de  $g$  avec les 2 axes.

suite au verso...

5. (4 points) Une balle magique est lancée d'une hauteur de 2 mètres.  
 A chaque fois qu'elle touche le sol, elle rebondit jusqu'à 75 % de sa hauteur précédente.
- 1) Quelle hauteur atteint la balle après le 3<sup>ième</sup> rebond ?
  - 2) Énonce la fonction permettant de calculer sa hauteur après  $x$  rebonds.
  - 3) Combien de fois doit-elle rebondir pour que sa hauteur soit inférieure à 15 cm ? Justifie ta réponse.
6. (4 points) Une population de bactéries triple toutes les 2 heures.  
 Calcule le pourcentage d'augmentation par heure. Justifie.  
 Énonce la fonction permettant de calculer le nombre de bactéries après  $x$  heures.  
 Après combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il multiplié par 500 ? Justifie.
7. (4 points) Sachant que le graphe ci-dessous est de la forme  $y = b.a^x + c$ , retrouve son expression analytique en justifiant ton raisonnement :

