PROBLEMATHS
17 novembre 2008

Problemath 7

Posons $f(n) = n!$ pour tout entier $n > 0$. Le nombre réel α dont l'écriture en système décimal est définie par $\alpha = 0, f(1)f(2)f(3)f(4)\ \ldots\ = 0,12624120720\ldots$ est-il rationnel ou irrationnel?

Problemath 8

L'extrémité A d'un élastique de 10 mètres de long est fixée à un clou, et vous tenez en main l'autre extrémité B. Une araignée (qu'on peut supposer ponctuelle) part de A et progresse vers B sur l'élastique de la manière suivante: elle avance d'un mètre pendant une minute, s'arrête pour se reposer pendant la minute qui suit, puis recommence en alternant les minutes de progression (pendant lesquelles elle avance toujours d'un mètre) et les minutes de repos. Chaque fois que l'araignée est au repos, vous tirez sur l'extrémité B de l'élastique (qu'on supposera extensible à volonté) et vous l'allongez d'un mètre. L'araignée parviendra-t-elle à atteindre l'extrémité B en un temps fini?

Problemath 9

Le plan $\mathbb{R}^2$ peut-il être couvert par une infinité dénombrable de droites? Autrement dit, existe-t-il une famille infinie dénombrable de droites telle que tout point de $\mathbb{R}^2$ appartienne à une au moins des droites de cette famille?

Problemath 10

Soit C un carré ouvert du plan $\mathbb{R}^2$. Existe-t-il une partition de C en segments fermés (non réduits à un point)?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 19 décembre à 16 heures
Rectificatif : Willy DE DONDER(ingénieur à Marcinelle) avait fourni une solution correcte du Problemath 1

Solution du Problemath 4.
Pour prouver que

$$\frac{1}{\sin\ 45^\circ\ \sin\ 46^\circ} + \frac{1}{\sin\ 47^\circ\ \sin\ 48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin\ 133^\circ\ \sin\ 134^\circ} = \frac{1}{\sin\ 1^\circ},$$

multiplions les deux membres par $\sin 1^\circ$. En transformant le membre de gauche grâce à l'égalité

$$\frac{\sin((k+1)^\circ - k^\circ)}{\sin\ k^\circ\ \sin\ (k+1)^\circ} = cotg\ k^\circ - cotg(k+1)^\circ,$$

on obtient

$$cotg\ 45^\circ - cotg\ 46^\circ + cotg\ 47^\circ - cotg\ 48^\circ + \cdots + cotg\ 133^\circ - cotg\ 134^\circ,$$

$$= cotg\ 45^\circ - (cotg\ 46^\circ + cotg\ 134^\circ) + (cotg\ 47^\circ + cotg\ 133^\circ) - \cdots + (cotg\ 89^\circ + cotg\ 91^\circ) - cotg 90^\circ$$

$$= 1 - 0 + 0 - \cdots + 0 - 0 = 1 \qquad\qquad C.Q.F.D.$$

Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG (BA1 maths), P. ANTONIK (BA1 physique), G.NISOL (BA2 polytech), G. VAN BEVER (MA2 maths), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths) , C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), W. DE DONDER (ingénieur),Natalie PORTMAN (actrice).

Solution du Problemath 5.
La fonction f_n définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} = \cos(x\sqrt{k})$ est clairement périodique pour $n = 1$.
Si elle était périodique pour une valeur de $n > 1$, on aurait

$$f_n(T) = f_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \cos\ 0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n,$$

c'est-à-dire $f_n(T) = cos(T\sqrt{1}) + cos(T\sqrt{2}) + \cdots + cos(T\sqrt{n}) = n$. Comme $\cos\theta \leqslant 1$ quel que soit θ, ceci n'est possible que si $cos(T\sqrt{k} = 1$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. En particulier, comme $n \geqslant 2$, on aurait $\cos(T\sqrt{1}) = \cos(T\sqrt{2}) = 1$, donc il existerait des entiers r et s tels que $T\sqrt{1} = 2\pi r$ et $T\sqrt{2} = 2\pi s$ d'où, en divisant membre à membre ces deux égalités, $\sqrt{2} = r/s \in \mathbb{Q}$, une contradiction.
En conclusion, f_n est périodique si et seulement si $n = 1$.
Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de 6$^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG , C. LONARDO(BA1 maths), P. ANTONIK (BA1 physique), G. VAN BEVER (MA2 maths), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), Natalie PORTMAN (actrice).

Solution du Problemath 6.
Mesurons les temps en minutes et les distances en mètres. Les hypothèses entraînent que la projection horizontale du vectueur vitesse de chaque insecte est de norme constante, inférieure ou égale à 1m/min. De ce fait, tout insecte touchant un des côtés verticaux du carré mettra au moins 2 minutes avant de toucher une nouvelle fois ce côté.
Si chacun des insectes a une trajectoire verticale, l'araignée peut descendre quand elle veut le long de toute autre verticale. Sinon, au moins un des insectes va rebondir à un instant $t_\circ$ sur un des côtés verticaux (par exemple le gauche). Il suffit alors que l'araignée se place dans le coin supérieur gauche du carré et procède comme suit:
a) si l'autre insecte touche le côté gauche à un instant $t \in [t_\circ, t_\circ + 1[$, il ne le touchera plus pendant l'intervalle de temps $[t_\circ + 1,\ t_\circ + 2[$ et l'araignée peut entamer sa descente à l'instant $t_\circ + 1$
b) si l'autre insecte ne touche jamais le côté gauche pendant l'intervalle $[t_\circ, t_\circ + 1[$, l'araignée peut entamer sa descente à l'instant $t_\circ$.
Ont fourni une solution correcte :N. RADU(élève de 6$^{\text{ème}}$ à l'Athénée Charles Rogier à Liège), H.P. BUI, G. KERG (BA1 Maths),G. NISOL (BA2 polytech), G. VAN BEVER (MA2 maths),W.DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), N. RICHARD (assistant au Dépt de maths), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), Natalie PORTMAN (actrice).