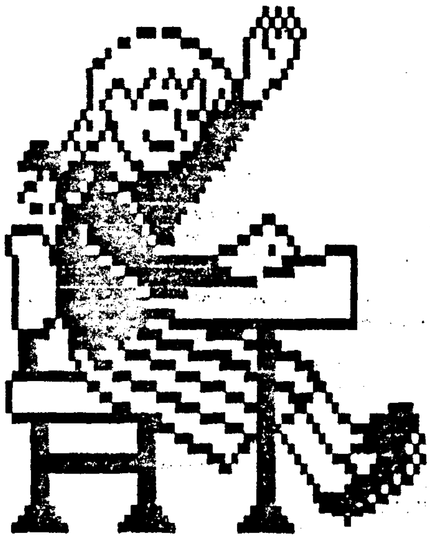
6
Le binome de Newton
Le nombre e
Les series



LE BINOME DE NEWTON

$$(x + a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . a^i . x^{n-i} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \quad a \in \mathbb{R}$$

Démonstration :

On a $(x + a_1).(x + a_2) = x^2 + (a_1 + a_2).x + a_1.a_2$

$$(x + a_1).(x + a_2).(x + a_3) = x^3 + (a_1 + a_2 + a_3).x^2 + (a_1.a_2 + a_1.a_3 + a_2.a_3).x + a_1.a_2.a_3$$

$$(x + a_1).(x + a_2). \;...\; .(x + a_n) = x^n + (a_1 + a_2 + ... + a_n).x^{n-1} + (a_1.a_2 + ...).x^{n-2} + (a_1.a_2.a_3 + ...).x^{n-3} + ... + a_1.a_2.a_3. \;...\; .a_n \qquad (1)$$

Le coefficient de x^{n-1} comprend n termes.

Le coefficient de x^{n-2} comprend autant de termes que le nombre de manières de prendre 2 éléments parmi n, l' ordre dans lequel sont pris ces éléments n' ayant pas d' importance.

Le coefficient de x^{n-i} comprend autant de termes que le nombre de manières de prendre i éléments parmi n, l' ordre dans lequel sont pris ces éléments n' ayant pas d' importance.Ce nombre est noté $\binom{n}{i}$ et

$$\binom{n}{i} = \frac{n.(n-1).(n-2). \;...\; .(n - (i - 1))}{i!}$$

$$= \frac{n!}{i!.(n-i)!} \qquad (2)$$

où $n! = n.(n-1).(n-2). \;...\; .3.2.1$

Si dans (1), on prend $a_1 = a_2 = ... = a_n$ on a

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1}.a.x^{n-1} + \binom{n}{2}.a^2.x^{n-2} + ... + \binom{n}{i}.a^i.x^{n-i} + ... + \binom{n}{n-1}.x.a^{n-1} + a^n \qquad (3)$$

Si on pose $0! = 1$, (2) nous livre

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.n!} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!.0!} = 1 \qquad (4)$$

De (3) et de (4) on déduit

$$(x + a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.a^i.x^{n-i}$$

C.Q.F.D.

Quelques propriétés des $\binom{n}{i}$:

1) $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$

2) $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$

3) De la propriété (2), on peut déduire une manière amusante de calculer les nombres $\binom{n}{i}$:

Triangle de Pascal :

n \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
.....										

Ces trois propriétés sont à démontrer en exercices.

Exercices :

1. $(x + 2)^5 =$
2. $(1 - t)^8 =$
3. $\left(2x^2 + \frac{3}{x^4}\right)^{11} =$
4. Dans $(a + b)^{12}$, chercher le terme en a^7b^5
5. Dans $(-2x^2 - 1)^7$ chercher le terme en x^8
6. Dans $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^7$ chercher le terme en x^6
7. Calculer $(\sqrt{3} + 5)^4 + (\sqrt{3} - 5)^4$
8. Dans $x^{10} \cdot (x - 2)^{10}$, chercher le terme en x^{16}
9. Quel est le terme indépendant de $\left(\frac{1}{x^3} - 2x^2\right)^{10}$?
10. Quel est le terme en x^8 de $(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3)^4$?

11. Dans $\mathbb{C}$, on sait que $(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i.\sin 5\varphi$
En déduire une formule donnant $\cos 5\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$.

12. Pour quelles valeurs de m, le " $7^{\text{ème}}$ " terme dans le développement de $\left(\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}\right)^m$ sera-t-il du troisième degré en x ?
Déterminer ce $7^{\text{ème}}$ terme.

LE NOMBRE e

Considérons la suite $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ qui est une suite de nombres réels.

Calculons quelques termes de cette suite. les essais semblent indiquer que cette suite est croissante, c' est à dire que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n et qu' elle a une limite de l' ordre de 2,718 . Prouvons que ces observations sont correctes.

La suite $\{ u_n \}$ est croissante :

Il n 'est pas facile de comparer $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

et $u_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$.

Souvenons-nous que la moyenne arithmétique d' un ensemble de nombres positifs est supérieure à leur moyenne géométrique et appliquonsceci aux n + 1 nombres

$$1,\ 1 + \frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n},\ \ldots,\ 1 + \frac{1}{n}\ .$$

Leur moyenne arithmétique vaut $\dfrac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$

Leur moyenne géométrique vaut $\left(1.(1 + \frac{1}{n})^n\right)^{\frac{1}{n+1}} = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{n+1}}$

On a $\quad 1 + \dfrac{1}{n+1} > (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{n+1}}$

ou $\quad (1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et la suite des u_n est donc croissante.

La suite $\{ u_n \}$ est **bornée supérieurement**

En effet, le binôme de Newton livre

$$u_n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n.(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n.(n-1).\ \ldots\ .(n-p+1)}{p!}.\frac{1}{n^p} + \ldots + \frac{1}{n^n}$$

Notons $t_p = \dfrac{n.(n-1).\ \ldots\ .(n-p+1)}{p!.n^p}$

ce qui permet d' écrire $u_n = 1 + 1 + t_2 + \ldots + t_p + \ldots + t_n$

On a $\quad t_p = \dfrac{1}{p!}.\dfrac{n}{n}.\dfrac{n-1}{n}.\dfrac{n-2}{n}.\ \ldots\ .\dfrac{n-p+1}{n} < \dfrac{1}{p!} < \dfrac{1}{1.2.2.\ \ldots\ .2}$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}\ .$$

et $u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

ou $u_n < 3$.

Dès lors, un rappel des propriétés de $\mathbb{R}$ montre qu' il existe un plus petit nombre réel qu' on note e pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et que

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \qquad (1)$$

Valeur de e ?

Une méthode est de calculer (1). Cette méthode est lente,

Calculons une borne **inférieure** de e :

On a vu que $u_n = t_0 + t_1 + \dots t_p + \dots + t_n$

où $t_p = \frac{1}{p!}.(1 - \frac{1}{n}).(1 - \frac{2}{n}). \dots .(1 - \frac{p-1}{n})$

Fixons une valeur de p. Alors $u_n > t_0 + t_1 + \dots + t_p$ $(p < n)$

Lorsque n augmente, tend vers l' infini, t_p tend vers $\frac{1}{p!}$. Dès lors,

$$\boxed{e > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{p!} \quad \text{pout tout } p \in \mathbb{N}_0}$$

Calculons une borne **supérieure** de e :

On a vu que $u_n = t_0 + t_1 + \dots + t_p + \dots + t_n$ où $t_p < \frac{1}{p!}$

donc $u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} + \frac{1}{p!} + \frac{1}{(p+1)!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} + \frac{1}{p!}.(1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1).(p+2)} + \dots + \frac{1}{(p+1).(p+2). \dots n})$$

La parenthèse du dernier terme de cette expression livre

$$1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1).(p+2)} + \dots + \frac{1}{(p+1).(p+2). \dots .n}$$

$$< 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \dots + \frac{1}{(p+1)^{n-p}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(p+1)^{n-p+1}}}{1 - \frac{1}{p+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}} = \frac{p+1}{p} = 1 + \frac{1}{p}$$

et on a donc

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} + \frac{1}{p!}.(1 + \frac{1}{p}) \qquad \text{pour tout } n > p$$

Comme la suite est croissante, cette dernière expression est valable pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et de ce fait

$$\boxed{e \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} + \frac{1}{p!} + \frac{1}{p!.p} \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathbb{N}_0}$$

En réunissant les résultats précédents, on obtient

$$\boxed{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < e \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0}$$

Cet encadrement de e est très maniable, en pratique pour calculer le $(n + 1)^{ème}$ encadrement, il suffit de disposer du $n^{ème}$ et d 'ajouter $\frac{1}{(n+1)!}$, à la borne inférieure et $\frac{1}{(n+1).(n+1)!}$, à la borne supérieure du résultat précédent

Pour $n = 10$, le calcul de e sur micro sans s' occuper des erreurs d'arrondis donne

$$2{,}71828180 < e < 2{,}71828183$$

$$\boxed{e = 2{,}\ 71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 6999\ \dots}$$

<u>Exercices:</u>

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ et les 10 premiers termes de la suite v_n où $v_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et comparer les résultats.

2. Soit $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$

   a) Montrer que cette suite est décroissante par une comparaison des moyennes des $n + 2$ nombres

   $$1, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}$$

   b) Montrer que $(1 + \frac{1}{n})^n < b_n$ pour tout n et que $[u_n , b_n]$ encadre e

   Faire un programme en vue de trouver les réponses de l' exercice 1 en veillant à ce que tous les arrondis se fassent par défaut. Pourquoi veut-on des arrondis par défaut?

LES SERIES

Prenons une suite de réels $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ $n \in \mathbb{N}_0$.

Créons les sommes partielles $s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$, $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$, $\ldots$, $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $\ldots$. La suite de ces sommes partielles $s_1, s_2, \ldots, s_n$ est appelée <u>**série**</u>. On appelle souvent série la somme infinie $u_1 + u_2 \ldots + u_n + \ldots$ qui est la valeur vers laquelle converge $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ si du moins celle-ci converge.

<u>Propriétés</u> :

1. Une série étant une suite particulière, toutes les propriétés vraies pour les suites sont vraies pour les séries.
2. Si une série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

   en effet: $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$

   et $\lim\limits_{n \to \infty} s_{n-1} = s$ implique que

   $$\lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} u_n = 0$$
3. La réciproque de la propriété (2) n' est pas vérifiée !,

   $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ n' entraîne pas que la série soit convergente.

   Exemple: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots$

   $$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots)$$
   $$+ (\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \ldots) + \ldots$$
   $$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$
   $> k$ pout tout $k \in \mathbb{R}$

   et la série ne converge pas.
4. La contraposée de la propriété (2), $[\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})\ ]$ nous permet d' affirmer que

   $$\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \text{la série diverge.}$$

<u>Petit problème :</u>

Quelle est la plus " longue " des deux spirales suivantes ? (graphiques de la page 1')? Quelle est leur longueur ?

figure 1:La longueur de la spirale vaut $l = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, u_n est l' hypoténuse d' un triangle rectangle dont un des côtés a pour longueur $\frac{1}{n}$. On a donc $l > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ qui est une suite qui diverge vers l' infini.

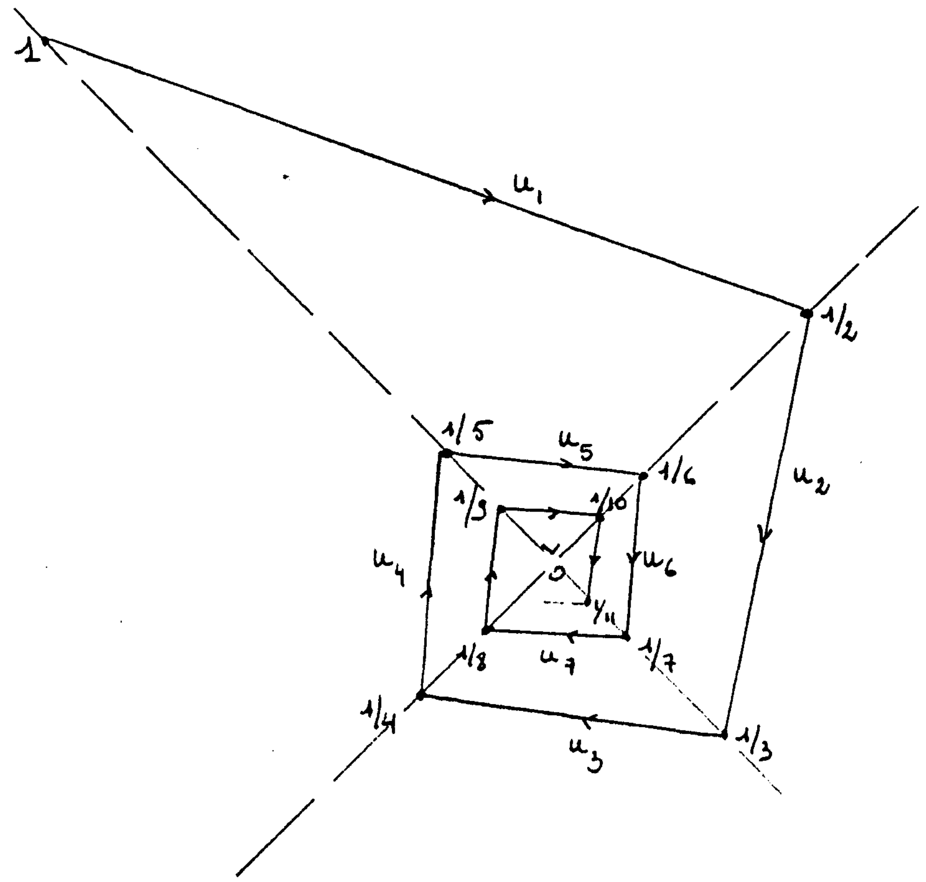


figure 1

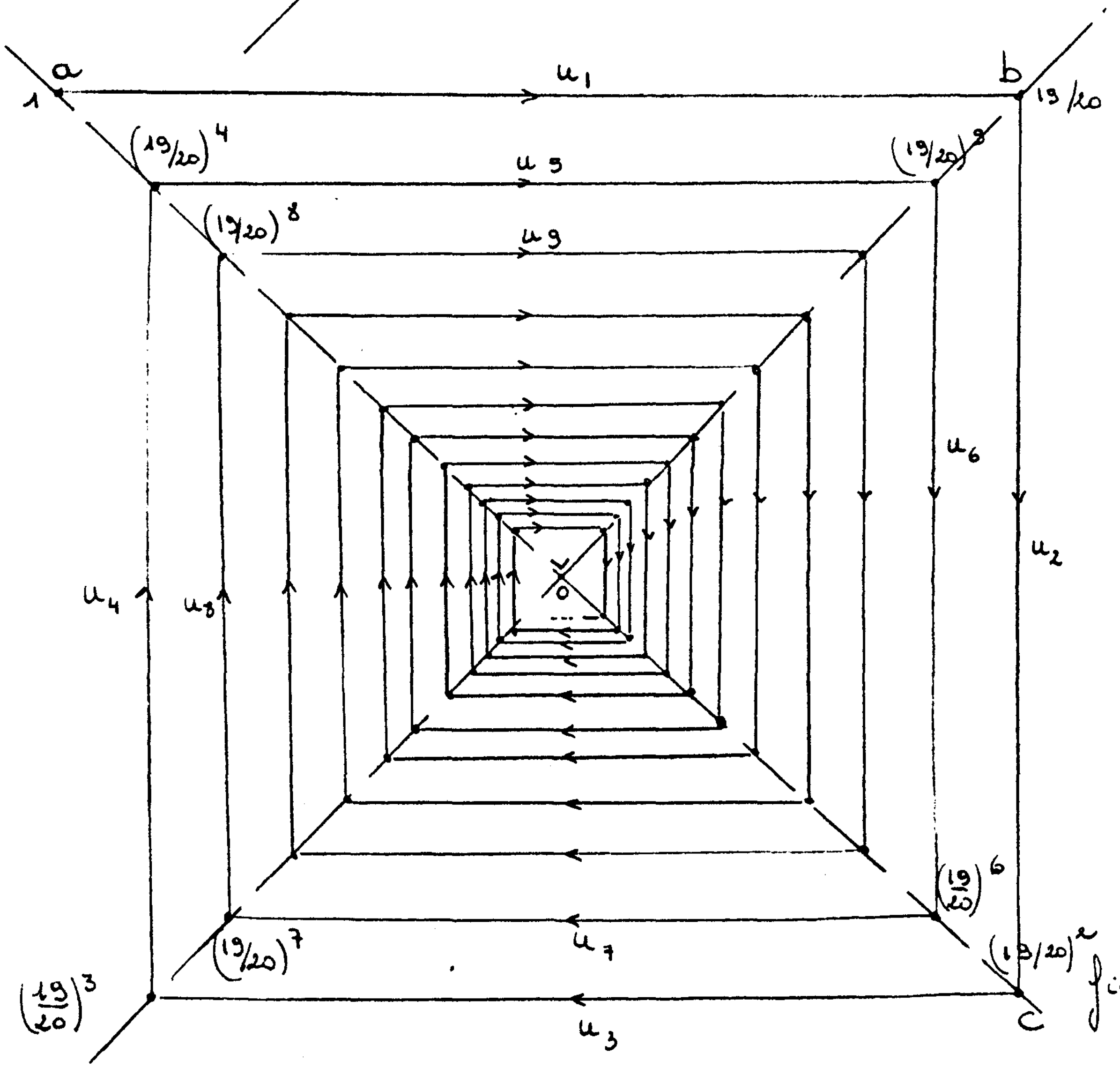


figure 2

La spirale a donc une longueur infinie.

figure 2: La longueur de la spirale vaut $l = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$. Le triangle aob étant semblable au triangle boc, on a $\frac{u_2}{u_1} = \frac{19}{20}$ ou $u_2 = \frac{19}{20}.u_1$. De même, $u_{i+1} = \frac{19}{20}.u_i$, $i \in \mathbb{N}_0$

On a donc

$$l = u_1 \, . \, \left(1 + \frac{19}{20} + \left(\frac{19}{20}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{19}{20}\right)^n + \ldots\right)$$

$$= u_1 \, . \, \frac{1}{1 - \frac{19}{20}}$$

$$= 20.u_1$$

Cette spirale a donc une longueur finie.

Exercices :

Etudier les séries suivantes ($n \in \mathbb{N}_0$)

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots.$
2. $a + a.q + a.q^2 + a.q^3 + \ldots + a.q^n + \ldots \qquad a,q \in \mathbb{R}$
3. $\{s_n\} = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_n\}$ où $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_n = \frac{1}{n.(n+1)}$
4. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$
5. $\{s_n\} = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_n\}$ où $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$
6. $\frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \ldots$

Series de puissances

$$a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots + a_n.x^n + \ldots \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

où $i,n \in \mathbb{N}$

Théorème : Si on définit le rayon de convergence, r , d' une série de puissances comme étant l' ensemble des valeurs réelles x pour lesquelles la série converge, on a

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

c' est à dire que la série converge pour tout $x \in (-r , r)$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème qui est hors de notre portée pour le moment.

Exemples:

1. $a + a.x + a.x^2 + \ldots + a.x^n + \ldots \quad (a \neq 0)$: $r = 1$
2. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$: $r = \infty$
3. $1 + 1!.x + 2!.x^2 + \ldots + n!.x^n + \ldots$: $r = 0$

Comment développer une fonction en une série de puissances ?

La formule de TAYLOR va nous permettre de répondre à cette question pour beaucoup de fonctions élémentaires.

Formule de Taylor

Si $y = f(x)$ est une fonction telle que $y, y', y'', \ldots, y^{\underline{n-1}}$ soient dérivables dans $[\, a, b\,]$ et $y^{\underline{n}}$ dérivable dans $(\, a,b\,)$ et continue en a et b, alors

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} . f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} . f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} . f^{\underline{n}}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} . f^{\underline{n+1}}(c)$$

où $c \in (\, a\, ,\, b\,)$

Démonstration

On définit le nombre r par la relation

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} . f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} . f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} . f^{\underline{n}}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} . r$$

Le théorème sera démontré si on parvient à établir qu'il existe un réel $c \in (\, a,\, b\,)$ pour lequel

$$r = f^{\underline{n+1}}(c)$$

On définit la fonction

$$g : [\, a\, ,\, b\,] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} . f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} . f''(x) - \ldots - \frac{(b-x)^n}{n!} . f^{\underline{n}}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} . r$$

$g(x)$ est dérivable et donc continue sur (a,b). Elle est continue en a et en b et de plus, $g(a) = g(b) = 0$. On peut appliquer le théorème de Rolle à cette fonction.

On obtient ainsi qu' il existe un réel $c \in (a\, ,\, b)$ pour lequel $g'(c) = 0$ (1)

$$\text{or } g'(x) = -f'(x) - \frac{b-x}{1!}\cdot f''(x) + f'(x)$$
$$- \frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f'''(x) + \frac{2.(b-x)}{2!}\cdot f''(x)$$
$$- \frac{(b-x)^3}{3!}\cdot f^{\underline{4}}(x) + \frac{3.(b-x)^2}{3!}\cdot f'''(x)$$
$$- \dots$$
$$- \frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{\underline{n+1}}(x) + \frac{n.(b-x)^{n-1}}{n!}\cdot f^{\underline{n}}(x)$$
$$+ \frac{(n+1).(b-x)^n}{(n+1)!}\cdot r$$

$$\text{ou } g'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\cdot r - \frac{(b-x)^n}{n!}\cdot f^{\underline{n+1}}(x)$$
$$= \frac{(b-x)^n}{n!}\cdot \left(r - f^{\underline{n+1}}(x)\right)$$

Vu (1), il existe un réel $c \in (a,b)$ pour lequel $g'(c) = 0$ donc pour lequel $r = f^{\underline{n+1}}(c)$

C.Q.F.D.

Si dans la formule de TAYLOR, on prend $b = x$ et $a = 0$, on obtient la

Formule de Mac - Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}.f'(0) + \frac{x^2}{2!}.f''(0) + \frac{x^3}{3!}.f^{\underline{3}}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}.f^{\underline{n}}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^{\underline{n+1}}(\theta) \qquad \text{où } \theta \in (0\ ,\ x)$$

Si n tend vers l' infini, cette formule donne le développement en série de puissances de la fonction $y = f(x)$ mais cette formule n' est valable que dans le rayon de convergence de série car alors $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{\underline{n+1}}(\theta)$ tend vers 0 si n tend vers l' infini.

<u>Exercices :</u>

Développer en séries de puissances les fonctions suivantes :

a) sin x

b) cos x

c) arcsin x

d) $\dfrac{1}{1 - x}$

e) $\cos^2 x$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

g) $(1 + x)^m$ où $m \in \mathbb{R}$. En déduire le développement de

$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et de $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Il est à noter que si $m \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme de Newton.

h) $\operatorname{arctg} x$

de nos jours, on pose

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cette formule d'Euler fut découverte en partant des séries de Mac Laurin

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

– $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Euler n'hésitait pas à remplacer x par ix dans e^x d'où il tirait

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \cos x + i \sin x$$

– Il obtient la célèbre formule $e^{i\pi} = -1$

– Dans le plan de Gauss $\mathbb{C}$, la rotation de centre O et d'angle x applique $z \in \mathbb{C}$ sur $e^{ix} \cdot z$.