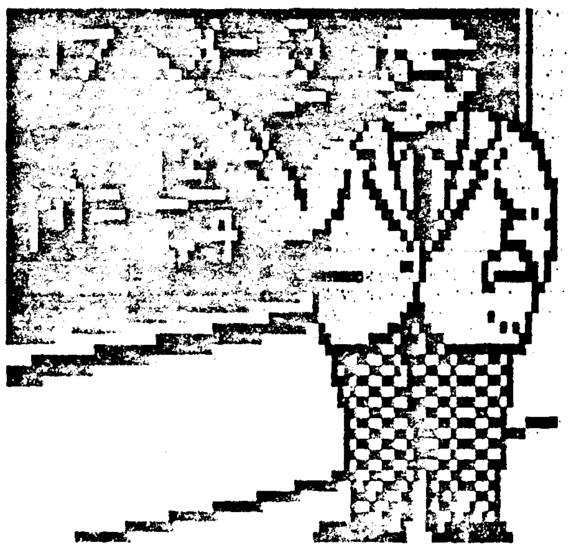
8

Fonctions exponentielles et logarithmiques



LIMITES : Rappels et compléments

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Exemple :

Soit $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 8$ alors que $f(2) = 0$

Cas d' indétermination :

$\frac{0}{0}$: Règle de l' Hospital (si après 2 ou 3 dérivations, on semble tourner en rond, il vaut mieux chercher une autre méthode.)
S' il n' y a pas de radicaux : factoriser le numérateur et le dénominateur, simplifier.
S' il y a des radicaux, multiplier numérateur et dénominateur par le polynôme conjugué et ensuite simplifier.

$\frac{\infty}{\infty}$: Règle de l' Hospital (même remarque que ci-dessus)
Mettre au numérateur et au dénominateur la plus grande puissance de x en évidence et puis simplifier

$\infty - \infty$: Réduire les fractions au même dénominateur, puis simplifier
Multiplier et diviser par les polynômes conjugués et puis simplifier.

$0.\infty$: Transformer l' expression en un quotient et se ramener à un des cas précédents.

0^0, ∞^∞, 1^∞, 0^∞, ∞^0 : Utiliser les logarithmes.

Limites bien connues : $\lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

$\lim_{\infty} e^{-x}.P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynôme de degré quelconque

Exemples :

$\frac{0}{0}$: 1) $\lim\limits_{1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{1} \frac{(3x^2 - x - 2)(x - 1)}{3(x - 1)^2}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & & 3 & -1 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

numérateur et dénominateur sont **certainement** divisibles par (x − 1)

$$= \lim_{1} \frac{3x^2 - x - 2}{3(x - 1)} = \frac{0}{0} = \lim_{1} \frac{(3x + 2)(x - 1)}{3(x - 1)} = \lim_{1} \frac{3x + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

OU

$$\lim_{1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{0}{0} \underset{H}{=} \lim_{1} \frac{9x^2 - 8x - 1}{6x - 6} = \frac{0}{0}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{1} \frac{18x - 8}{6} = \frac{5}{3}$$

2) $\lim\limits_{-1} \frac{4 - \sqrt{x + 17}}{\sqrt{x + 1}} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{-1} \frac{16 - x - 17}{\sqrt{x + 1}.(4 + \sqrt{x + 17})} =$

$$\lim_{-1} \frac{-\sqrt{x + 1}}{4 + \sqrt{x + 17}\,)} = \frac{0}{8} = 0$$

$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 7x}}{2x + 4} = \lim\limits_{\pm\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

la règle du "plus haut dénominateur" n' est valable que si x tend vers $\pm\infty$!

$\infty - \infty$: $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1}\right)$

$$= \lim_{\pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 1 - x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}} = \lim_{\pm\infty} \frac{3x}{|x| + |x|} = \pm\frac{3}{2}$$

$0.\infty$: $\lim\limits_{-1} (x + 1) \ln(8 + 8x + x^2 + x^3) = 0.\infty$

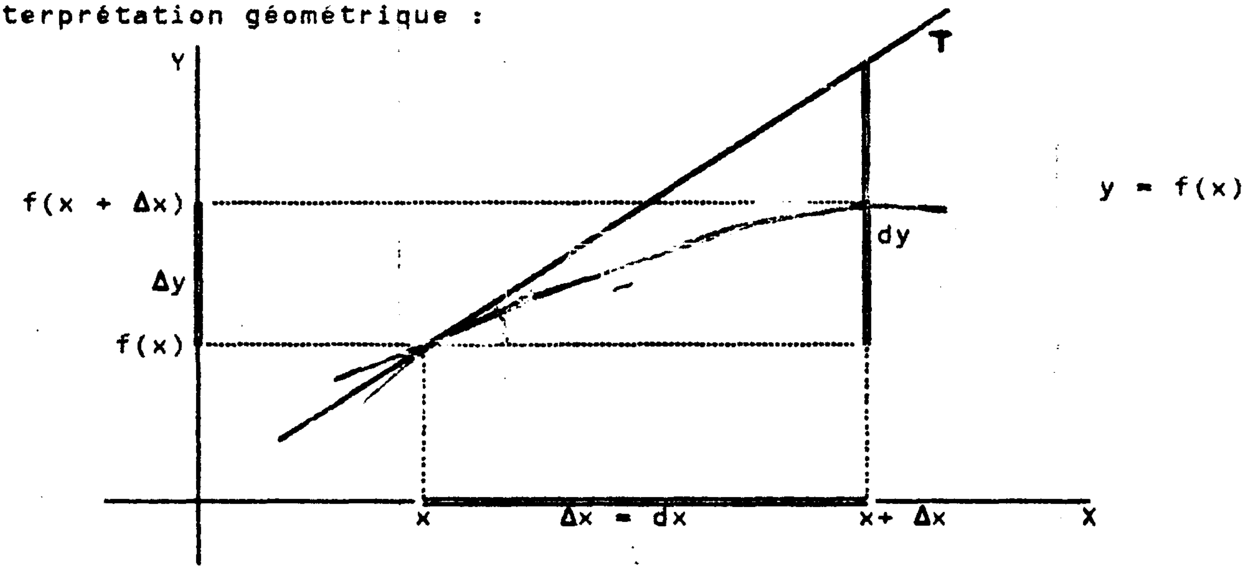
$$= \lim_{-1} \frac{\ln(8 + 8x + x^2 + x^3)}{\frac{1}{x + 1}} = \frac{\infty}{\infty} \underset{H}{=} \lim_{-1} \frac{\frac{8 + 2x + 3x^2}{8 + 8x + x^2 + x^3}}{\frac{-1}{(x + 1)^2}} = \ldots = 0$$

DERIVEE : rappel

Soit $y = f(x)$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interprétation géométrique :



Soit $x = x_0$, $f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ est égal au coefficient angulaire de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d' abscisse $x = x_0$.

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha$$

Remarques :

- Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point, la réciproque n' est pas vraie.
- Le fait que la dérivée première soit nulle en un point n' implique pas que ce point corresponde à un extremum !

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

1. Nous avons vu que a^b est défini pour tout $a \in \mathbb{R}_0^+$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$
   Nous admettons que $0 < a_1 < a_2 \Rightarrow a_1^b < a_2^b$, $\forall\, b \in \mathbb{R}_0^+$

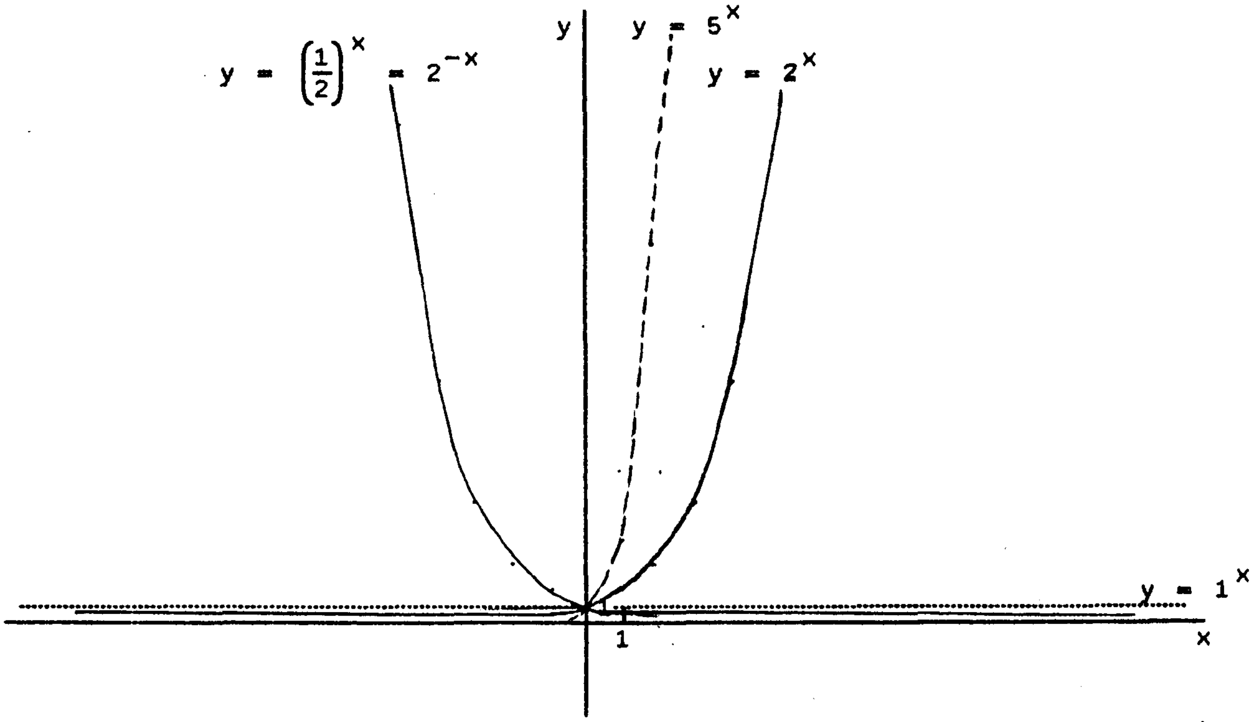
   et que $0 < b_1 < b_2 \Rightarrow a^{b_1} < a^{b_2}$

   Fixons a et considérons la fonction **exponentielle de base a**:

$$\boxed{f : x \rightarrow a^x \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_0^+}$$

   Nous admettons que cette fonction est continue.

2. Le cas **a = 1** est manifestement spécial, $a^x = 1^x = 1$ pour tout x et la fonction est constante.
3. Si **a > 1** , la fonction est croissante et positive.
   De plus $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
4. Si **0 < a < 1**, la fonction est décroissante et positive.
   De plus $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
   On remarque qu'étudier la fonction $y = a^x$ où $0 < a < 1$ revient à étudier la fonction $y = b^{-x}$ où $b = a^{-1} > 1$. A titre d' exemple, étudier $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ revient à étudier $y = 2^{-x}$.

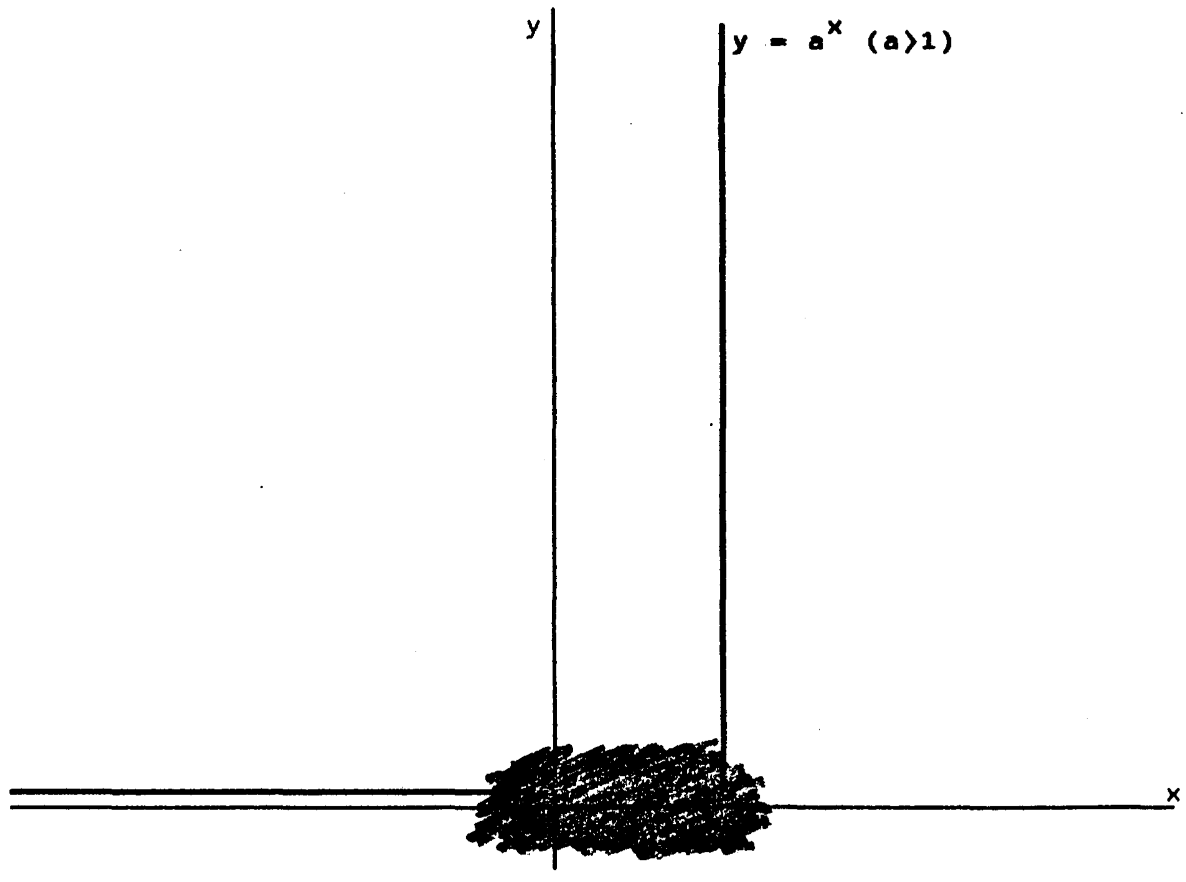


Toutes ces courbes passent par le point (0 , 1)

Problèmes:

1. On prend une feuille de papier de 0,1 mm = 10^{-4} m d' épaisseur que l' on suppose "infiniment" grande. On la déchire en deux et on superpose les deux demi-feuilles obtenues. On déchire le paquet ainsi obtenu et on superpose à nouveau les deux paquets. On recommence l' opération 50 fois. Quelle hauteur aura la liasse finale ?
2. Un sultan offre une récompense au choix à un sage. Celui-ci décide de recevoir du blé de la manière suivante: Sur la première case d' un échiquier de jeu d' échec, on pose un grain de blé. Sur les cases suivantes, on double chaque fois le contenu de la case précédente. Le sultan surpris est content de s' en tirer à si bon compte. A-t-il raison ?
3. Comparer la croissance de x^{2000} et de $(1,0001)^x$.

Si l' échelle sur l' axe des ordonnées est réduite fortement et si le graphique est suffisamment étendu, l' allure de $y = a^x$ $(a > 1)$ est voisine de ceci:



Comment déterminer la dérivée de a^x ?

Si $y = a^x$, on a $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \qquad (1)$$

Prenons le cas où $a = e$. On sait que
$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$
et il est naturel d' admettre que
$$e = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \Delta x \right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

ou encore $$\lim_{\Delta x \to 0} e^{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

De (1) on déduit

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

et $$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} . u'(x)}$$

Le calcul de $(a^x)'$ se fera bientôt ...

Développement en série de e^x

L' application de la formule de Mac-Laurin nous livre
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

et que $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$ (voir chapitre " Les Complexes ")

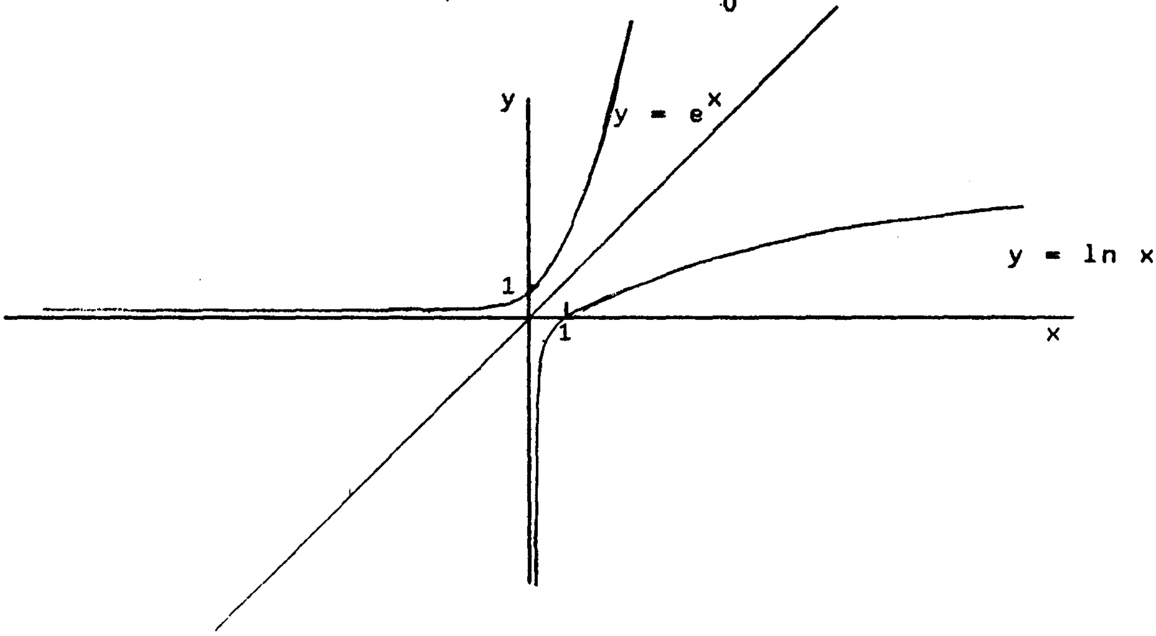
Exercice : Etudier $y = k.e^{\alpha x + \beta} + c$ où $k, \alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$

Logarithme népérien

On admet que $y = e^x$ prend toute valeur dans $\mathbb{R}_0^+$ et dès lors, la symétrie par rapport à la droite d' équation $y = x$ (en base orthonormée) montre qu' il existe une fonction inverse qu' on appelle **logarithme népérien ou naturel.**

$$\boxed{y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y}$$

Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$.



On a

$\boxed{\ln 1 = 0}$ car $e^0 = 1$

$\boxed{\ln e = 1}$ car $e^1 = e$

$\boxed{\ln (a.b) = \ln a + \ln b}$ où $a, b \in \mathbb{R}_0^+$

en effet, si $\ln a = p$ alors $a = e^p$

si $\ln b = q$ alors $b = e^q$

donc $e^{p+q} = a.b$ et $\ln(a.b) = p + q = \ln a + \ln b$.

$\boxed{\ln a^m = m \, . \ln a}$ où $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $m \in \mathbb{R}$

en effet, si $\ln a = p$ alors $a = e^p$

si $\ln a^m = q$ alors $a^m = e^q = (e^p)^m$

donc $q = p.m$ et $\ln a^m = m.\ln a$

$\boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$ où $a, b \in \mathbb{R}_0^+$

en effet, si $\ln a = p$ alors $a = e^p$

si $\ln b = q$ alors $b = e^q$

donc $e^{p-q} = \frac{a}{b}$ et $\ln\frac{a}{b} = p - q = \ln a - \ln b$.

$\boxed{e^{\ln x} = x}$ où $x \in \mathbb{R}_0^+$

Quelle est la dérivée de $y = \ln x$?

On a $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$, donc $x' = (e^y)'$

ou $1 = e^y . y'$

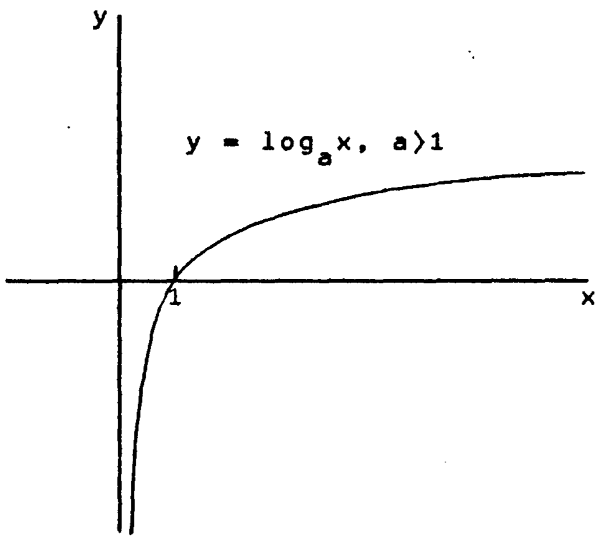
et $y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

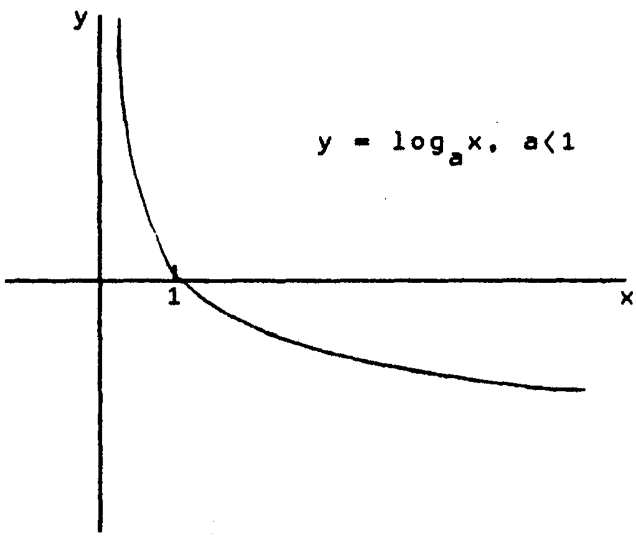
$$\boxed{\begin{array}{l} (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \\ (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad u(x) > 0 \end{array}}$$

Logarithme de base a, $a \in \mathbb{R}_{0,1}^+$

$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$ où $x \in \mathbb{R}_0^+$

Le logarithme d' un nombre réel strictement positif est l' exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base pour obtenir le nombre.





On démontre de la même manière qu' en page 4 que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{R}$

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^m = m.\log_a x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^p = p$$

$$a^{\log_a p} = p$$

Passage d' un logarithme de base b à un logarithme de base a

Si $a > 0$, $\quad a^{\log_a x} = x$

et $\quad \log_b (a^{\log_a x}) = \log_b x$

ou $\quad \log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$

Donc $\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \text{où } a, b, x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ et } a, b \neq 1}$

et en particulier

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

et $\quad \boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Quelle est la dérivée de $y = \log_a x$?

Comme $\log_a x = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \ln x$, on a

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a \cdot x} = \dfrac{\log_a e}{x} & \text{pour tout } x, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1 \\ \left(\log_a(u(x)) \right)' = \dfrac{u'(x)}{\ln a \cdot u(x)} = \dfrac{u'(x) \cdot \log_a e}{u(x)} & u(x) > 0, a \neq 1 \end{array}}$$

Quelle est la dérivée de $y = a^x$? ($a \in \mathbb{R}^+_{0,1}$)

Comme $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$

On obtient en dérivant les deux membres

$$1 = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{y'}{y} \quad \text{ou } y' = y \cdot \ln a$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} (a^x)' = a^x \cdot \ln a & \text{où } a \in \mathbb{R}^+_{0,1} \text{ et } x \in \mathbb{R}^+_0 \\ \left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a & \text{où } u(x) > 0 \end{array}}$$

Et la fonction $y = x^x$?

Nous connaissons maintenant l' aspect des fonctions

$$y = x^a \text{ et } y = a^x \qquad \text{où } x,\ y \in \mathbb{R}^+_0$$

Quel est l' aspect de la fonction $y = x^x$ où $x \in \mathbb{R}^+_0$?

On a $\quad y = x^x \Leftrightarrow \ln y = x \cdot \ln x$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$\Leftrightarrow y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

y' s'annule en $x = e^{-1}$, est positive si $x > e^{-1}$ et est négative si $x < e^{-1}$

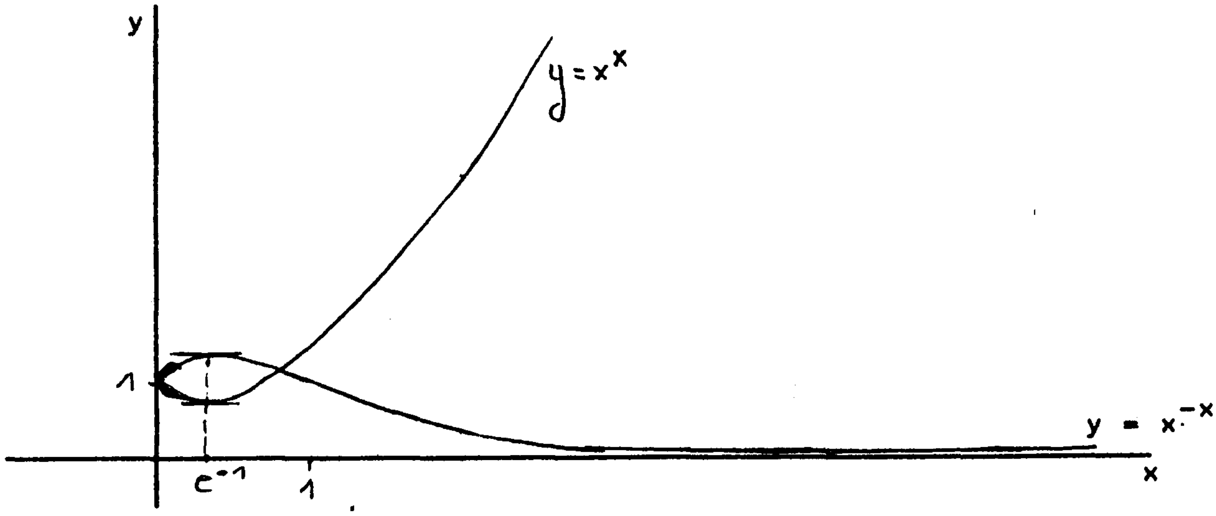
De plus $\lim\limits_{x\to\infty} x^x = \infty$.

Que vaut $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$? $\qquad$ Soit $a = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$$\ln a = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^x\right) = \lim_{x\to 0^+}(\ln x^x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Il s' en suit que $a = \lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$



Exercices :

1. Calculer a) $\log_{a^2} b \cdot \log_{\sqrt{b}} a^3$

b) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$

c) $(10^2)^{\log_{10} 3x}$

d) $e^{2\ln 5}$

e) $2 \cdot e^{-\ln 3x}$

f) $\log_{10} 1$

g) $\log_{10} (-10)$

2. Comparer a) $\log_a x$ et $\log_{\frac{1}{a}} x$

b) $\log_a x$ et $\log_{a^2} x$

c) $\log_3 7$ et $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$

3. Démontrer a) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$

b) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

4. Ecrire sous forme plus simple

$$e^{\ln x} + e^{-\ln x} + 2.\ln e^x$$

5. Résoudre:

1) $2^{\sqrt{x}} = 16$
2) $3^{2x+1} + 9^x = 324$
3) $2^{x-1} + 2^{1-x} = 2$
4) $16^x - 7.4^x = 8$
5) $(a - 3)^x = a - 5$ où $a \in \mathbb{R}$
6) $\log_x 5 = 0,5$
7) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
8) $3^{3^x} = 3$

9) $\left(3^{3}\right) = 3$

10. $\log_x 2 = -2$

11. $\log_x \sqrt{3} = 3$

12. $3{,}45 = 4^{x^2-1}$

13. $\log_{10}(x + 3) + \log_{10}3 = \log_{10}12$

14. $2.\log_{10}x = \log_{10}16$

15. $2.\log_{10}x = 16$

16. $(\ln x)^2 = \ln\dfrac{x^3}{e^2}$

17. $2.\ln(x - 1) + \ln(6x + 9) = 2.\ln(2x + 3)$

18. $4^x + 16 = 2^{x+3}$

19. $\begin{cases} 5^x = 3y \\ 9^x = 5y \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5^{3x} = 25^{y-1} \\ 5^y = 3^{x+1} \end{cases}$

22. $\log_3(3^x + 1) = -x - 2 + \log_3 4$

23. $\log_2(2^x - 1) + x = \log_4 144$

24. $2.\ln^4 x + \ln^3 x - 9.\ln^2 x - 4.\ln x + 4 = 0$

25. $2.e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 16}$

26. $\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \dfrac{3}{2} \\ \ln xy = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} y.\log x = x.\log y \\ x^2 = y^3 \end{cases}$

28. $e^x + e^{-x} = 2a \quad$ où $a \in \mathbb{R}$

29. $\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} \,.\, 2^{\frac{1}{y}} = 32 \\ 2^x \,.\, 2^y = \sqrt[6]{32} \end{cases}$

30. $(\ln x)^3 - 3.\ln x + 2 = 0$

31. $5.e^{3x} + 14.e^{2x} - 5.e^{2x+1} - 3.e^x - 14.e^{x+1} + 3e = 0$

32. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x} - 7.4^{-x} + 6 = 0$

33. $4^{x^2} = 2^{5x-2}$

34. $9^x - 2.3^{x+1} = 27$

35. $2.\ln 2 + \ln(x^2 - 1) = \ln(4x - 1)$

36. $\begin{cases} x + y = e.(e + 1) \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

37. $(2^x - 5).2^{x-3} = 3$

38. $\log_x (x^2 + 2x - 3) . \log_{x+3} x - \log_{x+3} x^{\frac{1}{\log_3 x}} = \log_x x$

39. $4\ln x = \ln(x^2 - 2) + \ln 8$

40. $2\log_4(x + 1) + \log_4(x + 3) = \log_4(6x + 2) + \frac{1}{2}$

41. $\begin{cases} 2^x = 16y \\ 5^x = 625y \end{cases}$

42. $e^{3x+1} - 2.\sqrt{e^{4x+2}} + e^{x+1} = 0$

43. $\log_a (\log_a a^x + a^{\log_a x}) = 1 + \log_a x$

44. $\log_2 (2^x - 5)^{\log_3 2} + \log_3 2^{x-3} = 1$

45. $e^{2x} - (a + 1).e^x + 2a + 2 = 0$ où $a \in \mathbb{R}$

46. $4^x - 3^{x + \frac{1}{2}} = 3^{x - \frac{1}{2}} - 2^{2x}$

47. $\log_2 x > \log_8(3x - 2)$

48. $\begin{cases} xy = a^2 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{20}{9} . \ln^2 a \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

49. $\begin{cases} \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[3]{y} = \frac{1}{3} \\ 2.\log x + 3.\log y = 2 + \log 2,5 \end{cases}$

50. $(\log_5 x)^2 + 5^{\log_5 30 - \log_5 3} = \log_5 x^6 + 26$

6. A l' achat, une machine coûte 130 000 F. En fin de chaque année, elle est dépréciée de 20 % de sa valeur au début de l' année.
   a) Calculer la valeur de la machine après un an.
   b) Calculer la valeur de la machine après n années.
   c) A 6 mois près, calculer l' âge de la machine si elle est estimée à 50 000 F.

7. On considère qu' une voiture de 700 000 F à l' achat perd 35 % de sa valeur à la fin de la première année. Ensuite, en fin de chaque année elle est dépréciée de 10 % de la valeur qu' elle avait encore au début de l' année.
   a) Calculer la valeur de la voiture après n années.
   b) A 6 mois près, calculer l' âge de la voiture si elle est estimée à 300 000 F .

8. Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes:

   a) $y = \sqrt{\ln 9.(7 - x - x^2)}$

   b) $y = \ln \sin x$

   c) $y = \arcsin \operatorname{tg} x$

   d) $y = \sqrt{1 - \log_2 (3 + 2x - x^2)}$

   e) $y = \ln \left(\ln \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right) \qquad 0 \leq x \leq \pi$

9. Classer les fontions suivantes par ordre de grandeur croissante pour x très grand :

   $\log_2 x,\ \log_{\frac{1}{2}} x,\ \sqrt{x}\ ,\ x^2,\ 2^x,\ 2^{-x},\ e^{-x},\ e^x,\ e^{\sqrt{x}}\ ,\ e^{x^2}$

10. Calculer

   $\log_{10} \operatorname{tg}1^\circ + \log_{10} \operatorname{tg}2^\circ + \log_{10} \operatorname{tg}3^\circ + \log_{10} \operatorname{tg}4^\circ + \ldots +$
   $\log_{10} \operatorname{tg}87^\circ + \log_{10} \operatorname{tg}88^\circ + \log_{10} \operatorname{tg}89^\circ$

11. Dans un repère orthonormé, on donne les fonctions

   $$f(x):\ y = e^x \quad \text{et} \quad g(x):\ y = e^{-x}$$

   Les tangentes T et T' au point d' abscisse a de f et de g coupent respectivement l' axe X en t et t'.
   Calculer a) l' angle entre T et T'
   b) la distance entre t et t'.

. Associer un graphique à chaque fonction :

a) $y = \dfrac{x - 4}{x^2}$

d) $y = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

g) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

b) $y = e^x$

e) $y = \ln \dfrac{1}{x}$

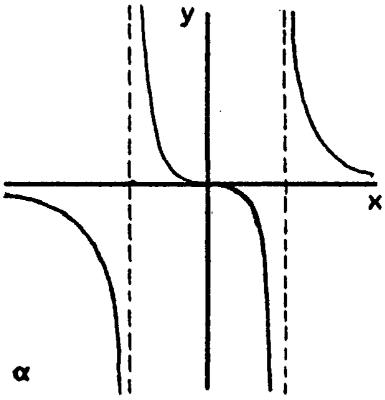
h) $y = - e^x$

c) $y = e^{-x^2}$

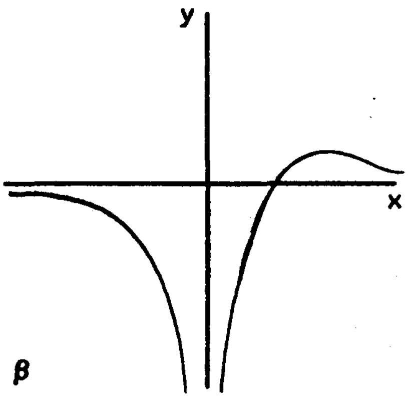
f) $y = \ln x^2$

i) $y = \ln x$

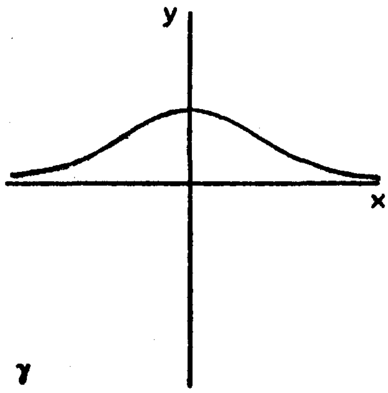
j) $y = e^{-x}$



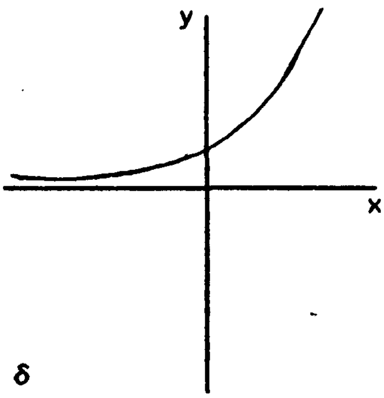
α



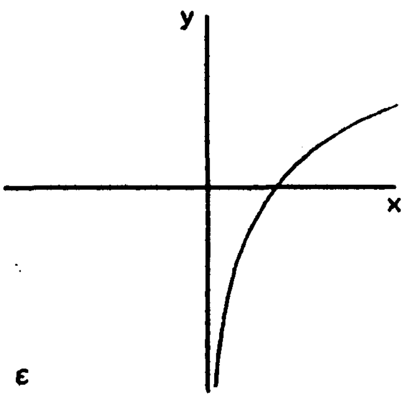
β



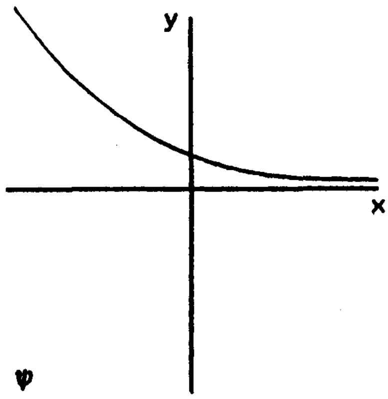
γ



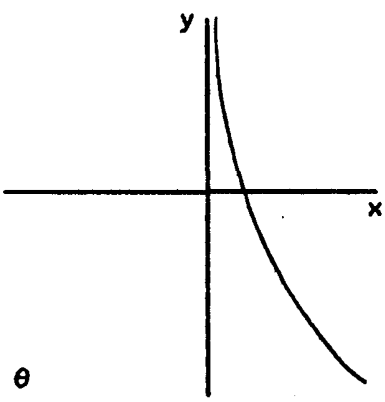
δ



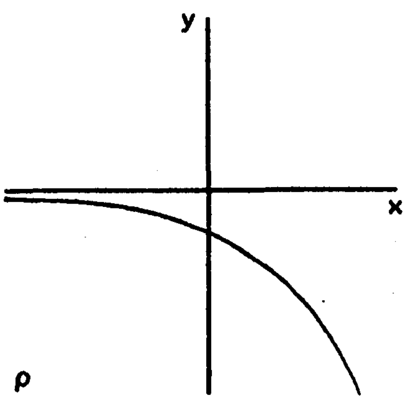
ε



ψ



θ



ρ

13. Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$ où $a \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{ax + b} \right)^{\frac{1}{x}}$ où $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$

d $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{ax + b}{cx + b} \right)^{\frac{1}{x}}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}_0$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \log_a (1 + 5x)^{\frac{1}{x}}$ où $a \in \mathbb{R}^+_{0,1}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (1 + \sin x)}{\operatorname{tg} x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 1}{x} \right)^{\frac{x}{2}}$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+2}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{x}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2.(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$

p) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{x}.\sin x$

14. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $y = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

b) $y = e^{\sin x}$

c) $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

d) $y = \ln \dfrac{1 + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{cotg} \frac{x}{2}}$

e) $y = \ln \ln x$

f) $y = e^{x^2}$

g) $y = x^x$

h) $y = x^{\ln \ln \ln x}$

i) $y = x^{\sin x}$

j) $y = \sin x^x$

k) $y = \ln \sqrt{\sin 2x}$

l) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

m) $y = \operatorname{tg} a^{x^2}$

n) $y = a^{\sqrt{x}}$

o) $y = x.\operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$

p) $y = \log_x (2 - x)$

q) $y = \ln \left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x} \right)$

r) $y = \frac{1}{4}.x.(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}.a^2.x.(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}.a^4.\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

s) $y = \dfrac{\sin x}{4.\cos^4 x} + \dfrac{3.\sin x}{8.\cos^2 x} + \dfrac{3}{8}.\ln\left[2.\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) \right]$

t) $y = x^5.\ln (x^2 + a^2) - \frac{2}{5}.x^5 + \frac{2}{3}.a^2.x^3 - 2.a^4.x + 2.a^5.\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

u) $y = -\dfrac{1}{x^3}.\arccos\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{8x^2} + \dfrac{1}{16}.\ln \dfrac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}$

v) $y = (x^4 - \frac{3}{8}.a^4).\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{x^3.\sqrt{x^2 + a^2}}{4} +$

$\frac{3}{8}.a^2.x.\sqrt{x^2 + a^2}$

w) $y = \frac{-a^2.(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3.x^3} - \frac{2.a^2.\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \frac{x.\sqrt{x^2 + a^2}}{2} +$

$\frac{5}{2}.a^2.\ln(\ x + \sqrt{x^2 + a^2}\ )$

x) $y = \frac{2}{5}.x^5.\ln\sqrt{\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}} + \frac{4}{15}.a^2.x^3 +$

$\frac{a^5}{5}.\left(2.\text{arctg}\ \frac{x}{a} - \frac{1}{2}.\ \ln\ \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^2\right)$

y) $y = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.A$

où $A = \left(\ln\left|\frac{a.[\ (b - a).\text{tg}\ \frac{x}{2} + \sqrt{b^2 - a^2}\ ]}{(b - a).\text{tg}\ \frac{x}{2} - \sqrt{b^2 - a^2}}\right| +\right.$

$\left.\ln\left|\frac{b.[\ (b + a).\text{tg}\ \frac{x}{2} - \sqrt{b^2 - a^2}\ ]}{(b + a).\text{tg}\ \frac{x}{2} + \sqrt{b^2 - a^2}}\right|\right)$

15.Résoudre $(2 - m).e^{2x} + 2.(m + 1).e^x - m - 4 = 0$ où $m \in \mathbb{R}$

16.Vrai ou faux ?

a) $y = e^{\frac{-1}{|x|}}$ est non dérivable en $x = 0$

b) Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont discontinues pour $x = x_0$,
alors $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ est discontinue pour $x = x_0$

c) Si $y_1(x) > y_2(x)$, alors $y_1'(x) > y_2'(x)$

d) Si $y = f(x)$ est une fonction continue sur [a, b] et

$f(a).f(b) < 0$, alors $f(x)$ possède nécessairement un seul zéro sur [a , b]

16. Etudier les fonctions suivantes :

1) $y = e^{-tg^2 x}$

2) $y = sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

3) $y = ch\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

4) $y = th\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

5) $y = coth\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

6) $y = x.e^{-\frac{x}{2}}$

7) $y = \ln |\ \ln|x|\ |$

8) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$

9) $y = e^{-x^2}$

10) $y = (\ x^2 + \frac{1}{4}\ ).e^{-2x^2}$

11) $y = \dfrac{\ln x}{x - 1}$

12) $y = \ln \frac{1}{x}$

13) $y = x.\ln(\ x^2 - 2)$

14) $y = \dfrac{1}{x.\ln x}$

15) $y = \dfrac{x + 1}{x + 3}.e^{-x}$

16) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

17) $y = x^2.e^{-x^2}$

18) $y = |\ e^{2x} - e^x\ | - 2$

19) $y = \dfrac{(x - 1).e^{\frac{1}{x}}}{x}$

20) $y = e^{-tg^2x - \frac{1}{4}.\cos x}$

21) $y = \ln\left(e^x + \frac{1}{16}.e^{-x} \right)$

22) $y = (x + 2).e^{\frac{1}{x}}$

23) $y = \frac{e^x}{x}$

24) $y = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

25) $y = \ln x + \frac{1}{\ln x}$

26) $y = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$

27) $y = x.e^{-x}$

28) $y = \ln | x^2 - 4x + 1 |$

29) $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \frac{1}{x^2 + 1}$

30) $y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

31) $y = \cos 2x \cdot e^{- \frac{2}{3}.\sin 2x}$

32) $y = \sin \left(\frac{\pi}{4}.\ln(e^x + e^{-x}) \right)$

33) $y = tgx \cdot e^{- \frac{2}{3.\sin x}}$

34) $y = \sin [\pi \cdot \ln(1 + e^x)]$

35) $y = e^{\sin x} + e^2.e^{-\sin x}$

36) $y = x \cdot \left(\ln x^2 - 2 \right)$

37) $y = (x^2 - 1) \cdot \ln \frac{1 + x}{1 - x}$

34) $y = \frac{2}{x} - \ln \frac{x + 2}{x}$

17. <u>Une application parmi tant d' autres en physique</u> :

La décharge d ' un condensateur est donnée par la loi

$$q = q_0 . e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (1)$$

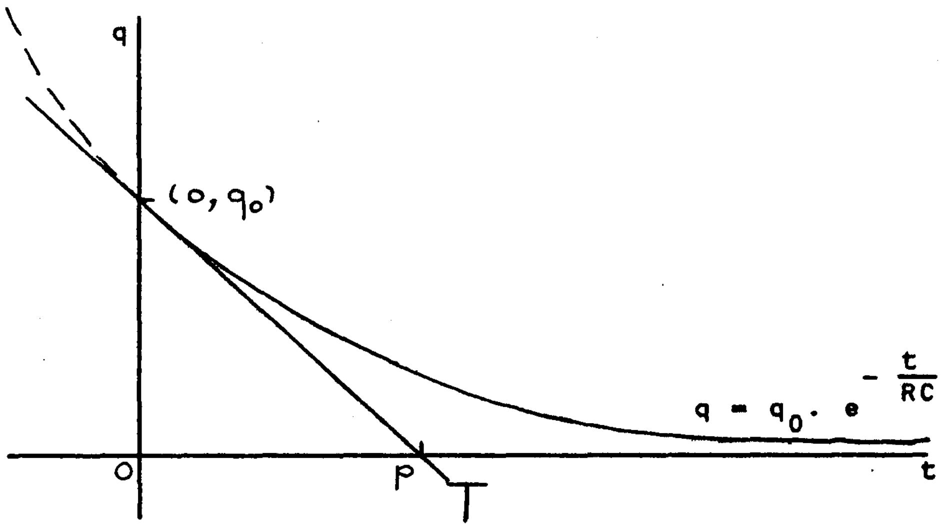
où q est la charge à l' instant t

q_0 est la charge à l' instant 0

t est le temps

R est la résistance du circuit

C est la capacité du condensateur



Quelle est l' équation de la tangente à l' origine de cette courbe ?

$$(1) \text{ nous livre } q'_{t=0} = \left(- \frac{q_0}{RC} . e^{-\frac{t}{RC}} \right)_{t=0} = - \frac{q_0}{RC}$$

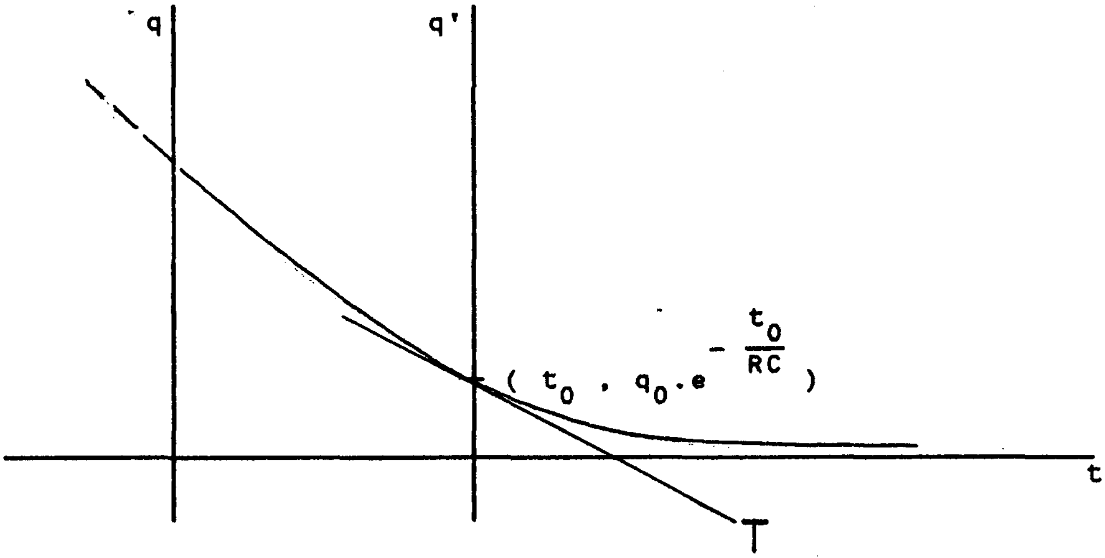
La tangente a donc pour équation

$$T : q - q_0 = - \frac{q_0}{RC} . t$$

Les coordonnées de l' intersection de cette tangente avec l' axe t sont p (RC,0).La quantité RC peut donc se mesurer sur le graphique ci-dessus

$$RC = | op |$$

Si nous effectuons un changement d' axes en décidant par exemple; de faire passer le nouvel axe q par un point expérimental fiable où pouvons-nous lire RC sur le graphique ?



Dans les axes (t,q), la courbe a pour équation

$$q = q_0 . e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dans les axes (t,q'), le point qui avait pour coordonnées $(t_0 , q_0 . e^{-\frac{t_0}{RC}})$ a pour nouvelles coordonnées $(0 , q_0 . e^{-\frac{t_0}{RC}})$ et la courbe a pour équation

$$q' = q_0 . e^{-\frac{(t + t_0)}{RC}}$$

La tangente à l' origine de la courbe a cette fois pour équation

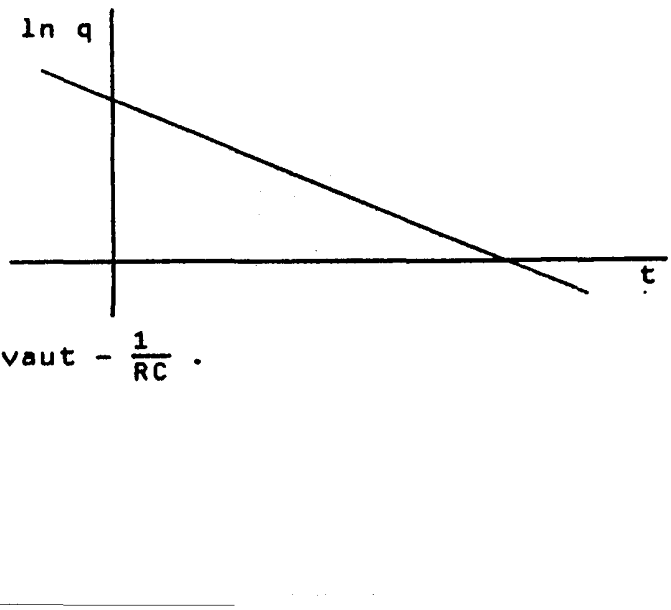
$$T : q - q_0 . e^{-\frac{t_0}{RC}} = - \frac{q_0}{RC} . e^{-\frac{t_0}{RC}} . t$$

et le point d' intersection de T avec l' axe t a toujours pour coordonnées (RC,0) !

Si nous passons maintenant dans des axes semi-logaritmiques, on obtient

$$q = q_0 . e^{-\frac{t_0}{RC}} . e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\ln q = - \frac{t}{RC} + \ln \left(q_0 . e^{-\frac{t_0}{RC}} \right)$$



et la pente de la droite obtenue vaut $- \frac{1}{RC}$.

18. Etudier les fonctions suivantes où $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $y = (\lambda + x^2) \cdot e^{-2x^2}$

2) $y = \ln(e^x + \lambda^2 e^{-x})$

3) $y = \dfrac{e^{-x^2\lambda}}{1 - x}$

4) $y = \dfrac{e^x + \lambda}{e^x + 1}$

5) $y = e^{-\operatorname{tg}^2 x - \frac{\lambda^3}{4}\cos x}$

6) $y = e^{\sin x} + \lambda . e^{-\sin x}$

7) $y = \sin x \cdot e^{-\lambda \sin x}$

8) $y = \dfrac{e - \lambda x^2}{1 - x^2}$

9) $y = \sin^3 x + (1 - 2\lambda).\cos^3 x + \lambda.\cos x$

10) $y = \dfrac{1}{\lambda + \sin x + \cos x}$

11) $y = \ln \dfrac{\lambda + \sin x}{\lambda - \sin x}$

12) $y = \dfrac{\lambda^2 x^2 + 1}{x + 1} \cdot e^{\operatorname{arctg} \lambda x}$

13) $y = \operatorname{tg} x \cdot e^{-\frac{\lambda}{\sin x}}$

14) $y = -\lambda . e^{-2x^2} + 2x + \lambda + e^{\lambda.(-2x^2 + 2x)}$

15) $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \cdot e^{\lambda x}$

16) $y = \dfrac{e^{-\lambda x^2}}{1 - x^2}$

17) $y = (\operatorname{tg} x + \lambda) . e^{-\operatorname{tg}^2 x}$

18) $y = \dfrac{e^{\sin x} - \lambda.e^{\cos x}}{e^{\sin x} + \lambda.e^{\cos x}}$

19) $y = \ln \dfrac{\sin x + \cos x + 2}{\sin x + \lambda}$

20) $y = \sin^2 x - 2.\lambda.\cos x$

21) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\lambda - \sin x}$

22) $y = (\lambda + \mathrm{tg}x).e^{- \lambda.\mathrm{tg}x}$

23) $y = \ln \dfrac{e^x + 3.e^{-x}}{e^x + \lambda}$

24) $y = (x^2 + \lambda) \;.\; e^{\frac{1}{1 - x^2}}$

25) $y = \dfrac{\sin^3 x}{\lambda - \cos x}$

26) $y = \dfrac{\lambda - \sin x}{\lambda - \cos x}$

Mathématique & Pédagogie n°81, 17–33, 1991

Yatzy est le nom d'un jeu de hasard

Dirk DE BOCK et Michel ROELENS
Vliebergh-Sencie Wiskunde, K.U. Leuven

1. Introduction dans le contexte

La plate-forme pétrolière d'exploration Yatzy a été construite à la cale sèche "Boelwerf" à Temse et est destinée à prospecter des couches sous-marines de pétrole. Le 11 janvier 1989, ce colosse, haut de cent mètres, entreprit son premier voyage sur un Escaut brumeux, à destination de Rotterdam. Vers 13h30, Yatzy rencontra un premier obstacle : un câble de haute tension traversant l'Escaut. Les ingénieurs de Boelwerf ont eu pas mal de travail pour la préparation du passage. La partie mathématique de leur analyse est reproduite ci-dessous, quoique dans une adaptation didactique.

Dans une première phase, le passage sous le câble de haute tension est analysé à l'aide des questions suivantes.

- Est-ce que le "problème" du passage se situe en haut (au niveau du câble) ou en bas (la profondeur de l'Escaut) ?

- Si Yatzy peut passer, où (rive gauche, au milieu, rive droite) et quand (en termes de marées) le passage doit-il avoir lieu ?

Afin de répondre à ces questions, on dispose des informations nécessaires: dimensions et tirant d'eau de Yatzy (fig. 1), les courbes de profondeur de l'Escaut aux environs du câble (fig. 2), mesures du câble (qui pend !) (fig. 3) et données concernant les marées (tableau 1).

	marée basse	marée haute	période
moyenne grande marée	0,25 m	6,00 m	12h10
moyenne marée normale	0,46 m	5,60 m	12h15
moyenne marée de mortes-eaux	0,74 m	5,09 m	12h40

Tableau 1. Marées à Anvers par rapport au "GLLWS"

1.

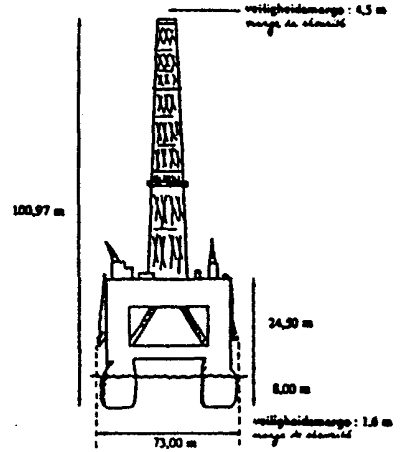


Fig.1. Dimensions et tirant d'eau de Yatzy

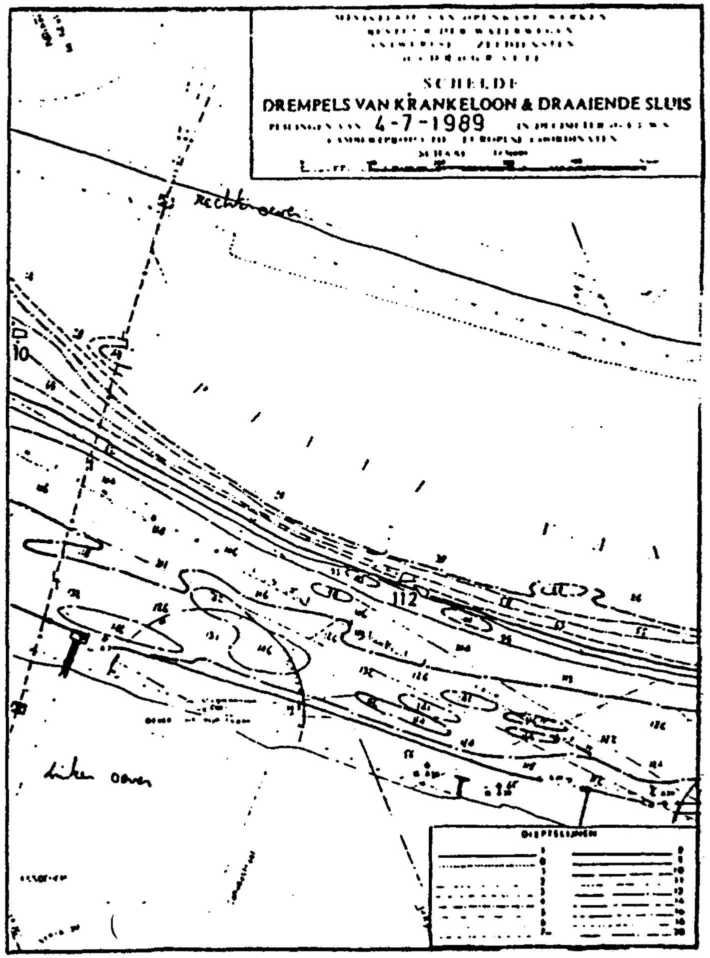


Fig. 2 Profondeurs de l'Escaut

2.

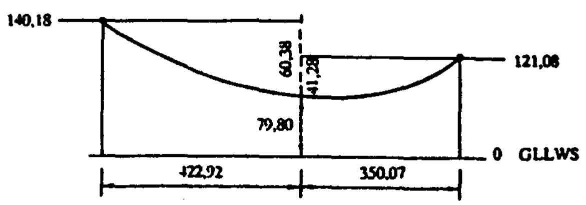


Fig.3. Forme approximative du câble

Tout d'abord, les données relevantes sont rassemblées dans une seule figure, une coupe transversale de l'Escaut sous le câble. Quelques éléments y étaient indiqués à l'avance : les pylônes suspendant le câble sur les deux rives, un débarcadère le long de la rive gauche et une ligne horizontale correspondant à 0 mètre GLLWS, un plan horizontal à partir duquel toutes les hauteurs et profondeurs sont mesurées. GLLWS signifie "Gemiddeld Laag-LaagwaterSpring", la moyenne, calculée sur plusieurs années, du niveau le plus bas des marées basses des grandes marées de chaque mois lunaire. La coupe de l'Escaut sous le câble peut être dessinée en marquant dans la figure 2 quelques points d'intersection des courbes de profondeur et du câble et en les reliant. Les échelles différentes procurent un peu de travail supplémentaire de calcul et de mesure. Le point le plus bas du câble (fig. 3) peut également être indiqué sur cette coupe. Finalement, on y ajoute des lignes horizontales pour la hauteur de l'eau (tableau 1). Pour ne pas trop charger l'ensemble, on se limite ici aux extrêmes : la marée haute et la marée basse d'une grande marée. Le résultat est une coupe transversale sur laquelle on peut faire "flotter" un modèle de Yatzy (à la même échelle) sur transparent (fig. 4).

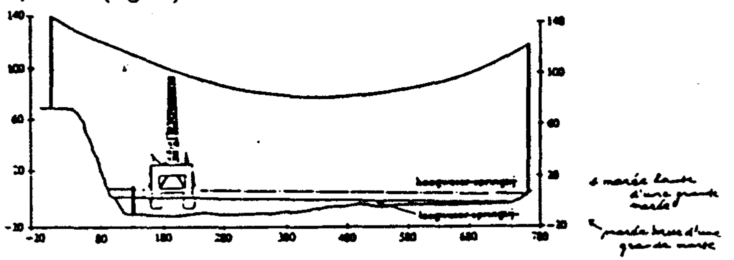
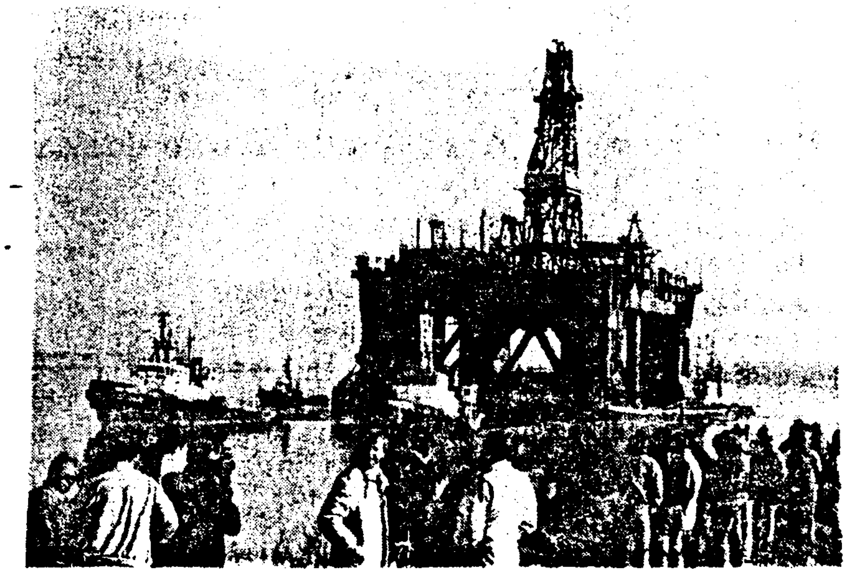


Fig.4. Coupe transversale de l'Escaut sous le câble



Tiré par des remorqueurs, Yatzy navigue sur l'Escaut.

Ceci nous donne, de façon expérimentale, les résultats suivants.

- Le problème se situe en haut (au niveau du câble).

- Si Yatzy peut passer, c'est le long de la rive gauche (p.e. à $x = 180$). L'Escaut y est assez profond et le câble électrique y pend suffisamment haut.

- Puisque le problème se situe en haut, le meilleur moment pour le passage est à marée basse d'une grande marée.

Voilà en ce qui concerne la première analyse du problème et le choix d'une stratégie de solution. Les ingénieurs de Boelwerf sont arrivés aux mêmes décisions : le 11 janvier 1989 il y avait en effet une grande marée et la marée basse était prévue pour 13h30 environ.

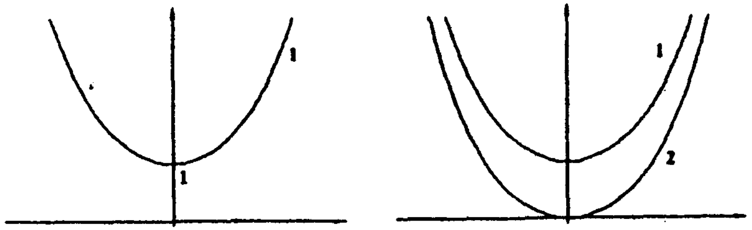
En soi, cette introduction n'a que peu de rapport avec le thème "fonctions comme modèles", mais elle est nécessaire pour se plonger dans le contexte. Les informations disponibles sont assimilées de façon active et on peut suffisamment bien se représenter le problème pour pouvoir, après, vérifier immédiatement la plausibilité des résultats de calcul. Pendant l'atelier, cette assimilation fut encore renforcée visuellement à l'aide d'un enregistrement vidéo d'un programme télévisé spectaculaire réalisé par la BRT au sujet de Yatzy.

2. Peut-il passer ? Avec quelle marge de manoeuvre ?

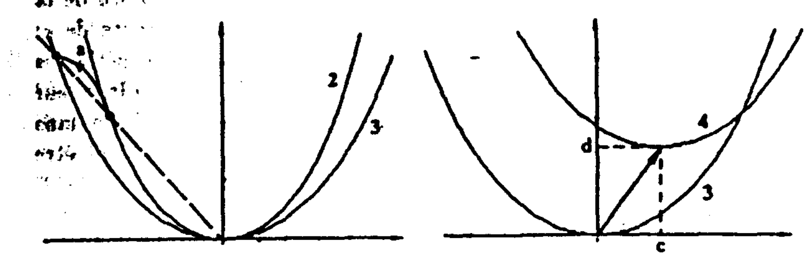
Première tentative : le modèle-cosh.

Le problème se situe au niveau du câble. Pour vérifier si Yatzy peut en effet passer à un endroit précis (p.e. $x = 180$) et à un instant précis (p.e. marée basse d'une grande marée), il faut connaître la hauteur du câble à cet endroit. A cet effet, nous construisons un modèle mathématique pour la forme du câble. Un câble homogène, suspendu librement, prend la forme d'une "courbe chaînette", comme nous l'enseigne la physique. Une courbe chainette est le graphique d'une fonction de la forme

$$x \mapsto a(\cosh\frac{x-c}{a} - 1) + d \; (a > 0).$$



1 : $y = \cosh x$ 2 : $y = \cosh x - 1$



3 : $y = a(\cosh\frac{x}{a} - 1)$ 4 : $y = a(\cosh\frac{x-c}{a} - 1) + d$

Fig. 5. Transformations du cosh.

Dans la figure 5 on voit comment le graphique de

$$x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(la chaînette "standard") se transforme en une chaînette "générale" : une translation vers l'origine est suivie d'un "agrandissement" par le facteur a ($a > 0$) et ensuite d'une translation selon un vecteur (c, d). De chacune de ces courbes, on détermine l'équation.

Dans notre exemple, les coordonnées du point le plus bas du câble sont $(422,92; 79,80)$ (fig. 3). On obtient comme équation:

$$y = a(\cosh\frac{x - 422,92}{a} - 1) + 79,80.$$

Reste à déterminer le "paramètre d'ouverture" a. Nous disposons à cet effet de deux données supplémentaires : les points de suspension aux deux pylônes (fig. 3). Comme c'est le long de la rive gauche que doit passer Yatzy, il est préférable d'utiliser le point $(0; 140,18)$, le point où le câble est attaché au pylône de gauche. On obtient donc l'équation :

$$140,18 = a(\cosh\frac{-422,92}{a} - 1) + 79,80$$

qu'il nous reste à résoudre afin de déterminer a. Après quelques tentatives (en appliquant la fonction inverse de cosh, notamment

$y = \pm ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$), on doit conclure que c'est impossible à faire à l'aide de moyens algébriques. L'équation est "transcendante" (a se trouve "à l'intérieur" et "à l'extérieur" de la fonction transcendante cosh) et donc à résoudre de façon numérique. Entre parenthèses : la connaissance de la *longueur* du câble nous permettrait de déterminer la valeur exacte de a; la vérification de ce fait est un bel exercice pour le lecteur. Les méthodes numériques (itération, Newton-Raphson, ...) nous donnent pour a la valeur de $1491,139617$. Les ingénieurs de Boelwerf ont fait tous leurs calculs dans ce modèle-cosh. Pourtant, l'équation transcendante peut facilement être évitée...

Deuxième tentative : l'approximation par parabole

Le câble est une partie de chaînette assez plate. Il correspond, sous la transformation inverse de celle de la figure 5, à un tout petit bout près du point le plus bas $(0,1)$ du graphique du cosh "standard". Selon le développement de Mac Laurin, la fonction cosh s'approche, dans un voisinage du sommet, d'une fonction du second degré :

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}.$$

C'est ce qui nous donne l'idée d'approcher le câble par une *parabole* : celle qui a en commun avec le câble son sommet (point le plus bas) et un point supplémentaire, p.e. le point de suspension au pylône de gauche.

L'équation d'une parabole d'axe de symétrie vertical et de sommet (c, d) est:

$$y = a(x - c)^2 + d$$

($a \neq 0$). Cette équation peut être obtenue, tout comme celle de la chaînette, en "agrandissant" $y = x^2$ par le facteur $\frac{1}{a}$ (!) et en la translatant ensuite selon le vecteur (c, d). Le câble a comme sommet $(422,92; 79,80)$. Cela donne l'équation

$$y = a(x - 422,92)^2 + 79,80$$

dans laquelle nous devons déterminer a en y introduisant le point $(0; 140,18)$. Nous obtenons : $a = 0,00033758$.

On peut se demander s'il s'agit là de l'approximation de Taylor du deuxième degré du modèle-cosh en $x = 422,92$. La réponse est non ! Un polynôme de Taylor du deuxième degré aurait en ce point-là la même valeur de fonction, la même dérivée et la même dérivée seconde que la fonction qu'il approche. Par contre, "notre" fonction du second degré possède en l'abscisse du sommet uniquement la même valeur de fonction et la même dérivée que le modèle-cosh. La dérivée seconde est donc remplacée ici par un point supplémentaire.

Marge de manoeuvre selon l'approche par parabole.

En $x = 180$, le modèle-parabole nous donne comme hauteur du câble : $y = 99,72$. Pour déterminer la *marge verticale*, nous devons en soustraire: 92,97 m pour la partie de Yatzy au-dessus du niveau de l'eau (fig. 1), 0,25 m pour la hauteur de l'eau à marée basse d'une grande marée (tableau 1) et puis encore 4,5 m pour la marge de sécurité (fig. 1). On obtient une marge verticale de 2 m. Si Yatzy passe à $x = 180$, il reste donc, en plus de la marge de sécurité, une marge de manoeuvre de 2 m entre le sommet du derrick (tour de forage) et le câble.

Mais est-il bien réaliste de vouloir faire passer Yatzy sous le câble à l'endroit précis $x = 180$? Quelques spécialistes de la navigation, qui ont observé les opérations depuis la rive, décrivirent la plate-forme de forage comme "une grande bassine de lessive intraitable". Il est pratiquement impossible de prévoir l'endroit exact où un colosse de cette taille, remorqué par des bateaux, passera. C'est pourquoi il est certes sensé de calculer également la *marge horizontale*. La question qui se pose est alors : à quelle distance maximale Yatzy peut-il s'écarter horizontalement du débarcadère? En respectant la marge de sécurité, la hauteur du câble doit valoir au moins 97,72 m. Ce qui conduit à l'inégalité suivante du second degré :

$$0,00033758(x - 422,92)^2 + 79,80 \geq 97,72$$

(x représente l'abscisse du sommet du derrick). L'ensemble "mathématique" des solutions,

$$]-\infty; 192,59] \cup [653,33; +\infty[$$

doit être bien interprété. Pour Yatzy, $[653,33; +\infty[$ n'a aucune signification car l'eau n'est pas assez profonde le long de la rive droite. La solution "réaliste" est donc : du débarcadère à $x = 192,52$. Il reste donc une marge horizontale de 15 m, ce qui n'est pas tellement vu le fait que Yatzy est si difficile à diriger.

Finalement, nous *évaluons* le modèle-parabole. Comme il apparaît au tableau 2, l'idée d'approcher le câble par une parabole était bonne : le modèle-cosh et le modèle-parabole ne diffèrent que de 0,1 m au maximum !

x (= distance horizontale en m jusqu'au pylône sur la rive gauche)	hauteur du câble selon l'approche par parabole (en m par rapport à GLLWS)	hauteur du câble dans le modèle-cosh avec a = 1491,139617 (en m par rapport à GLLWS)	différence entre l'approche par parabole et le modèle-cosh
0	140,18	140,18	0,00
122,92	110,18	110,08	0,10
135,42	107,70	107,60	0,10
147,92	105,33	105,23	0,10
160,42	103,06	102,96	0,10
172,92	100,90	100,81	0,09
222,92	93,30	93,23	0,07
272,92	87,40	87,35	0,05
322,92	83,18	83,15	0,03
372,92	80,64	80,63	0,01
422,92	79,80	79,80	0,00
772,99	121,17	121,08	0,09

Tableau 2. Evaluation de l'approche par parabole

3. Combien de temps a-t-il pour passer ?

Le 11 janvier 1989, le jour prévu pour le passage de Yatzy sous le câble de haute tension Zwijndrecht-Scheldelaan, la marée basse était prévue à cet endroit pour 13h24. L'idéal serait de faire passer Yatzy sous le câble exactement à ce moment-là. Néanmoins, suivre un horaire ponctuel dans un brouillard à couper au couteau, est facile à dire ! Pour les navigateurs, il est donc intéressant de connaître le *créneau horaire* dans lequel le passage doit avoir lieu.

Un modèle-sinus

C'est la hauteur de l'eau qui est variable à présent. Il nous faut donc un modèle mathématique pour les marées. Ce qui peut se faire à l'aide d'une fonction-sinus généralisée

$$h = a \sin[b(t-c)] + d$$

dans laquelle h représente la hauteur de l'eau (en mètres) et t le temps (en heures). Si l'on veut tenir compte également de l'effet marée de mortes-eaux - grande marée, on peut construire un modèle qui comprend la somme de deux fonctions-sinus. En effet, le cycle des mortes-eaux et des grandes marées peut être décrit par une fonction-sinus, sur laquelle on superpose le sinus qui représente le cycle des marées montantes et descendantes. Pour calculer le créneau horaire de Yatzy, un seul sinus pour la hauteur de l'eau en temps de *grande marée* nous suffit.

Les données concernant les marées (tableau 1), complétées du moment où la marée basse était prévue, sont rassemblées dans la figure 6. Munis de ces données, nous sommes en mesure de déterminer les paramètres a, b, c et d :

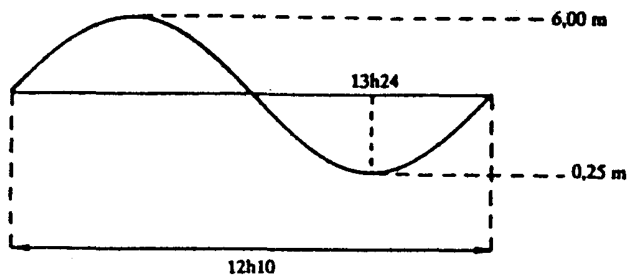


Fig. 6.

$a = \frac{6,00-0,25}{2} = 2,875$ (l'amplitude)

$b = \frac{2\pi}{12,17} = 0,516$ (2π divisé par la période)

$c = 13,40 - \frac{3}{4}.12,17 = 4,275$ (l'abscisse du "premier" point d'intersection du sinus et sa "ligne d'équilibre")

$d = \frac{6,00+0,25}{2} = 3,125$ (la "hauteur" de cette ligne d'équilibre au-dessus du niveau-zéro).

On obtient comme modèle-sinus :

$$h = 2,875 \sin[0,516(t - 4,275)] + 3,125.$$

De combien de temps Yatzy dispose-t-il ?

Pour le calcul du créneau horaire, nous choisissons un endroit fixe sous le câble, p.e. à nouveau $x = 180$, où celui-ci a une hauteur de 99,72 m

6

selon l'approximation par parabole. La hauteur de l'eau, la partie de Yatzy au-dessus de l'eau (92,97 m) et la marge de sécurité (4,5 m) ne peuvent donc pas dépasser, ensemble, 99,72 m. Ceci donne lieu à une inégalité trigonométrique :

$$h + 92,97 + 4,5 \leq 99,72$$

ou encore :

$$h \leq 2,25$$
$$\sin[0,516(t - 4,275)] \leq -0,30435.$$

A l'aide du cercle trigonométrique (fig. 7), nous obtenons :

$$2\pi + (-\pi - \arcsin(-0,30435)) \leq 0,516(t - 4,275) \leq 2\pi + \arcsin(-0,30435),$$

ou, mettant en évidence t :

$$10,96 \leq t \leq 15,85.$$

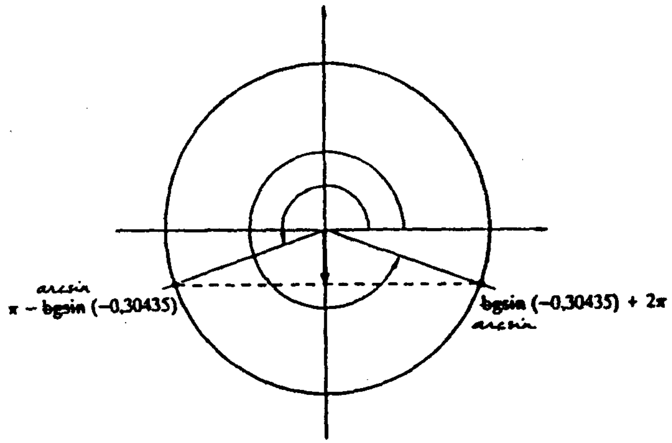


Fig. 7.

Rien ne presse donc : on dispose d'un créneau horaire de presque cinq heures (de 10h58 à 15h51).

La résolution d'équations et d'inégalités trigonométriques se situe traditionnellement au sein de la trigonométrie. Les inconnues sont alors toujours des *angles* (exprimés la plupart du temps en degrés) et non des nombres. En outre, les solutions sont rarement interprétées comme zéros d'une *fonction* trigonométrique. L'addition habituelle "+ $k360°$ ($k \in \mathbb{Z}$)" ou "+ $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)" semble pour plusieurs élèves être une habitude superflue. Par contre, dans ce calcul du créneau horaire de la plate-forme de forage, l'inconnue est le *temps*. En outre, on ne recherche pas *toutes* les solutions, mais uniquement celles qui ont un sens dans le contexte donné. C'est pourquoi la solution "arcsin(−0, 30435)", obtenue par la calculatrice, fut augmentée de 2π.

Il nous reste à évaluer le modèle-sinus. Les résultats de cette évaluation sont beaucoup moins positifs que dans le cas du modèle pour le câble. La courbe réelle des marées observées le 11 janvier 1989 (fig. 8) nous montre qu'en réalité l'intervalle du temps pendant lequel $h \leq 2,25$ était :

$$10h10 \leq t \leq 15h50.$$

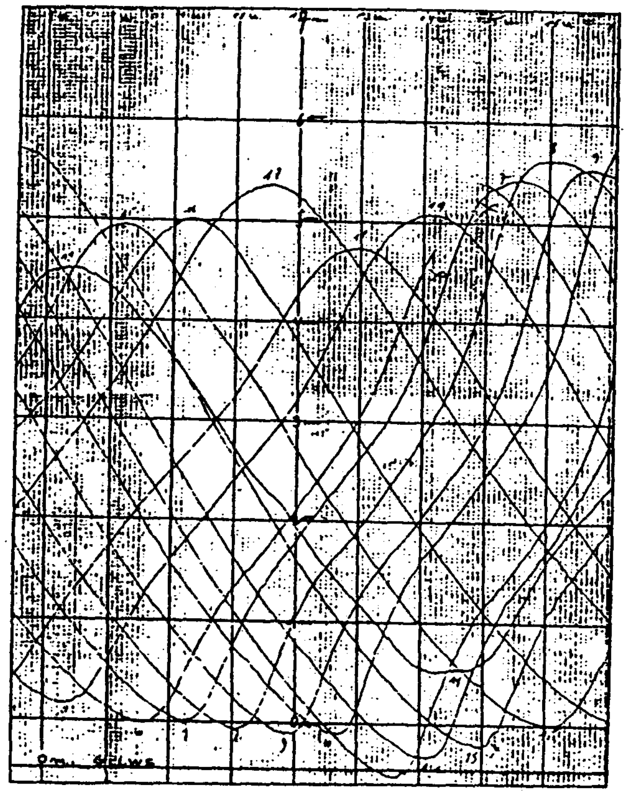


Fig. 8. Courbe des marées observées : sur un rouleau qui fait une rotation autour de son axe toutes les 24 heures, une plume reliée à un flotteur marque en continu la position de l'eau.

En réalité, Yatzy disposait d'environ trois quarts d'heure de plus pour son passage sous le câble. *D'où provient cette différence entre la réalité et le modèle ?* Du fait que la descente des eaux prend plus de temps que la montée (fig. 9). Pour obtenir une prédiction plus précise, on pourrait utiliser une fonction périodique plus compliquée (une combinaison de sinus) ou tout simplement une courbe *moyenne* des marées (fig. 10). La courbe réelle de la figure 8 n'était évidemment pas disponible à l'avance.

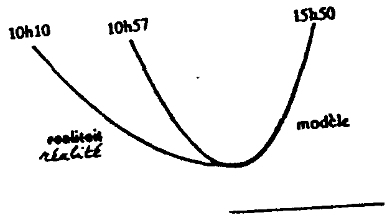


Fig. 9.

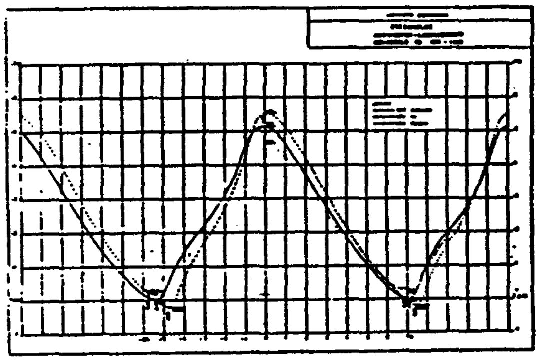
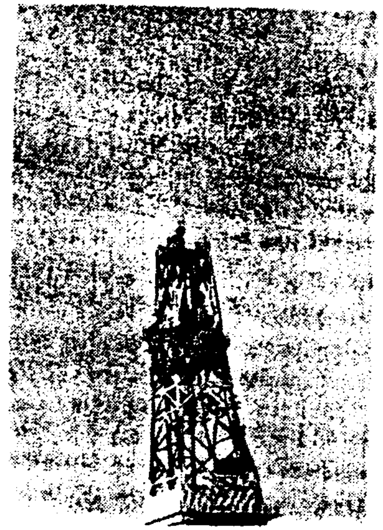
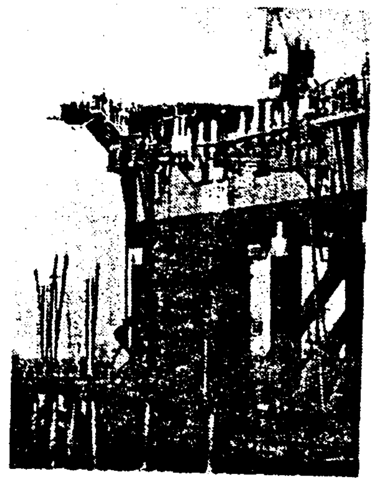


Fig. 10. Courbes moyennes des marées



L'événement du 11 janvier 1989 : Yatzy passe sous le câble de haute tension Zwijndrecht-Scheldelaan.



Yatzy frôle le débarcadère

Représentation graphique d'une fonction

Nous ne considèrerons ici que des fonctions <u>positives</u> d'une variable <u>positive</u> : $y = f(x)$ $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Le graphique de ces fonctions se situent donc entièrement dans le premier quadrant.

En sciences, les variables et les fonctions de ces variables répondent pratiquement toujours à cette condition ($v = e/t$, $P = R.I^2$,...).

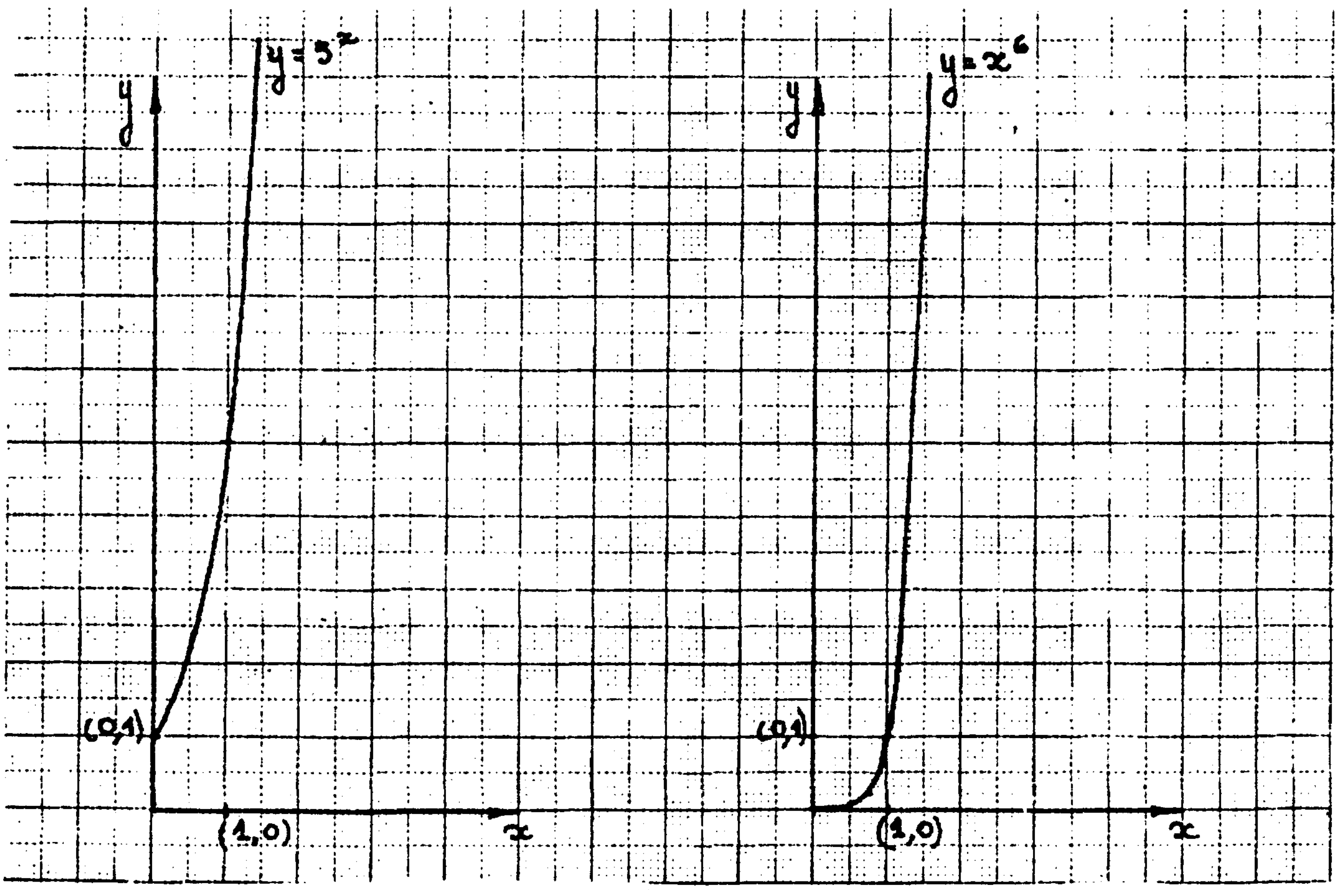
Si une grandeur est négative, un changement d'unité peut souvent la rendre positive : -3° C = 270° K par exemple. Cette restriction n'est donc pas importante pour l'expérimentateur.

1- Graphique "classique"

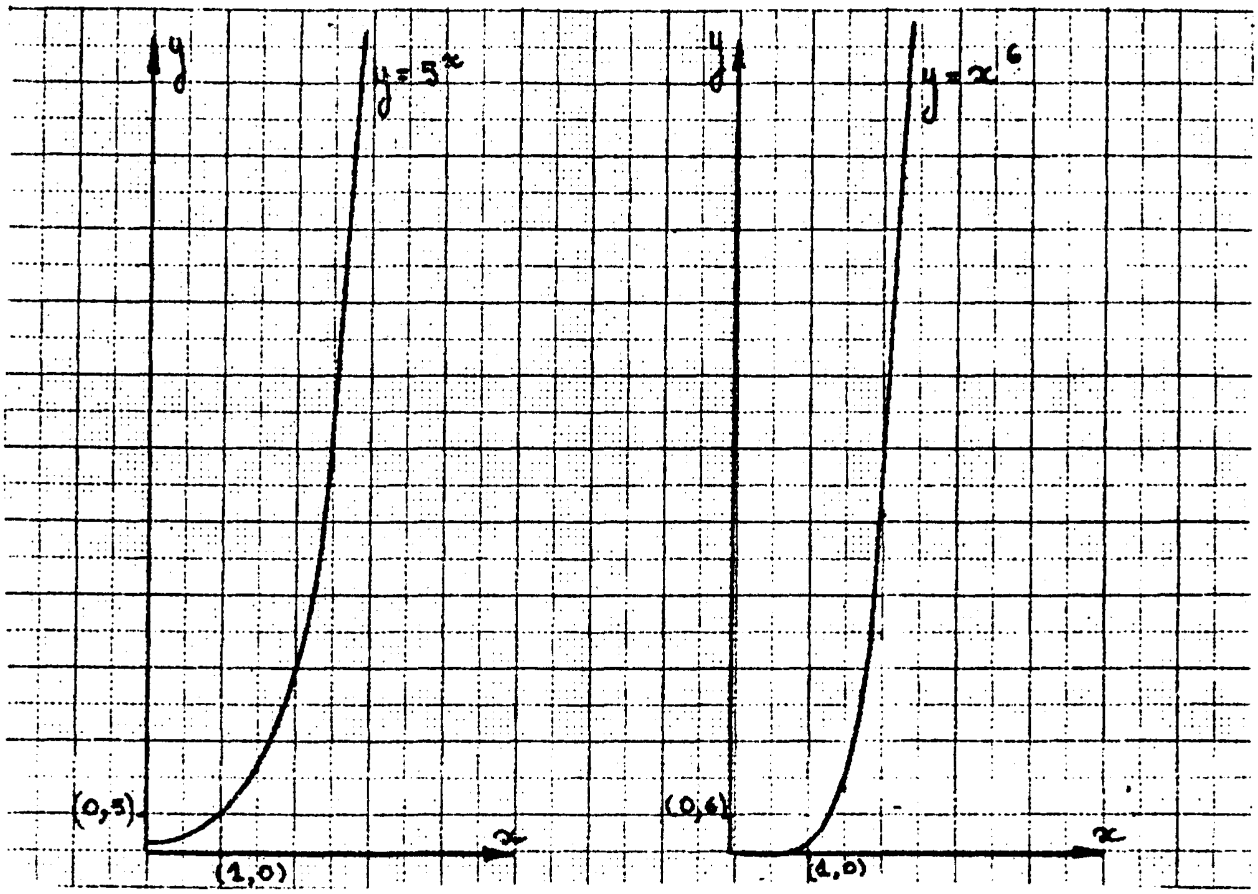
La plupart des fonctions sont représentées graphiquement dans le plan vectoriel rapporté à une base orthonormée. L'étude complète du graphique d'une fonction dans ces conditions a été faite en cinquième.

Néanmoins, dans certains cas, le graphique obtenu est peu utilisable par l'expérimentateur.

Exemples:



On peut utiliser une base non normée. Le graphique en est amélioré mais est toujours d'emploi gênant pour l'utilisateur.



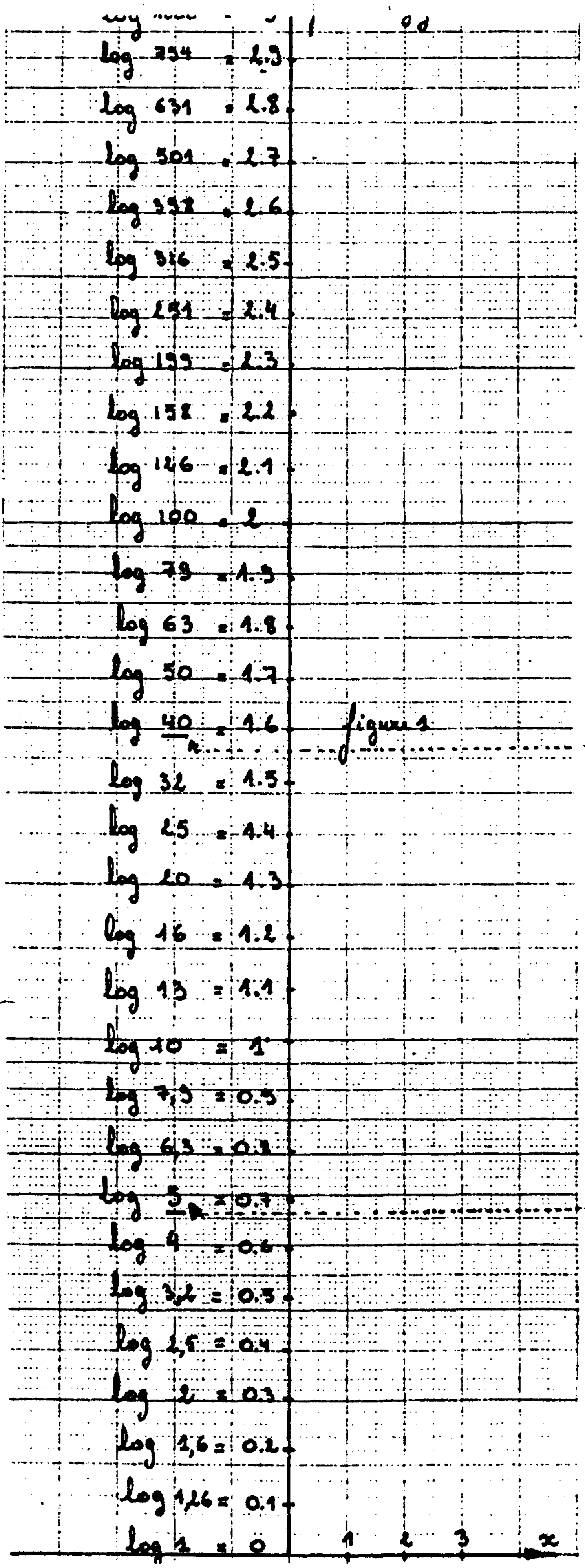
2- Graphique lin-log ou graphique "x-log y " ou semi-logarithmique

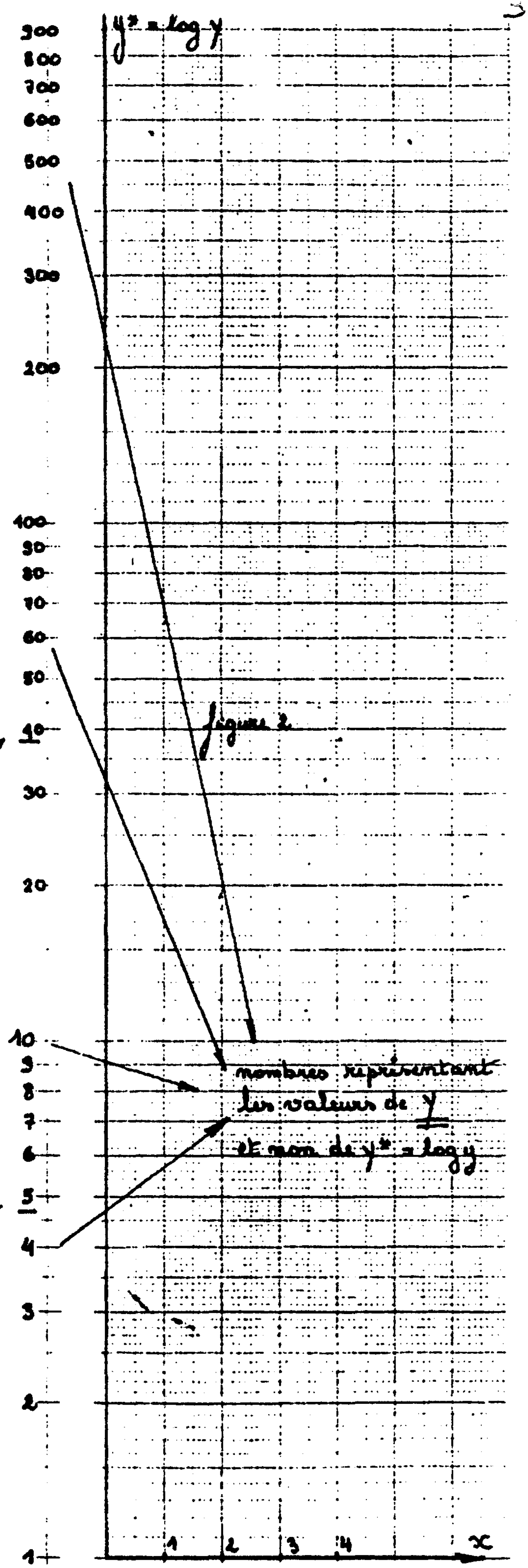
Pour les fonctions exponentielles du type

$$y = a^x \qquad a > 0 \text{ et } a \neq 1, \tag{1}$$

on utilise fréquemment le graphique "lin-log". Dans une telle représentation les axes sont perpendiculaires et pour chaque couple (x,y) vérifiant l'équation (1), on porte en abscisse la valeur de x et on porte en ordonnée la valeur $y^* = \log y$. (Voir figure 1 page 3)

Pour la facilité de l'utilisateur, le papier millimètré "lin-log" est présenté de telle manière que l'on ne doive pas calculer les différentes valeurs de y^*.On ne doit donc pas reporter sur les axes les couples $(x,y^*=\log y)$ mais les couples (x,y). (Voir figure 2 page 3)


log 794 = 2.9
log 631 = 2.8
log 501 = 2.7
log 398 = 2.6
log 316 = 2.5
log 251 = 2.4
log 199 = 2.3
log 158 = 2.2
log 126 = 2.1
log 100 = 2
log 79 = 1.9
log 63 = 1.8
log 50 = 1.7
log 40 = 1.6
log 32 = 1.5
log 25 = 1.4
log 20 = 1.3
log 16 = 1.2
log 13 = 1.1
log 10 = 1
log 7,9 = 0.9
log 6,3 = 0.8
log 5 = 0.7
log 4 = 0.6
log 3,2 = 0.5
log 2,5 = 0.4
log 2 = 0.3
log 1,6 = 0.2
log 1,26 = 0.1
log 1 = 0
1
2
3
x
figure 1


y* = log y
900
800
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
x
figure 2
nombres représentant les valeurs de y et non de y* = log y

Il est à noter que les sous-graduations ont été obtenues par interpolation linéaire. y^* variant suivant une loi logarithmique et non suivant une loi linéaire, il y a là une source d'erreur possible.

Exemple: $y = 5^x$

x	$y = 5^x$	$y^* = \log 5^x = x.\log 5$
0	1	$\log 1 = 0$
1	5	$\log 5 = 0.70$
2	25	$\log 25 = 2.\ \log 5 = 1.40$
3	125	$\log 125 = 3.\ \log 5 = 2.10$
4	625	$\log 625 = 4.\ \log 5 = 2.80$
5	3125	$\log 3125 = 5.\ \log 5 = 3.49$

(Figure en page 5)

La fonction $y = a^x$ sera représentée par une droite en axes "lin-log". Dans les axes x,y^*, cette droite aura pour équation

$$y^* = x\ .\ \log a$$

La fonction $y = k.a^x$ sera également représentée par une droite en axes "lin-log". Dans les axes x,y^*, cette droite aura pour équation

$$y^* = x\ .\ \log a + \log k$$

Etant donné que les valeurs indiquées sur l'axe y^* sont celles de y, les valeurs de a et de k se découvrent immédiatement graphiquement.

(Figure en page 5)

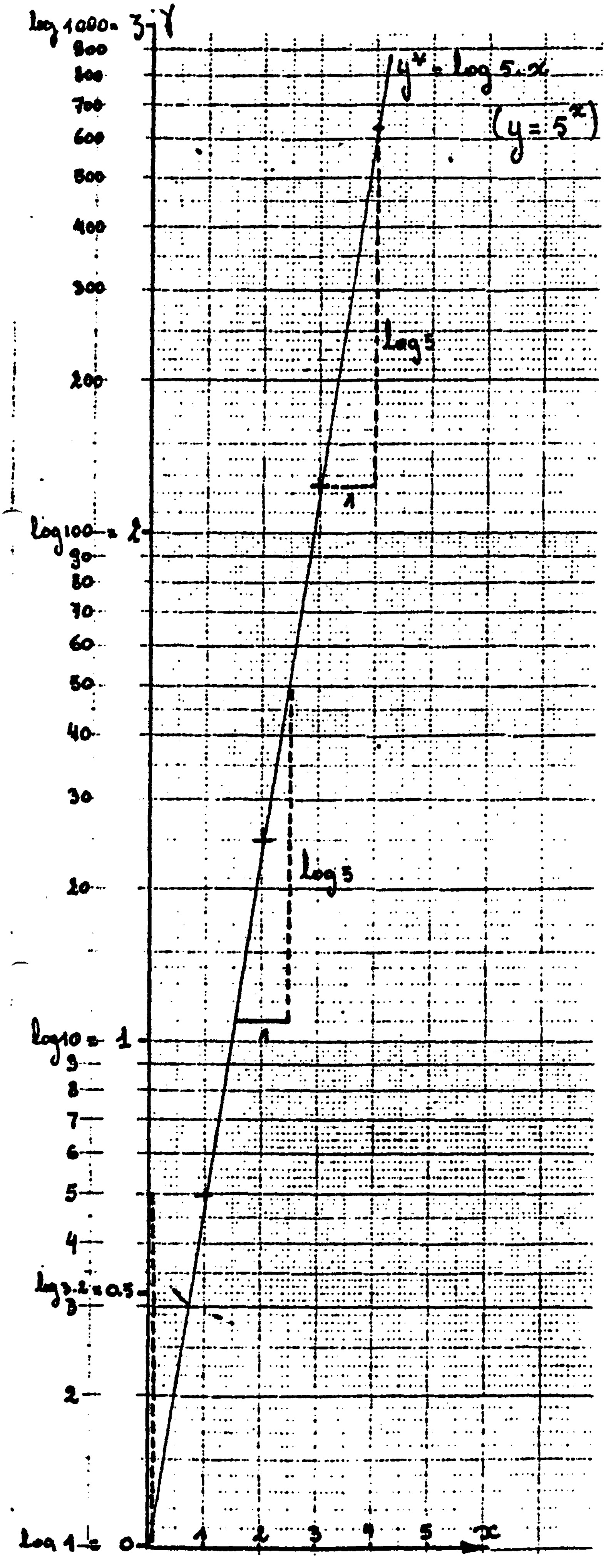
Pour obtenir une valeur précise de a, on calcule

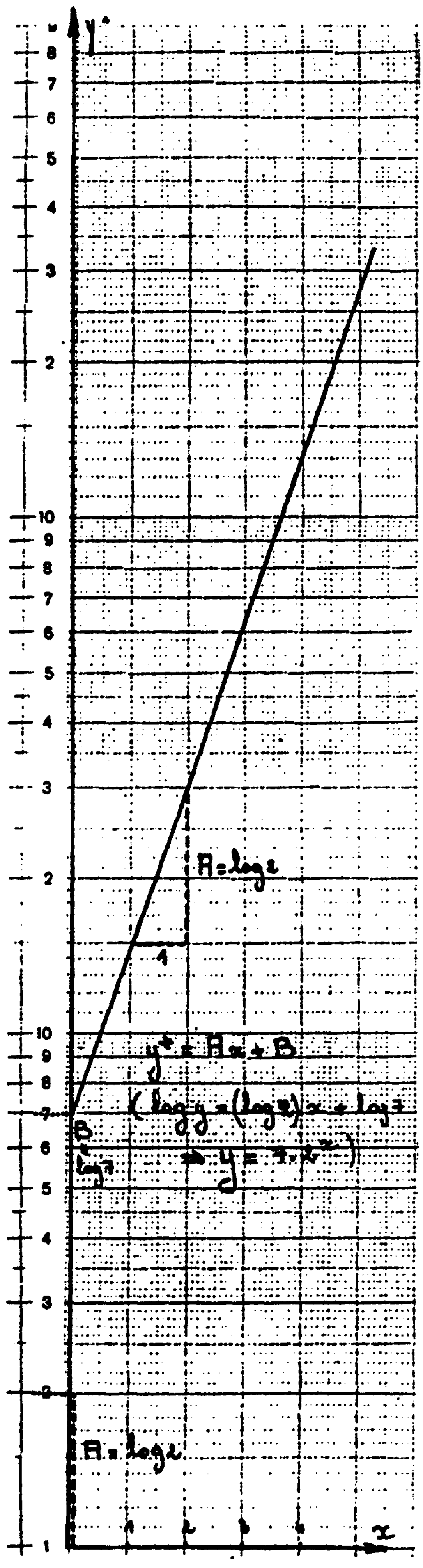
$$\log a = \frac{y_2^* - y_1^*}{x_2 - x_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} = k$$

d'où $a = 10^k$

Dans l'exemple ci-dessus, $\log a = \dfrac{\log 5 - \log 1}{1 - 0} = \log 5$

d'où $a=5$.


log 1000 = 3
Y
y* = log 5 . x
(y = 5^x)
log 5
log 5
log 100 = 2
log 10 = 1
log 3.2 = 0.5
log 1 = 0
x


y*
A = log 2
y* = Ax + B
(log y = (log 2) x + log 7
⇒ y = 7 . 2^x)
B
log 7
A = log 2
x

Il y aurait un problème pour les fonctions du type $y = a^x$ où $a < 1$. Les valeurs prises par y sont alors < 1. Or, la plus petite valeur que peut prendre y vaut 1 dans la méthode graphique citée ci-dessus. Pour remédier à cet inconvénient, le papier "lin-log" se présente de la manière suivante:

(voir figure 1 page 7)

A l'utilisateur de choisir la signification des nombres qui apparaissent sur l'axe y .

Pour les fonctions du type $y = a^x$ où $a > 1$, son interprétation sera celle de la figure 2 page 7. La valeur y = 567 par exemple, se porte au 3^e " étage ", en face de la graduation 5,67.

Pour une fonction du type $y = a^x$ où $a < 1$, son interprétation des nombres situés sur l'axe y dépendra du nombre de décimales qu'il veut traité. Un exemple est donné à la figure 3 de la page 7.

Utilisation

Au laboratoire, l'expérimentateur obtient des résultats lors d'une expérience. Il croit que la variable et la fonction de cette variable sont liés par une loi exponentielle. Il reporte les couples de valeurs qu'il aura obtenu lors de son expérience sur un papier "lin-log". S'il obtient une droite, la loi qui régit l'expérience est une loi du type

$$y = b.\ a^x$$

Les valeurs de a et de b se lisent sur le graphique, comme nous l'avons vu précédemment.

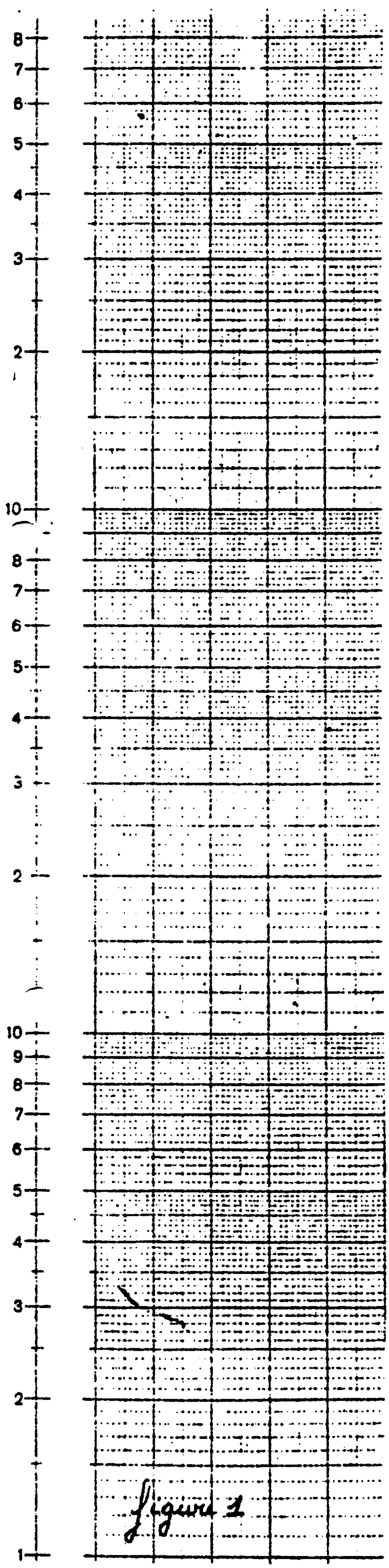


figure 1

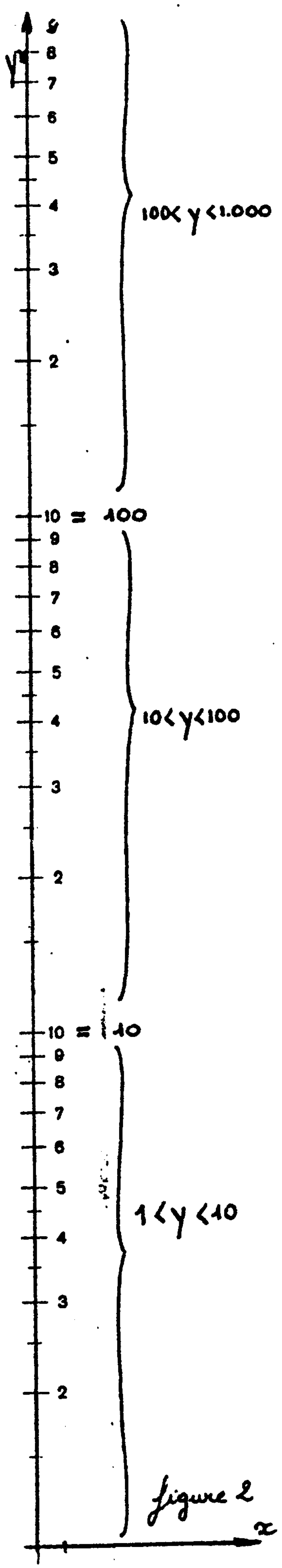


figure 2

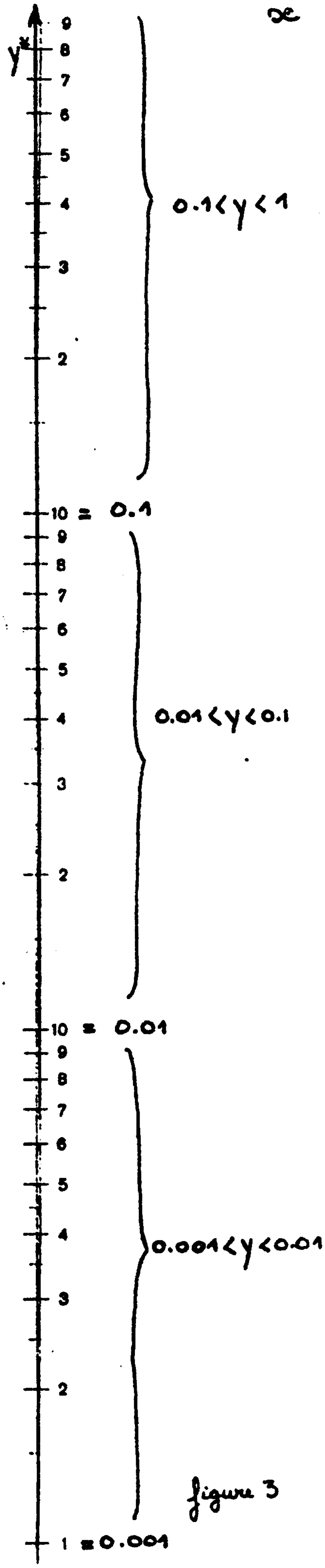


figure 3