ULB

PROBLEMATHS
12 mars 2020

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

Problemath 10: Pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il une matrice carrée $n \times n$, à coefficients 0 ou 1, telle que les sommes des coefficients dans les n lignes soient toutes différentes et les sommes des coefficients dans les n colonnes soient toutes égales?

Solution du Problemath 10: Une telle matrice $n \times n$ existe pour tout $n > 0$. En voici une description possible. Le cas $n = 1$ étant trivial, on va supposer $n > 1$).

Si n est impair, la n-ème ligne ne contient que des 1 et, pour tout $k = 1, ..., (n-1)/2$, la $(2k-1)$-ème ligne a des 1 dans les k premières positions et des 0 dans les $n-k$ dernières, tandis que la $(2k)$-ème ligne a des 0 dans les k premières positions et des 1 dans les $n-k$ dernières. Les sommes des chiffres dans les n lignes valent alors $1, ..., n$, et $(n+1)/2$ dans toutes les colonnes.

Si n est pair, pour tout $k = 0, ..., (n-2)/2$, la $(2k+1)$-ème ligne a des 1 dans les k premières positions et des 0 ailleurs, tandis que la $(2k+2)$-ème ligne a des 0 dans les k premières positions et des 1 ailleurs. Les sommes des chiffres dans les n lignes valent alors $0, \ldots, n$ (à l'exception de $n/2$) et $n/2$ dans toutes les colonnes.

Ont fourni une solution correcte: D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), Q.CLAUS, M.SCHULLER (BA1 maths ULB), S.LEMAL (BA2 maths ULg), B.DUBUS (BA2 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), A.JANSEN (étudiant à Eindhoven), O.DECKERS, T.HAMEL, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE (profs de maths), W.DE DONDER, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), F.THONAR (actuaire à Tokyo), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

Problemath 11: Etant donnés deux nombres réels $a, b \in [0,1]$ tels que $a + b = 1$, soit D un disque fermé de rayon a dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et soit D^* l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont la distance à D est $\leq b$ (la distance d'un point p au disque D est par définition le minimum des distances de p aux points de D). Pour quelles valeurs de a et b le volume de D^* est-il maximum?

Solution du Problemath 11: Quel que soit le point p de D^*, il existe un point p' de D à distance $\leqslant b$ de p, et p' est à distance $\leqslant a$ du centre o de D. Par l'inégalité triangulaire, p est donc à distance $\leqslant a + b = 1$ du point o. De ce fait, quels que soient a et b, D^* est contenu dans la boule B de rayon 1 centrée en o. Le volume de D^* est donc maximum (égal à $4\pi/3$) lorsque $D^* = B$, c'est-à-dire lorsque $a = 0$ et $b = 1$ (si $a > 0$ et $b < 1$, tous les points de D^* contenus dans le cylindre droit ayant D pour base sont à distance $\leqslant b < 1$ du plan contenant D, et par conséquent le volume de D^* est plus petit que celui de B car B contient deux calottes sphériques de volume > 0 disjointes de D^*).

Ont fourni une solution correcte: D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), S.LEMAL (BA2 maths ULg), B.DUBUS (BA2 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), A.JANSEN (étudiant à Eindhoven), O.DECKERS, T.HAMEL, C.VAN HOOSTE, H.VERMEIREN (profs de maths), W.DE DONDER, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), F.THONAR (actuaire à Tokyo), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

Problemath 12: Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indéfiniment dérivables et non constantes, telles que $f(x+y) - f(x-y) = f'(x)f'(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$?

Solution du Problemath 12: On a, par hypothèse,

$$f(x+y) - f(x-y) = f'(x)f'(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

En posant $x = y = 0$, on obtient $f'(0) = 0$.
En dérivant (*) par rapport à y trois fois de suite, puis en posant $y = 0$, on a

$$2f'(x) = f'(x)\, f''(0) \qquad (1)$$

$$0 = f'(x)\, f'''(0) \qquad (2)$$

$$2f'''(x) = f'(x)\, f''''(0) \qquad (3)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f est supposée non constante, il existe un nombre réel x^* tel que $f'(x^*) \neq 0$. En posant $x = x^*$ dans (1) et (2), on obtient $f''(0) = 2$ et $f'''(0) = 0$.
Les fonctions f cherchées sont donc solutions de l'équation différentielle (3), avec les conditions initiales $f'(0) = 0, f''(0) = 2$ et $f'''(0) = 0$. Il y a 3 cas:
(i) $f''''(0) = 0$. Alors $f'''(x) = 0$ pour tout x et on a donc $f(x) = x^2 + C$, où C est une constante arbitraire.

(ii) $f''''(0) = 2k^2 > 0$. Alors $f'''(x) = k^2 f'(x)$ pour tout x. En résolvant cette équation différentielle linéaire à coefficients constants, on trouve $f(x) = (2/k^2)\cosh(kx) + C$ (pour rappel, $\cosh X = (e^X + e^{-X})/2$).

(iii) $f''''(0) = -2k^2 < 0$. Alors $f'''(x) = -k^2 f'(x)$ pour tout x et on trouve, après calculs, $f(x) = -(2/k^2)\cos(kx) + C$.
On vérifie aisément que les fonctions obtenues en (i)(ii)(iii) satisfont bien à la condition (*).

Ont fourni une solution correcte: D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), T.HAMEL, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE (profs de maths), M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

Problemath 13: Quels sont tous les couples (p, q) d'entiers > 0 tels que
$1^p + 2^p + ... + n^p = (1 + 2 + ... + n)^q$ pour tout entier $n > 0$?

Solution du Problemath 13: Si $p = 1$, alors trivialement $q = 1$. Supposons maintenant $p \geqslant 2$. Pour $n = 2$, l'égalité souhaitée s'écrit $1 + 2^p = 3^q$, donc $p \geqslant 3$ et, de ce fait, 2^p est un multiple de 8 et $3^q = 1$ (mod8), d'où on déduit que q est pair. Posons $q = 2q'$. Alors $2^p = 3^{2q'} - 1 = (3^{q'} - 1)(3^{q'} + 1)$, ce qui force chacun de ces deux facteurs à être une puissance de 2. Les seules puissances de 2 qui diffèrent de 2 unités sont 2 et 4, donc $3^{q'} - 1 = 2$ et $3^{q'} + 1 = 4$, d'où on tire $q' = 1$, donc $q = 2$ et $p = 3$. On démontre facilement par récurrence que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$ pour tout $n > 0$. Les couples (p, q) cherchés sont donc $(1, 1)$ et $(3, 2)$.

Ont fourni une solution correcte: A.BETERMIER (élève de 5ème au Collège St Roch à Ferrières), D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), Q.CLAUS, M.SCHULLER (BA1 maths ULB), S.LEMAL (BA2 maths ULg), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), A.JANSEN (étudiant à Eindhoven), O.DECKERS, T.HAMEL, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE (profs de maths), W.DE.DONDER, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), F.THONAR (actuaire à Tokyo), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

PROBLEMATHS: PALMARES FINAL 2019-2020

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des participants aux Problemaths 2019-2020, tous cordialement invités à un drink avec remise des diplômes et des prix, qui aura lieu le mercredi 29 avril à 12h30 dans le local 2.O8.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus de la Plaine de l'ULB, Boulevard du Triomphe à Bruxelles).

- **A résolu 13 Problemaths:** C.VAN HOOSTE (prof de maths).

- **Ont résolu 12 Problemaths:** R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

- **Ont résolu 11 Problemaths:** D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), T.HAMEL, Y.SUPRIN (profs de maths).

- **Ont résolu 10 Problemaths:** R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), W.DE DONDER (ingénieur).

- **A résolu 9 Problemaths:** S.LEMAL (BA2 maths ULg).

- **Ont résolu 7 Problemaths:** J.M.BAYLAC (ingénieur), F.THONAR (actuaire à Tokyo).

- **Ont résolu 6 Problemaths:** A.BETERMIER (élève de 5ème au Collège St Roch à Ferrières), B.DUBUS (BA2 polytech ULB), L.GALANT (prof d'informatique), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

- **Ont résolu 5 Problemaths:** Q.CLAUS, M.SCHULLER (BA1 maths ULB), K.D.NGUYEN (BA2 polytech ULB), O.DECKERS (prof de maths).

- **Ont résolu 3 Problemaths:** L.PRIEELS (BA2 polytech ULB), C.KIERE (MA1 polytech ULB), A.JANSEN (étudiant à Eindhoven), M.CORNEZ, S.MASSON, H.VERMEIREN (profs de maths), E.GRUWE (ingénieure).

- **Ont résolu 2 Problemaths:** O.VAZQUEZ NUNEZ (élève de 5ème, enseignement à domicile), C.PANIDIS (BA1 maths ULB), D.H.NGUYEN (BA2 polytech ULB), E.YUKSEL (MA2 maths Univ Stockholm), C.LARIVIERE (prof de maths), G.MUKENDI (ingénieur), et LADY BELMATH.

- **Ont résolu 1 Problemath:** J.AYMANE (élève de classes préparatoires aux Grandes Ecoles à Tanger), R.VALICON (BA1 polytech ULB), M.CZUPRYNKO (BA2 polytech ULB), P.GILLET (prof de maths) , A.GRUWE (ingénieur).

L'équipe Problemaths (Christine CUTTING, Anne DELANDTSHEER, Julie DISTEXHE, Jean DOYEN, Carole MULLER et Adrien VANDENSCHRICK) vous donne rendez-vous l'année prochaine pour de nouveaux défis mathématiques!