PROBLEMATHS
13 décembre 2018

Voici les solutions des Problemaths 7,8 et 9. Les prochains énoncés paraîtront après les examens de janvier.

Solution du Problemath 7 : Comme $2cos\ x - sec\ x = \dfrac{2cos^2 x - 1}{cos\ x} = \dfrac{cos\ 2x}{cos\ x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\ \pi$, le produit donné vaut

$$\prod_{n=2}^{2017} \frac{cos(2^{n+1})^\circ}{cos(2^n)^\circ} = \frac{cos(2^{2018})^\circ}{cos\ 4^\circ}$$

Or $cos(2^{2018})^\circ = -cos\ 4^\circ$ car $2^{2018} - 4$ est un multiple impair de 180. En effet, $2^{2018} - 4 = 4(2^{2016} - 1)$ et, comme $2^{2016} - 1 = (2^4)^{504} - 1 = (2^6)^{336} - 1$ est divisible par $2^4 - 1 = 15$ et par $2^6 - 1 = 63$, $4(2^{2016} - 1)$ est un multiple impair de $4.5.9 = 180$ (on pouvait aussi le prouver en utilisant de l'arithmétique modulaire). Le produit donné vaut donc $\dfrac{-cos 4^\circ}{cos 4^\circ} = -1$.

Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), Q.CLAUS (élève de 6ème à l'Athénée d'Uccle I), S.NAOULI (élève de 6ème à l'Athénée Adolphe Max), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), D.H.NGUYEN, K.D.NGUYEN (BA1 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), O.DECKERS, T.HAMEL, S.MASSON, Y.SUPRIN, H.VERMEIREN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, A.GRUWE, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES, G.MUKENDI (ingénieurs), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 8 : Voici celle, courte et élégante, de Mathieu et Thomas LESSINNES (ingénieurs). Soient w et w' les vitesses angulaires de D et o' autour de o, respectivement. Comme aucun diamètre de D' ne change de direction pendant le mouvement, tous les points de D' ont la même vitesse instantanée que o'. Le point de tangence entre les deux disques a donc à la fois la vitesse angulaire w autour de o et la vitesse instantanée de o', soit $v = wr = w'(r + r')$. Il en résulte que $w = w'(r + r')/r = 127,5(16/15) = 136$ tours par minute.

Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), S.LEMAL (BA1 maths ULg), C.RUIZ (BA1 physique ULB), K.D.NGUYEN (BA1 polytech ULB), S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), C.LABIOUSE (MA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), O.DECKERS, P.GILLET, A.GREEN, S.MASSON, Y.SUPRIN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W.DE DONDER, A.GRUWE, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), A.WAJNBERG (journaliste scientifique)

Solution du Problemath 9 : $I(n) > 1$ pour tout $n > 0$. En effet, un ensemble irracible de $\mathbb{R}^n$ réduit à un seul point a est impossible car il y a au moins un point de $\mathbb{R}^n$ à distance 1 de a. $I(1) = 2$ car 0 et $\sqrt{2}$ forment un ensemble irracible de $\mathbb{R}$. En effet, tout nombre irrationnel est à distance irrationnelle de 0 et tout nombre rationnel r est à distance irrationnelle de $\sqrt{2}$ (car si $|\sqrt{2} - r| = r' \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = r \pm r' \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{2}$).

D'autre part, $I(n) \geq 3$ pour tout $n > 1$, car $I(n) = 2$ entraînerait l'existence d'un ensemble irracible formé de deux points a et b. Soit r un nombre rationnel plus grand que la demi-distance entre a et b; les deux sphères de rayon r centrées en a et b ont une intersection non vide et tout point de cette intersection est à distance rationnelle r de a et b, une contradiction.
On va prouver que $I(n) = 3$ pour tout $n > 1$. Soit α un nombre réel dont le carré est irrationnel (par exemple $\alpha = \pi$ ou, plus simplement, $\alpha = \sqrt[4]{2}$). Montrons que $\{(-\alpha, 0, \ldots, 0), (0, 0, \ldots, 0), (\alpha, 0, \ldots, 0)\}$ est un ensemble irracible de $\mathbb{R}^n$: s'il existait un point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à distance rationnelle de chacun de ces 3 points, on aurait

$$(x_1 + \alpha)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathbb{Q} \quad (1)$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathbb{Q} \quad (2)$$
$$(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

Mais $(1) - 2(2) + (3)$ donne $2\alpha^2 \in \mathbb{Q}$, donc $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$, contrairement au choix de α. En conclusion, $I(1) = 2$ et $I(n) = 3$ pour tout $n > 1$.
Corentin BODART (MA1 maths ULB) a prouvé que, si on impose en plus aux points d'un ensemble irracible d'être en position générale, alors le plus petit nombre de points d'un tel ensemble vaut $n + 1$ pour tout $n > 0$.
Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 5ème au Collège St Michel), T.FOUGEREUX (élève de Terminale S au Lycée David d'Angers), B.DUBUS (BA1 polytech ULB), R. HAYA ENRIQUEZ (BA2 maths UCL), S.KRECZMAN (BA2 maths ULg), C.BODART (MA1 maths ULB), L.GALANT (prof d'informatique), W. DE DONDER, A.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire).

LES PENSÉES DU JOUR
"*The only way to learn mathematics is to do mathematics*" (Paul HALMOS, mathématicien américain, 1916-2006) .
"*Tout mathématicien digne de ce nom a ressenti, même si ce n'est que quelquefois, l'état d'excitation lucide dans lequel une pensée succède à l'autre comme par miracle...Contrairement au plaisir sexuel, ce sentiment peut durer pendant plusieurs heures, voire plusieurs jours.*" (André WEIL, mathématicien français 1906-1998).
"*A logician is someone who, faced with the question "Do you have any more comments?" on a questionnaire, answers "Yes".*" (Peter CAMERON, mathématicien australien né en 1947).
"*On a beau intervertir l'ordre des facteurs, le courrier n'arrive pas plus vite.*" (Pierre DAC, humoriste français, 1893-1975).
Toute l'équipe Problemaths vous souhaite de joyeuses fêtes de fin d'année!
★ Adieu $1 - 2 + 3 + 4 \times 567 \times 8/9$
★ Bonjour $(1 + 2)!! + (3!)^4 + 5 + 6 - 7 + 8 - 9$
Nous vous offrons également un petit film désopilant pour vos soirées de réveillons:
https://www.youtube.com/watch?v=CsbJ8J9Ils0
ainsi qu'une "fake news" plus vraie que nature:
http://www.mathematik.uni-marburg.de/∼agricola/Trump-Riemann-Hypothesis.pdf