ULB

Corinne CERF
Pietro CASTOLDI
Monique PARKER

centre de documentation pédagogique

La théorie des nœuds, une théorie... attachante !

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-69-5

LA THÉORIE DES NŒUDS, UNE THÉORIE... ATTACHANTE !

Corinne Cerf,
Chercheur Qualifié du FNRS

Pietro Castoldi

Monique Parker

UREM
Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

ULB – CeDoP 2002

TABLE DES MATIERES

Avant-propos

Le texte qui suit est très fortement inspiré de deux exposés faits par Corinne Cerf à l'ULB, l'un au Cours-Atelier « Mathématiques du Secondaire » le 10 novembre 2000, l'autre au Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques « Altaïr » le 24 mars 2001.

Par rapport aux programmes de l'enseignement secondaire, la théorie des nœuds est totalement exotique. Alors pourquoi consacrer une publication du CeDoP à ce sujet ? On peut citer plusieurs raisons. L'histoire de la théorie des nœuds montre que la mathématique n'est pas figée, même des sujets apparus au siècle passé posent encore chaque jour de nouvelles questions. Les réponses à ces questions sont en général difficiles à expliquer car elles utilisent des constructions mathématiques extrêmement élaborées. De plus, la théorie des nœuds illustre bien une évolution récente des mathématiques et de la physique : des concepts et des formalismes issus de domaines très éloignés interagissent et donnent des résultats inattendus. Mais les motivations principales sont certainement d'ordre ludique et esthétique : la curiosité et le plaisir intellectuel de démêler un problème posé de multiples façons, indépendamment de son utilité immédiate.

Sans doute les enseignants de mathématique, de physique, de chimie ou de biologie ne peuvent-ils consacrer une leçon à ce sujet. Mais peut-être sera-t-il utile lors d'une digression, d'une allusion à l'extraordinaire corrélation entre l'outil mathématique et la description de la nature. Par exemple, les biologistes moléculaires ont établi que la double hélice de l'ADN est nouée et tressée au cours des recombinaisons et des réplications. Mais il est vraiment étonnant de constater combien les mécanismes mis en œuvre dans les cellules pour dénouer un nœud ressemblent aux méthodes mathématiques utilisées pour construire les invariants polynomiaux associés aux nœuds.

Le lecteur séduit par les nœuds pourra découvrir bien d'autres facettes du sujet dans le dossier « Pour la Science » [1].

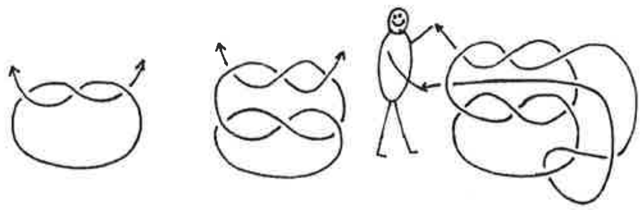
Et tout d'abord, un brin d'histoire

Les nœuds ont participé à l'histoire de l'humanité depuis plusieurs millénaires : nœuds de marins, jeux d'adresse de la ficelle enroulée autour des mains, tours de magie des prestidigitateurs, motifs décoratifs et entrelacs des enluminures celtes. Cependant, la théorie mathématique des nœuds est née il y a environ un siècle, d'une volonté d'explication de l'univers.

Vers 1860, William Thomson, qui deviendra plus tard Lord Kelvin, propose une synthèse des deux théories de l'époque concernant la structure de la matière (corpusculaire et ondulatoire). D'après lui, la matière serait bien constituée d'atomes appelés « vortex atoms » (atomes-tourbillons) qui ne sont pas des objets ponctuels mais des petits nœuds. Un atome serait donc comme une onde qui, au lieu de se propager dans toutes les directions, se déploierait en un étroit faisceau fortement recourbé et revenant sur lui-même. C'est le type du nœud qui déterminerait les propriétés physico-chimiques de l'atome. La classification des atomes est ainsi ramenée à un problème mathématique, la classification des nœuds, et c'est Peter Tait qui s'attelle à cette tâche. Avec C. N. Little, il publie à la fin du 19ème siècle une table des nœuds dont les projections présentent au maximum 10 croisements. Cette table contient 249 nœuds différents et ce n'est qu'un siècle plus tard qu'une duplication est détectée. La théorie de Thompson sur la structure de la matière est bientôt abandonnée, mais la théorie des nœuds est lancée.

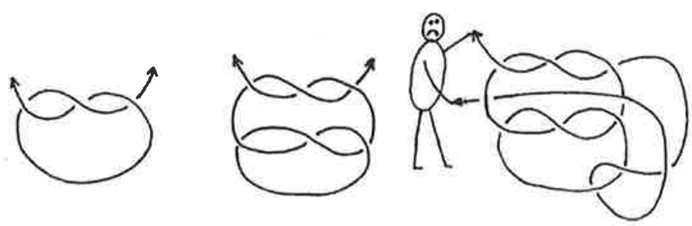
Noué ou non noué ?

Un tour de magie bien connu consiste à faire plusieurs nœuds dans une ficelle et à ensuite la dénouer en tirant doucement sur les extrémités. Vous pouvez tenter l'expérience en suivant le mode d'emploi décrit dans les trois dessins suivants :



Les deux premières étapes sont claires. Ensuite vous passez le brin de droite dans la boucle du bas par-dessus puis dans la boucle du haut, également par-dessus. Le triple nœud ainsi obtenu semble fort compliqué, mais il disparaît comme par enchantement quand on tire les extrémités de la ficelle.

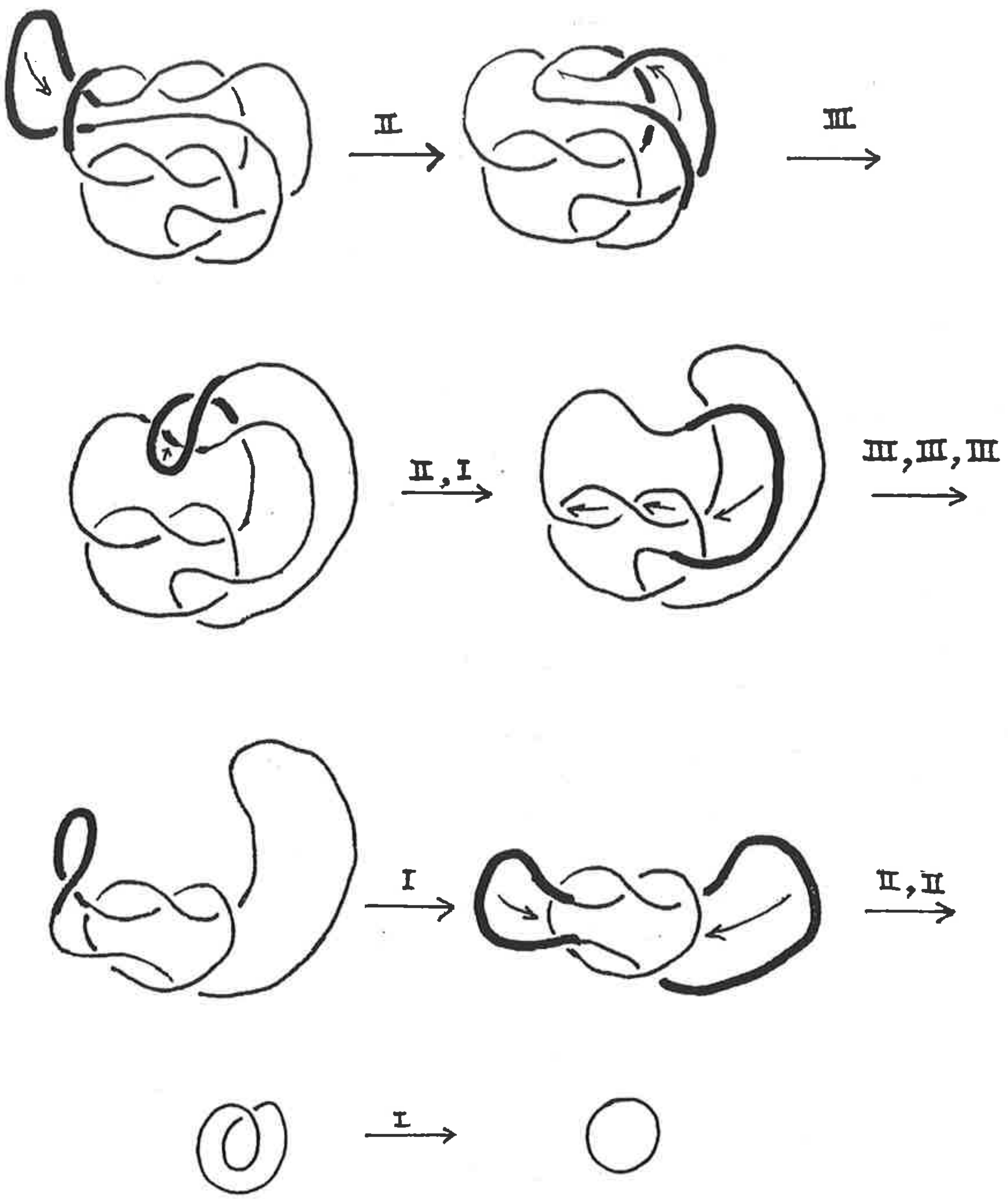
Recommencez à présent le même exercice en modifiant très légèrement la deuxième étape. La première et la troisième étape restent inchangées.



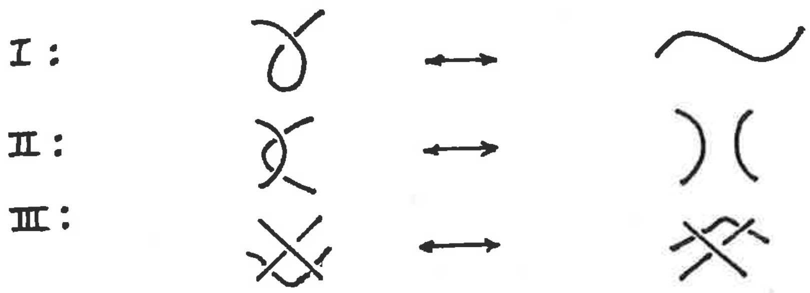
Raté ! Les nœuds ne disparaissent plus. Pouvait-on prévoir ceci ?

Essayons de préciser ce qui s'est passé. Dans le premier cas, on a déformé la ficelle nouée en une ficelle « droite », sans lâcher les extrémités. Autrement dit, la ficelle dont on tient les extrémités est une courbe fermée dans l'espace, et le problème revient à voir si on peut la déformer en une simple boucle sans la couper. Remarquons que cette question n'a de sens que si les extrémités de la ficelle ont été recollées (courbe *fermée*) car sinon on peut toujours (avec de la patience) défaire n'importe quel nœud.

Montrer qu'il existe une solution est en général relativement aisé : il « suffit » de l'exhiber. Par contre, prouver qu'il n'en existe aucune est souvent difficile. Ainsi, le triple nœud obtenu par la première manipulation se déforme en la boucle triviale par la suite de mouvements dessinés ci-dessous :



Les chiffres I, II et III au-dessus des flèches indiquent le type de mouvement qui permet chaque fois de simplifier le nœud :



Si ce bricolage permet de montrer que le premier triple nœud est bien déformable en une boucle triviale, il n'explique pas pourquoi le second triple nœud est resté noué. Il existe cependant un théorème qui pourrait être utile. Pour l'énoncer, il nous faut préciser quelques termes :

• Un *nœud* est une courbe fermée (c'est-à-dire dont les extrémités sont collées) dans l'espace, sans point d'intersection.
• Deux nœuds sont *isotopes* si l'un peut être déformé en l'autre de façon continue (un brin ne peut ni être coupé ni passer à travers un autre brin).

Nous pouvons à présent énoncer le *théorème de Reidemeister* (1932):
Deux nœuds sont isotopes si et seulement si leurs projections peuvent être reliées par une suite finie de mouvements des types I, II, III ci-dessus, appelés mouvements de Reidemeister.

Pour montrer que le triple nœud récalcitrant n'est pas isotope au nœud trivial il suffirait donc de prouver qu'aucune suite de mouvements de Reidemeister ne transforme l'un en l'autre. Mais comme la succession de mouvements est aussi longue qu'on veut… il n'y a aucun espoir de ce côté.

Invariant d'un nœud

Pour décider si deux nœuds sont isotopes ou non, les mathématiciens s'efforcent de leur associer un objet mathématique (nombre, polynôme, groupe) qui reste inchangé lorsque le nœud subit une déformation continue. Mais il n'existe à ce jour pas d'invariant complet d'un nœud. Cela signifie que:

Invariant(nœud 1) $\neq$ *Invariant(nœud 2)* implique *nœud 1* $\neq$ *nœud 2*

Mais la réciproque est fausse : des nœuds non isotopes peuvent avoir le même invariant.

Par exemple, un invariant du nœud est le *nombre minimum de croisements* que présente ce nœud dans une représentation plane. Il est clair que plusieurs nœuds non isotopes peuvent avoir le même nombre minimum de croisements. De plus, cet invariant est difficile à déterminer : comment être sûr qu'il n'existe aucun diagramme du même nœud comportant moins de croisements ?

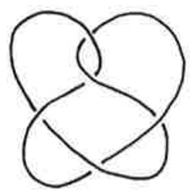
Une autre méthode de classification des nœuds consiste à leur associer un polynôme. Nous allons examiner deux d'entre eux, le *polynôme d'Alexander* (1928) et le *polynôme de Jones* (1984).

Le polynôme d'Alexander

Comment calculer le polynôme d'Alexander d'un nœud ?

Première étape

1. Dessinez le nœud en prenant soin de bien distinguer à chaque croisement le brin qui passe en dessous de celui qui passe au-dessus. Voici, par exemple, une représentation d'un nœud comportant n = 5 croisements.

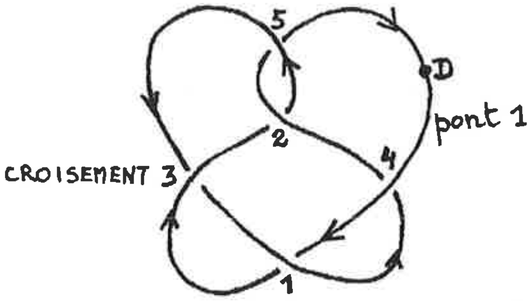


   On « voit facilement » (après l'avoir réalisé avec un bout de ficelle ?) qu'il s'agit d'un vrai nœud et que le nombre de croisements ne peut pas être réduit par des mouvements de Reidemeister.

2. Interprétez le nœud comme un circuit routier que l'on parcourt en sens unique. Quand on arrive à un croisement, on dit qu'on entre dans un tunnel si l'on passe en dessous et on dit qu'entre deux tunnels consécutifs on se trouve sur un pont. Donc on passe deux fois par chaque croisement, une fois par le tunnel et une fois par le pont qui le surplombe.

3. Choisissez arbitrairement un sens de circulation et un point de départ D (qui ne soit pas un croisement) et numérotez successivement de 1 à n les tunnels empruntés avant de retrouver le point de départ. Attribuez à chaque croisement le numéro d'ordre de son tunnel et à chaque pont le numéro d'ordre du tunnel auquel il aboutit.

4. Attribuez à chaque croisement un signe (+) si, pour celui qui emprunte le tunnel, la circulation sur le pont qui surplombe va de la gauche vers la droite ; attribuez-lui le signe (–) dans le cas contraire. Voici le début du travail dans notre exemple :



5. On peut donc associer à chaque croisement son numéro d'ordre i, le numéro d'ordre k du pont qui le surplombe et le signe tel que déterminé au point 4. La situation est résumée dans un tableau à n lignes et 3 colonnes qui, dans l'exemple, est :

i ↓	k ↓	signe ↓
1	4	(–)
2	5	(–)
3	2	(–)
4	1	(–)
5	3	(–)

Ce tableau encode le nœud de manière trop fidèle pour qu'il soit un invariant (une simple torsion peut modifier le nombre des croisements et donc des lignes), mais il permet de passer à la

Deuxième étape

1. Construisez une matrice n x n, dite matrice du nœud, dont les éléments (i , j), j = 1, 2, …, n, de la ligne i, sont donnés par les règles suivantes :

   1er cas : si le numéro k du pont qui surplombe le croisement i vaut i ou i + 1, poser

$$(i , i) = -1$$
$$(i , i+1) = +1$$
$$(i , j) = 0 \qquad \text{pour les autres valeurs de } j$$

(ce cas ne se présente pas dans notre exemple)

$2^{ème}$ cas : si le numéro k du pont qui surplombe le croisement i est tel que $k \neq i$ et $k \neq i + 1$ et si le signe du croisement est (+), poser

$(i , i) = 1$
$(i , i+1) = - t$
$(i , k) = t - 1$
$(i , j) = 0$ pour les autres valeurs de j
(ce cas ne se présente pas dans notre exemple)

$3^{ème}$ cas : si, comme dans le $2^{ème}$ cas, $k \neq i$ et $k \neq i+1$, mais si le signe du croisement est (–), poser

$(i , i) = - t$
$(i , i+1) = 1$
$(i , k) = t - 1$
$(i , j) = 0$ pour les autres valeurs de j
(c'est le cas qui se présente dans notre exemple)

Remarque: quand i = n, remplacez l'indice de colonne j = n +1 par j = 1. Pour notre exemple, vous obtenez la matrice 5 x 5 :

$$\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 & t-1 \\ 0 & t-1 & -t & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & 0 & -t & 1 \\ 1 & 0 & t-1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

Il est clair que cette matrice n'est pas plus invariante que le tableau récapitulatif dont elle provient.

2. Supprimez, au choix, une ligne et une colonne de la matrice, c'est-à-dire considérez un mineur (n –1) x (n –1) arbitraire. Calculez le déterminant de ce mineur : vous obtenez un polynôme en t à cœfficients entiers de degré non supérieur à n –1 .

   Dans notre exemple, en supprimant la $5^{ème}$ ligne et la $5^{ème}$ colonne, le déterminant du mineur 4 x 4 ainsi obtenu est le polynôme:

$$2t^3 - 3t^2 + 2t$$

3. Si besoin est, divisez ce polynôme par une puissance de t et/ou changez tous les signes pour obtenir un polynôme $\Delta(t)$ dont le terme de plus bas degré est un entier positif. C'est le *polynôme d'Alexander* du nœud ! Dans notre exemple:

$$\Delta(t) = 2t^2 - 3t + 2$$

Quelques commentaires

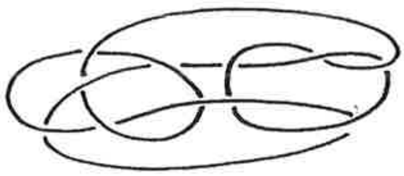
Sans pouvoir fournir ici la moindre justification, nous énonçons le théorème : *le polynôme d'Alexander est un invariant du nœud.* Par conséquent, si deux nœuds sont isotopes, alors ils ont le même polynôme d'Alexander, ou, si l'on préfère, si deux nœuds n'ont pas le même polynôme, alors ils ne sont pas isotopes.

Ceci permet déjà de vérifier que la ficelle récalcitrante de notre second exemple avait raison de rester nouée. En effet, son polynôme d'Alexander vaut:

$$\Delta(t) = t^8 - 3t^7 + 4t^6 - 5t^5 + 5t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 3t + 1$$

Le polynôme d'Alexander du premier exemple est bien égal à 1, comme il se doit pour un nœud trivial.

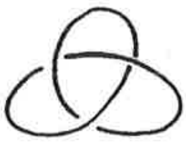
Hélas, la perfection n'est pas de ce monde : le polynôme d'Alexander ne permet pas de distinguer tous les nœuds. Il ne permet même pas de décider si une courbe fermée est nouée ou non ! Voici par exemple un nœud dont le polynôme d'Alexander vaut 1, et cependant ce nœud n'est pas isotope au nœud trivial :



Pour prouver que ce nœud est non trivial, il faut utiliser un invariant plus puissant, par exemple le polynôme de Jones.

Le polynôme de Jones

Faites un nœud dans une ficelle (un seul !) et collez les extrémités. Vous obtenez le nœud de trèfle, ou plutôt l'un des deux nœuds de trèfle, images miroirs l'un de l'autre :

(a)  (b) 

Aucune déformation continue ne permet de transformer l'un en l'autre, ces deux nœuds ne sont pas isotopes. Malheureusement, le polynôme d'Alexander ne distingue pas le nœud de trèfle (a) du nœud de trèfle (b) : dans les deux cas, $\Delta(t) = t^2 - t + 1$.

Le premier invariant distinguant un nœud de son image miroir est le *polynôme de Jones*. Pour ce résultat, datant de 1984, Vaughan F. R. Jones a reçu en 1990 la médaille Fields (l'équivalent, pour les mathématiques, du prix Nobel).

Beaucoup d'invariants polynomiaux associés à un nœud ne sont pas des polynômes au sens habituel des mathématiciens ; ils peuvent contenir des puissances négatives de la variable ! De plus, la démarche suivie pour associer un « polynôme » à un nœud est assez sophistiquée. Comme pour le polynôme d'Alexander, nous allons nous contenter de construire le polynôme de Jones sans démontrer qu'il constitue un invariant du nœud. Le lecteur curieux (ou matheux…) trouvera en Appendice la construction du polynôme de Jones faite par Kauffman (1987) où l'invariance du polynôme est imposée par la construction elle-même.

Comment calculer le polynôme de Jones d'un nœud ?

L'idée générale est la suivante. On obtient le polynôme de Jones V(N) d'un nœud N, à une variable t, par récurrence :

On pose V(O) = 1 pour le nœud trivial O et on « démonte » un nœud quelconque par une utilisation répétée de la *relation de Jones* qui lie les polynômes de trois nœuds qui ne diffèrent que par un seul croisement. Cette relation, que nous désignons par (J), est la suivante :

$$t^{-1} . V(⤫) - t . V(⤬) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) . V()() \quad (J)$$

A titre d'exemple, nous allons « démonter » le nœud de trèfle. Nous entourons d'un petit cercle le croisement auquel nous appliquons la relation (J).

Première étape

TREFLE

NŒUD TRIVIAL

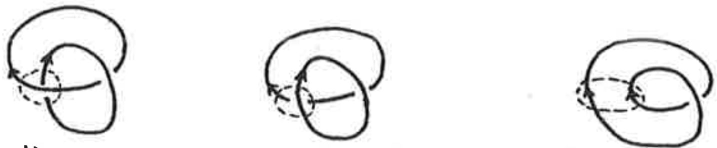
CHAINE A DEUX ANNEAUX
APPELEE ENTRELACS DE HOPF

Nous obtenons la relation :

$$t^{-1} . V(\text{nœud trivial}) - t . V(\text{trèfle}) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) . V(\text{Hopf})$$

Deuxième étape

Pour calculer V(Hopf), nous utilisons à nouveau la relation (J) :

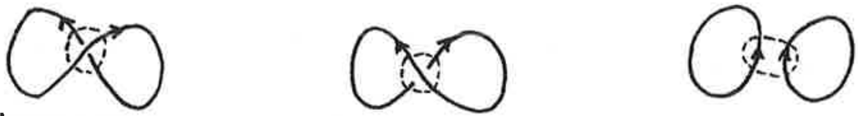


HOPF — 2 NŒUDS TRIVIAUX — NŒUD TRIVIAL

Ce qui donne :

$$t^{-1} \,.\, V(\text{2 nœuds triviaux}) - t \,.\, V(\text{Hopf}) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \,.\, V(\text{nœud trivial})$$

Troisième étape



NŒUD TRIVIAL — NŒUD TRIVIAL — 2 NŒUDS TRIVIAUX

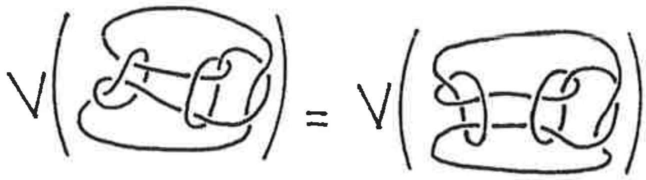
Puisque V(nœud trivial) = 1, on obtient :

$$t^{-1} - t = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \,.\, V(\text{2 nœuds triviaux})$$

Il suffit alors d'un peu d'algèbre élémentaire pour arriver à :

$$V(\text{trèfle}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Malheureusement, le polynôme de Jones non plus ne permet pas de distinguer tous les nœuds :



De plus, on espère qu'un nœud dont le polynôme de Jones est égal à 1 est nécessairement isotope au nœud trivial, mais cette conjecture n'est toujours pas démontrée. Cependant, le polynôme de Jones a une propriété fort intéressante : c'est le premier invariant distinguant un nœud de son image miroir. Par exemple, pour l'autre nœud de trèfle, on trouve $V = -t^4 + t^3 + t$.

Mais pourquoi les mathématiciens veulent-ils distinguer un nœud de son image miroir ? Cette notion de *chiralité* des nœuds, c'est-à-dire la propriété qu'ont certains nœuds d'être différents de leur image miroir, comme la main droite est différente de la main gauche (le mot *chiralité* vient du grec χειρ, main), provient en fait d'une incursion de la théorie des nœuds en chimie (ou l'inverse…).

Chiralité chimique et chiralité topologique

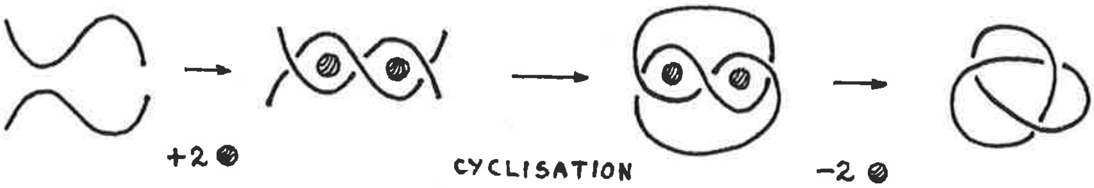
On dit qu'une molécule est *chimiquement chirale* si sa structure ne peut être déformée en son image miroir par des mouvements intramoléculaires réalisables. La chiralité chimique est une propriété observable : les images miroirs (appelées *énantiomères*) d'une molécule chirale ont des comportements différents, ce qui est important dans le cas de médicaments, car souvent seul l'un des énantiomères est physiologiquement actif. Un objet est dit *topologiquement chiral* s'il ne peut être déformé en son image miroir de façon continue, c'est-à-dire sans se traverser ni être coupé.

Les mathématiques ne peuvent bien sûr pas nous dire quels mouvements intramoléculaires sont réalisables. Mais une molécule totalement flexible, dans laquelle tous les mouvements seraient autorisés, peut être identifiée à un objet topologique. Si cette molécule est topologiquement chirale, sa structure ne peut être déformée en son image miroir par des mouvements continus, quels qu'ils soient, *a fortiori* par des mouvements intramoléculaires réalisables. Elle est donc chimiquement chirale. *La chiralité topologique implique la chiralité chimique.* Il est à noter que la réciproque est fausse. Pour des détails sur ce sujet voir [4], chapitre 1.

Mais la chiralité n'est pas le seul lien entre la chimie et la théorie des nœuds.

Topologie moléculaire

Grâce aux clichés de microscopie électronique, on sait que les molécules d'ADN et les protéines s'entrelacent et se nouent. Mais les chimistes s'appliquent aussi, depuis bien longtemps, à fabriquer des composés de synthèse ayant des propriétés topologiques déterminées. Le nœud de trèfle a par exemple stimulé l'imagination des chimistes de synthèse durant plus de 30 ans. Il a fallu attendre 1989 pour que soit synthétisée la première molécule nouée en nœud de trèfle : deux noyaux métalliques servent à former une double hélice à trois croisements et il suffit alors de relier les extrémités libres.



La synthèse de ce composé noué produit indifféremment des nœuds droits ou gauches. Le signe de chaque éniantomère correspond au sens d'enroulement de la double hélice qui constitue le cœur de la molécule. En 1996, on a réussi à séparer les deux éniantomères d'un nœud de trèfle à deux atomes de cuivre monovalent et il semble bien que leurs propriétés optiques soient prometteuses.

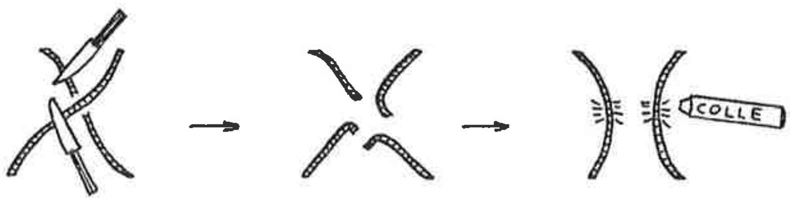
ADN

La topologie de l'ADN joue un rôle important dans tous les processus biochimiques que subit la cellule. Pour modifier la topologie de l'ADN, des enzymes appelées *topoisomérases* et *recombinases* entrent en action. Il est fascinant de constater la ressemblance entre les opérations effectuées par ces enzymes sur la molécule d'ADN et les « opérations chirurgicales » effectuées sur les nœuds lors des relations de récurrence utilisées pour calculer un invariant polynomial (par exemple, la *relation de Jones* (J)).

Les *topoisomérases* coupent un brin de la double hélice d'ADN (ou les deux brins) puis font passer le reste de la molécule à travers la coupure avant de recoller les bouts. Cette manipulation est essentielle par exemple pour relâcher la tension qui naît dans la molécule suite à une réplication.

Comparez ce schéma à V(⤫) et V(⤪) dans la relation (J). La ressemblance n'est-elle pas étonnante ?

Les *recombinases* sont des enzymes qui coupent deux molécules d'ADN voisines puis recollent les bouts autrement (en joignant un bout d'une molécule à un bout de l'autre et vice-versa). Ce phénomène se passe notamment lors de la méiose. C'est le célèbre « crossing-over » qui explique que chaque individu nouvellement créé hérite d'une partie des gènes maternels et d'une partie des gènes paternels.



Cette fois, on retrouve une analogie parfaite avec V(⤫) et V()() dans la relation (J).

Et maintenant ? Les invariants de Vassiliev

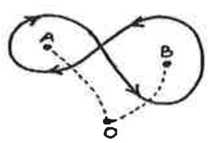
L'histoire des invariants associés à un nœud ne s'arrête pas là. Plusieurs mathématiciens ont tenté d'améliorer le polynôme de Jones, mais le premier à avoir proposé une approche vraiment nouvelle et prometteuse est Victor Vassiliev (Moscou 1990). Au lieu d'essayer de définir un « meilleur » polynôme, il a eu l'idée d'adapter aux nœuds la théorie des catastrophes, créée il y a plus de 30 ans et célèbre par ses multiples applications à des domaines aussi variés que la météorologie, la biologie, la finance, l'économie, etc. Nous allons tenter une petite incursion au cœur des invariants de Vassiliev.

Parlons d'abord d'autre chose

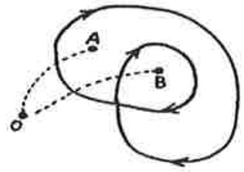
Une courbe plane fermée qui ne se coupe pas est une frontière qui partage le plan en deux régions : celle à l'intérieur de la courbe et celle à l'extérieur.

Autorisons maintenant la courbe à se couper et de plus, munissons-la d'une orientation, d'un sens de parcours (ne pas s'intéresser pour l'instant aux chemins qui relient le point O aux autres points).

a)

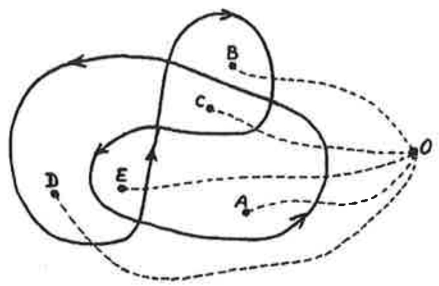


b)



Le plan cette fois semble partagé en une région extérieure, celle qui contient le point O, et une ? ou deux ? régions intérieures. On peut hésiter : si nous suivons la courbe a) dans le sens indiqué, la région qui contient le point A est à notre droite, tandis que celle qui contient le point B est à notre gauche. Si nous suivons la courbe b), l'intérieur est toujours à notre droite, mais la région qui contient le point B semble être elle-même à l'intérieur de la région qui contient le point A. Si maintenant nous examinons la courbe c), la situation devient inquiétante et nous pouvons nous demander s'il n'y a pas une procédure permettant de caractériser les différentes régions du plan.

c)



Procédure permettant de clarifier la situation

i) Prenons un point O situé dans la région extérieure comme point de référence et traçons des chemins qui joignent O aux points dans les différentes régions délimitées par la courbe. Ces chemins coupent une ou plusieurs fois la frontière constituée par la courbe.

ii) Attribuons au point O de départ une valeur numérique arbitraire, disons 0 ; attribuons aux points de la courbe (c'est-à-dire aux points frontières) une valeur arbitraire non nulle, disons 1.

iii) En partant du point O et de sa valeur 0, à chaque fois que le chemin coupe la courbe, nous ajoutons (+1) si la courbe va vers la droite et (–1) si la courbe va vers la gauche.

iv) Attribuons au point d'arrivée la valeur finale ainsi obtenue.

Dans le cas de la courbe c) :

les points de la région A valent +1
les points de la région B valent –1
les points de la région C valent 0
les points de la région D valent +1
les points de la région E valent +2
les points de la région O valent 0

Nous avons admis que les points d'une même région, pouvant être reliés par un chemin qui ne rencontre aucune frontière, ont tous la même valeur. Il faudrait le démontrer, mais quelques exemples nous convaincront que la procédure est cohérente : la valeur d'un point ne dépend pas du chemin suivi, elle est donc un invariant du point.

Bien sûr, un changement de la valeur du point de référence, de l'orientation de la courbe ou de la valeur de ses points, n'apporte qu'une modification inessentielle à la valeur des points de l'espace. Nous pouvons aussi nous contenter de calculer la différence entre les valeurs de deux points. Nous pourrons alors examiner le chemin qui les relie, sans passer par le point de référence.

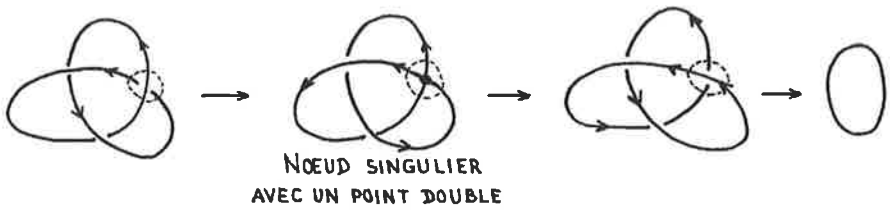
Moralité

Dans un espace partagé en régions par des frontières, nous pouvons attribuer aux points des différentes régions des valeurs déterminées par la nature des chemins qui les relient, par les frontières à traverser, par la manière de les traverser, et par la valeur des points frontières.

Revenons à nos nœuds

L'espace que nous allons considérer est celui qui contient *tous* les nœuds, le nœud trivial, le nœud de trèfle, etc... Nous devons décider ce que nous appelons chemin, nœud de référence, région, frontière, ... Nous pouvons relier deux nœuds isotopes par des mouvements de Reidemeister, c'est-à-dire par un chemin qui ne rencontre aucun obstacle : un nœud et tous ses isotopes constitueront une région. Le nœud trivial peut être pris comme nœud de référence, mais comment définir la frontière qui sépare sa région de celle du nœud de trèfle ? et comment la traverser ?

Idée géniale : prenons un nœud de trèfle et, comme s'il était fait d'une matière malléable, écrasons un de ses croisements (celui indiqué par un petit cercle dans la figure ci-dessous, par exemple) et obligeons le brin qui passait au-dessus à passer en dessous, changeons donc le signe du croisement. Nous obtenons le nœud trivial, mais nous avons transité par une phase où l'objet dans nos mains n'était plus un nœud au sens strict, puisqu'il présentait un point double. Appelons cet objet *nœud de trèfle singulier*, c'est lui qui constitue la frontière entre le (vrai) nœud de trèfle et le nœud trivial.

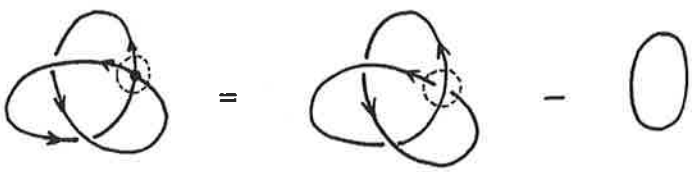


Donnons une valeur au nœud trivial ; que faut-il ajouter ou retrancher à la valeur d'un nœud lors du passage d'une frontière ? Autrement dit, que vaut la différence entre les valeurs de deux nœuds qui ne diffèrent que par le signe d'un croisement ? La démarche est analogue au point (ii) de la procédure décrite plus haut. On utilise la règle suivante (dite *règle de résolution*):

Val(⨯) = Val(⤫) – Val(⤪)

Les trois nœuds sont identiques partout sauf au croisement indiqué. Comme cas particulier, nous avons le nœud singulier le plus simple à un point double, qui vaut 0 puisqu'il se résout en deux fois le même nœud trivial :

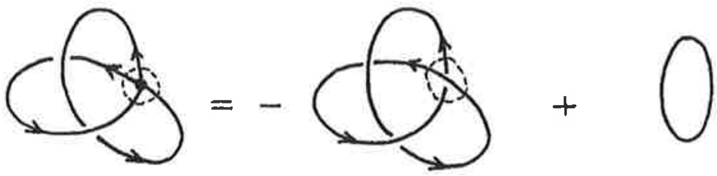
Dans le cas du nœud de trèfle :



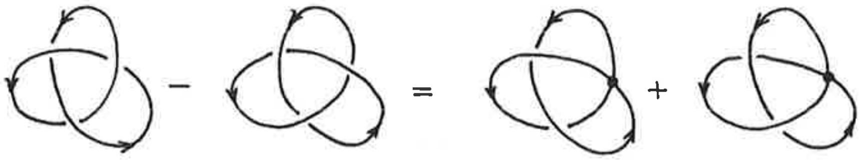
Nous venons d'effectuer un (tout) petit pas dans la bonne direction : la différence entre la valeur du nœud du trèfle et celle du nœud trivial est la valeur attribuée au nœud singulier à un point double qui constitue la frontière entre les deux. Si cette valeur n'est pas nulle, le nœud de trèfle est bien différent du nœud trivial.

N'oublions pas l'autre nœud de trèfle !

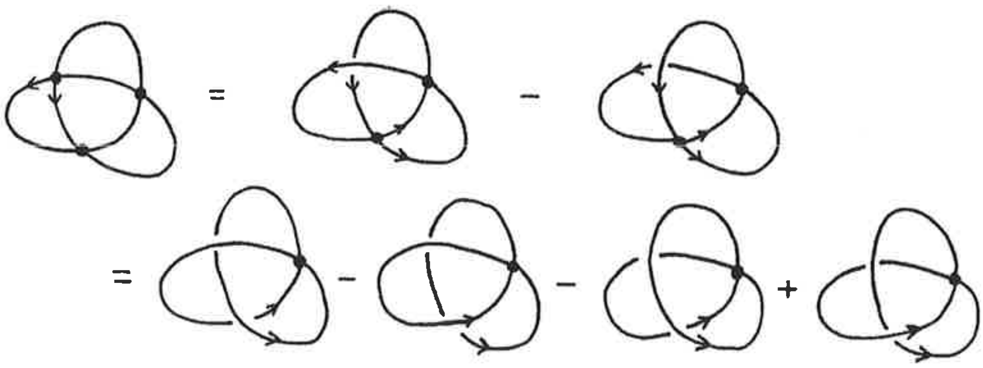
En utilisant la règle de résolution, nous obtenons :



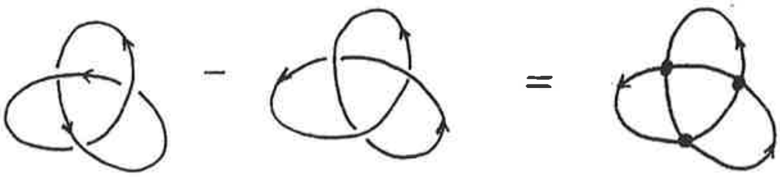
Nous pouvons combiner les deux dernières lignes et obtenir la différence entre les nœuds de trèfle :



Un problème, toutefois, se pose : les deux nœuds singuliers à *un* point double, appelons-les *nœuds singuliers d'ordre 1*, diffèrent par le signe de deux croisements. Pouvons-nous attribuer à chacun de ces nœuds singuliers une valeur arbitraire, ou, au contraire, y a-t-il une corrélation entre les deux valeurs ? Solution du problème : pour passer d'un nœud singulier d'ordre 1 à l'autre, il faut d'abord changer le signe d'un premier croisement, et transiter par des nœuds singuliers d'ordre 2 (avec 2 points doubles), changer ensuite le signe du dernier croisement en transitant par un nœud singulier d'ordre 3 (avec 3 points doubles). Partons de celui-ci et appliquons deux fois la règle de résolution :



Et finalement:



En conclusion, la différence de valeur entre les deux nœuds de trèfle est égale à la valeur du nœud singulier d'ordre 3. Si cette valeur n'est pas nulle, les deux nœuds de trèfle sont bien différents. Si elle est nulle, les deux nœuds singuliers d'ordre 1 considérés plus haut ont des valeurs opposées, et les deux nœuds de trèfles ne sont pas différenciés.

Nous pouvons à présent dire (enfin !) ce que sont ces invariants de Vassiliev

Un *invariant de Vassiliev d'ordre n* est une fonction qui attribue une valeur numérique à chacun des nœuds (vrai nœud ou nœud singulier), en respectant la règle de résolution, et qui est nulle sur les nœuds singuliers d'ordre n+1. Pour définir de telles fonctions, il faut attribuer des valeurs bien choisies à certains nœuds singuliers.

Plus modestement, en essayant de généraliser au grand espace de tous les nœuds ce que nous avons appris dans un mini-espace ne contenant que le nœud trivial et les deux nœuds de trèfle, nous pouvons entrevoir certaines des propriétés de ces fonctions.

A) Les nœuds singuliers permettent le passage d'un nœud à un autre. Le chemin qui relie deux nœuds singuliers d'un ordre donné transite par des nœuds singuliers d'ordre supérieur : les frontières sont à leur tour partagées par des frontières.

B) Si les nœuds singuliers d'ordre n sont tous de valeur nulle, alors les nœuds singuliers d'ordre n +1 (et donc d'ordre n + 2, …) sont aussi de valeur nulle : il suffit de résoudre un point double d'un nœud singulier d'ordre n +1 pour aboutir à deux nœuds singuliers d'ordre n.

C) L'invariant d'ordre 0 n'est pas intéressant, puisqu'il ne différencie aucun nœud. En effet tout (vrai) nœud peut être ramené au nœud trivial en changeant le signe d'un ou plusieurs croisements et en passant par des nœuds singuliers d'ordre 1, 2, … de valeur nulle. On dira que cet invariant est trivial.

D) L'invariant de Vassiliev d'ordre 1 est aussi sans intérêt puisqu'il attribue une valeur nulle, non seulement aux nœuds singuliers d'ordre 2, 3,… (ce qu'il doit faire), mais aussi aux nœuds singuliers d'ordre 1. En effet, tout nœud singulier comportant un seul point double et d'autres croisements « normaux » peut être ramené, en passant par des nœuds singuliers d'ordre 2, 3, … de valeur nulle, au nœud singulier d'ordre 1 sans croisement (notre « cas particulier » plus haut). Mais nous avons vu que la valeur de ce dernier est nécessairement nulle.

E) Par contre, un invariant de Vassiliev d'ordre 2 n'est pas trivial. Comme nous l'avons vu, certains nœuds commencent à se différencier (les deux nœuds de trèfle ne sont pas équivalents au nœud trivial, bien que équivalents entre eux).

F) Un invariant d'ordre 3 permet, par exemple, de différencier les deux nœuds de trèfle.

G) Les invariants de Vassiliev deviennent de plus en plus perspicaces quand leur ordre augmente. L'espoir est que deux nœuds quelconques (non isotopes) puissent toujours être différenciés par un invariant d'ordre assez élevé. Jusqu'à présent, cela n'est pas démontré, mais on n'a trouvé aucun contre-exemple.

Appendice :
Le polynôme de Jones (approche de Kauffman)

Première étape

On associe au nœud N un polynôme appelé *polynôme crochet*, noté < N >, à trois variables A, B, C, défini de façon axiomatique par les trois règles :

(1) $< O > = 1$

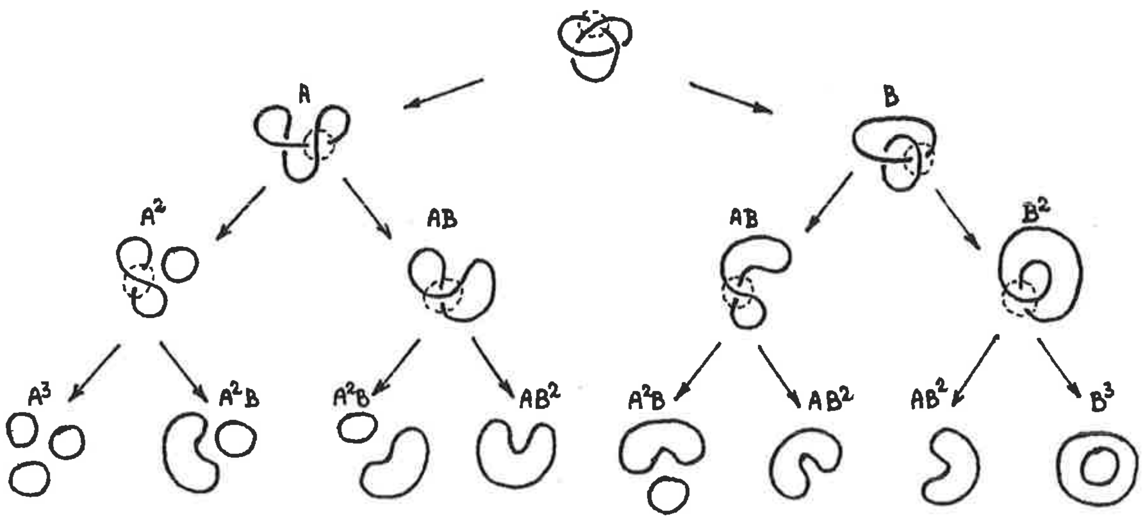
(2) $< \times > = A \,.\, <)(> + B \,.\, < \asymp >$

(3) $< N\ O > = C \,.\, < N >$

Dans la règle (3), la notation N O désigne la réunion disjointe du nœud N et du nœud trivial O. Ainsi,

$$< O\ O > = C \,.\, < O > = C \,.\, 1 = C$$

A titre d'exemple, calculons le polynôme < N > lorsque N est l'un des deux nœuds de trèfle (appelons-le nœud de trèfle *gauche*). A chaque stade, nous entourons d'un petit cercle le croisement auquel nous appliquons l'une des règles de la définition axiomatique.



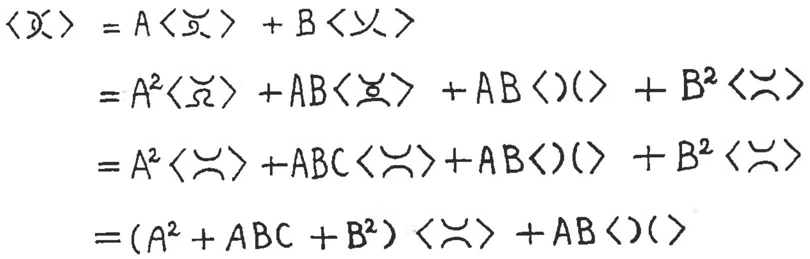
On obtient ainsi le polynôme crochet à trois variables:

$$< N > = A^3 C^2 + 3\, A^2 B\, C + 3\, A\, B^2 + B^3\, C$$

Deuxième étape

Il faut à présent imposer des conditions sur A, B, C pour que le polynôme < N > soit un invariant du nœud. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que le polynôme soit inchangé par les trois mouvements de Reidemeister.

Imposons l'invariance par les mouvements de type II :



On veut avoir:

$$\langle \asymp\!\!\!\!\times \rangle = \langle)(\rangle$$

On impose donc :

$$AB = 1 \quad \text{et} \quad A^2 + A\,B\,C + B^2 = 0$$

Ou encore,

$$B = A^{-1} \quad \text{et} \quad C = -\,A^2 - A^{-2}$$

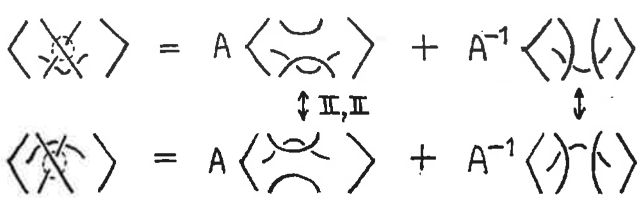
On obtient ainsi un nouveau polynôme crochet, à une variable A. Par exemple, pour le nœud de trèfle gauche,

$$< N > = A^7 - A^3 - A^{-5}$$

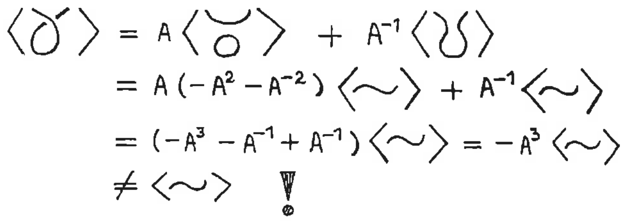
La règle (2) s'écrit maintenant :

(2) $\langle \times \rangle = A \,.\, \langle)(\rangle + A^{-1} \,.\, \langle \asymp \rangle$

Examinons à présent les mouvements de type III :



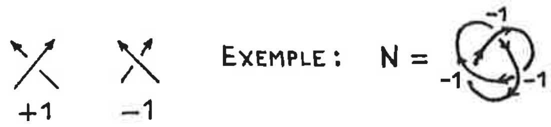
Ils n'imposent aucune nouvelle condition. Malheureusement, les mouvements de type I nous réservent une mauvaise surprise :



Hélas, le polynôme crochet à une variable n'est pas un invariant du nœud… mais on va s'en sortir en le normalisant.

Troisième étape

Cette normalisation consiste à multiplier le polynôme crochet $< N >$ par $(-A^3)^{-w(N)}$ où w(N) est le « writhe » (vrillage) du nœud N. Cette expression barbare recouvre une notion fort simple. On choisit une orientation sur la courbe et une convention de signe pour chaque croisement :



Le vrillage est la somme des +1 et des −1 quand on parcourt le nœud. Ainsi, pour le nœud de trèfle gauche, on trouve w(N) = −3. Et le miracle se produit :

$P(N) = (-A^3)^{-w(N)} . < N >$ *est un invariant du nœud !*

Et pour terminer…

Pour terminer (en beauté), nous allons montrer que ce polynôme P(N) vérifie la relation de Jones (J).

Reprenons la règle (2) ayant servi à définir le polynôme crochet à une variable A :

< ╳ > = A . <)(> + A^{-1} . < ⌣⌢ >

En tournant l'angle de vue d'un quart de tour, cette relation devient :

< ╳ > = A . < ⌣⌢ > + A^{-1} . <)(>

En additionnant la première relation multipliée par (– A) et la seconde multipliée par A^{-1}, on obtient :

$$- A < ⤫ > + A^{-1} . < ⤬ > = - A^{2} . <)(> - < ≍ > + < ≍ > + A^{-2} <)(>$$
$$= (A^{-2} - A^{2}) <)(>$$

Pour obtenir le polynôme normalisé P(N) d'un nœud N, il faut multiplier le polynôme crochet par $(- A^{3})^{-w(N)}$ où w(N) est le vrillage du nœud N. Comme $w(⤫) = +1$, $w(⤬) = -1$, $w()() = 0$, on a :

$$A^{4}\, P(⤫) - A^{-4}\, P(⤬) = (A^{-2} - A^{2})\, P()()$$

Enfin, en remplaçant A par $t^{-1/4}$, on retrouve bien la relation (J) ayant servi à construire le *polynôme de Jones.* Ainsi, pour le nœud de trèfle gauche :

$$< N > = A^{7} - A^{3} - A^{-5}$$

$$P(N) = - A^{16} + A^{12} + A^{4}$$

$$V(N) = - t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Quelques références

[1] "La Science des Nœuds"
Dossier Pour la Science, Avril 1997.

Notre avis : Dossier magnifique. Encore possible de le commander.

[2] "The Knot Book : An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots"
Colin C. Adams, W. H. Freeman and Company, 1ère édition en 1994, nouvelle édition couverture souple en 2001.

Notre avis : Le meilleur livre sur la théorie mathématique des nœuds pour non spécialistes. Contient les références des principaux articles originaux.

[3] "Nœuds : Genèse d'une Théorie Mathématique"
Alexei Sossinsky, Editions du Seuil, 1999.

Notre avis : A l'avantage d'être écrit en français. Très lisible pour comprendre les grandes idées du sujet, mais comporte malheureusement de nombreuses petites erreurs typographiques qui empêchent de prendre ce livre comme référence.

[4] "Chemical Topology : Applications and Techniques"
Mathematical Chemistry Series Vol. 6, édité par D. Bonchev et D. H. Rouvray, Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

Notre avis : Pour approfondir les rapports entre la théorie des nœuds d'une part, et la chimie et biochimie (ADN, protéines) d'autre part. Destiné à un public plus averti.

CeDoP
CENTRE DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUE

Le Centre de Documentation Pédagogique de l'ULB édite et diffuse des brochures à caractère didactique, destinées essentiellement aux enseignants et aux étudiants du secondaire. Ces brochures peuvent être utilisées par les enseignants comme outil de recyclage. Elles peuvent également être employées en classe comme outil didactique.

Un catalogue gratuit est disponible sur simple demande. Il peut également être consulté sur le site web de l'ULB (dans le menu de la page d'accueil, cliquez sur « vous êtes enseignant » et laissez-vous guider par les liens hypertexte). Les brochures les plus récentes sont proposées en format .pdf sur le site. Certains documents sont disponibles sous forme de disquette ou de CD-ROM.

Pour tout renseignement ou toute commande :

Yvon Molinghen
Tél. 02/650.40.35
e-mail cedop@ulb.ac.be

Autres titres disponibles dans la même collection

- Apprendre à parler graphique
- CD-ROM : Cours de mathématique du secondaire
- Développer le concept de nombre depuis les méthodes intuitives jusqu'aux algorithmes et la rationalisation
- Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques
- Huit questions à propos du Lotto
- L'ellipse ou la rencontre d'un spirographe, d'une échelle qui tombe et d'une attraction foraine
- L'histoire des logarithmes
- L'ombre à la lampe sur la TI92
- La tradition mathématique
- Le cas de la géométrie
- Le professeur de mathématiques
- Les dérivées et... les boîtes de conserve
- Les tribulations de l'équation du second degré
- Lieux géométriques faciles... mais déroutants
- Modéliser les stratégies face à un test à choix multiple
- Quelques propositions de leçons intégrant le logiciel DERIVE. Partie 1 : les intégrales
- Quelques propositions de leçons intégrant le logiciel DERIVE. Partie 2 : à propos des fonctions
- Suites de polygones
- Une étude de coniques... pour ne pas tomber en panne de kérosène
- Une définition de polyèdre
- Utilisation du logiciel DERIVE en algèbre linéaire

Université Libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique – CeDoP
50, avenue Franklin Roosevelt (CP 178)
Tél. 02/650.40.35 Fax 02/650.47.20 e-mail cedop@ulb.ac.be

Dépôt légal D/2002/6890/03
Prix de vente : 1,75 €