ULB

Renée GOSSEZ

Fonction homographique et droites de régression appliquées à l'étude du comportement de certains oiseaux

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

centre de documentation pédagogique

Collection : Les Cahiers du CeDoP

ISBN 2-930089-71-7

Fonction homographique et droites de régression appliquées à l'étude du comportement de certains oiseaux

Renée Gossez
Athénée Royal d'Uccle 1

TABLE DES MATIERES

Introduction.

On peut observer, le long de la côte atlantique d' Amérique du Nord, des corneilles dont les habitudes alimentaires sont un peu particulières :
leur mets favori est un gros mollusque dont il faut briser la solide coquille pour pouvoir le manger.

La corneille utilise la technique suivante pour arriver à ses fins :
elle emmène sa proie dans les airs, la laisse tomber sur le sol, redescend la chercher et ce, autant de fois qu'il est nécessaire pour que la coquille casse enfin.

Un zoologiste américain intrigué par ce comportement a remarqué lors de ses observations, que la plupart des oiseaux laissent choir leur proie d'une hauteur d'environ 5 mètres.
Pourquoi 5 mètres ? Cette altitude correspondrait-elle à une hauteur « optimum », c'est-à-dire une hauteur telle que l'énergie dépensée par l'oiseau soit minimum ?

Dans les lignes qui suivent, nous utilisons les observations du zoologiste pour déterminer si oui ou non ces corneilles semblent avoir intégré un processus d'optimisation dans leur comportement.

Le sujet est une application des fonctions homographiques et des droites de régression et il peut donc être abordé sans problème dans une classe de 5ème.

Modèle mathématique.

Supposons que l'oiseau laisse tomber sa proie lorsqu'il atteint l'altitude H et qu'il doive recommencer cette opération N fois pour que la coquille casse.
On peut considérer que le travail W ainsi fourni par l'oiseau est proportionnel à H et N et que

$$\boxed{W = k \cdot N \cdot H} \qquad (1)$$

où k est une constante.

Il est logique de penser qu'une coquille de mollusque casse d'autant plus vite qu'elle tombe de plus haut, c'est-à-dire que le nombre N dépend de H.

Il en résulte que W est une fonction de H dont on se demande si elle est minimum lorsque H vaut à peu près 5 mètres.

Détermination de N en fonction de H.

Utilisant un stock important de coquilles de même grandeur, le zoologiste a simulé leur chute en laboratoire. Voici le résultat de ses observations :

Hauteur de chute H, en mètres	**Nombre moyen de jets nécessaires pour casser la coquille**
2	55
3	10
4	7,5
5	6
6	5
7	4
8	4
10	3
15	2,5

Introduisons ce tableau dans l'éditeur de données de la calculatrice (TI 89):

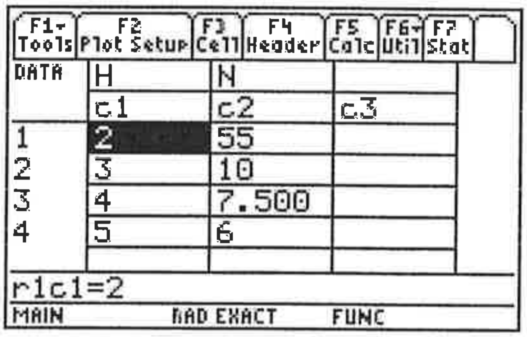


Figure1

et utilisons-le pour faire le graphique de N en fonction de H :

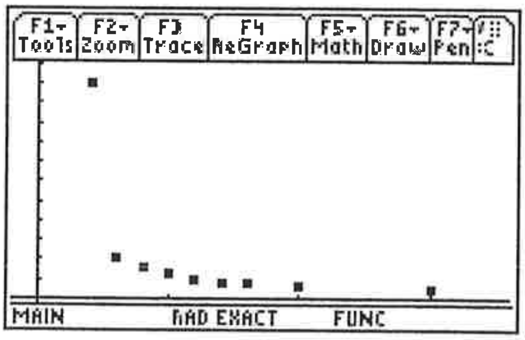


Figure 2

dans une fenêtre mieux choisie :

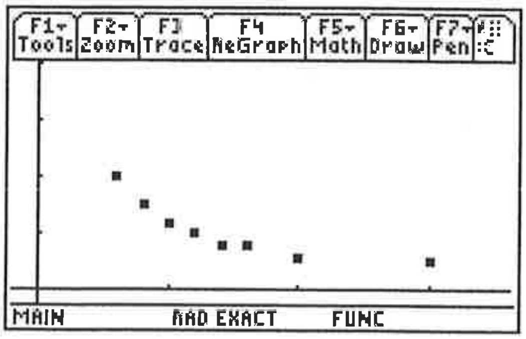


Figure 3

Ce graphique fait penser à celui d'une fonction homographique et il comporte donc des asymptotes...

Est-ce que cela « colle » avec la réalité ? Est-ce raisonnable de supposer que le graphique de N(H) comporte des asymptotes ?
Oui, c'est tout à fait normal. Le graphique de N(H) doit comporter

- une asymptote horizontale d'équation $N = 1$:
  pour casser la coquille, il faut la faire tomber au minimum une fois; plus la coquille tombe de haut, plus vite elle casse et pour qu'elle casse pratiquement après *une* chute, il suffit de monter suffisamment haut.

- une asymptote verticale d'équation $H = H_0$:
  la coquille casse d'autant moins vite qu'elle tombe de moins haut; pour que la coquille casse, il faut qu'elle tombe et l'on peut imaginer qu'il existe une hauteur de chute H_0 tellement petite que la coquille ne casse qu'après être tombée un nombre vraiment très grand de fois.

Nous supposerons donc que $\boxed{N = 1 + \dfrac{a}{H - H_0}}$ (2) où a est une constante.

Déterminons H_0 et a pour que le graphique de N passe « le plus près possible » des points de la figure 2.

La TI 89 propose par défaut, un certain nombre de courbes de régression (régression linéaire, quadratique, logarithmique, exponentielle, ...) mais elle ne propose pas de régression hyperbolique ...

Mais nous ne sommes pas à court d'idées et nous transformons l'expression (2) de la manière suivante :

$$N = 1 + \frac{a}{H - H_0} \Leftrightarrow \frac{1}{N - 1} = \frac{1}{a} \cdot (H - H_0)$$

La fonction $\dfrac{1}{N-1}$ est une fonction du premier degré de H, au graphique de laquelle nous pourrons appliquer une régression linéaire.

❖ Calculons $\frac{1}{N-1}$ à partir des données de la figure 1:

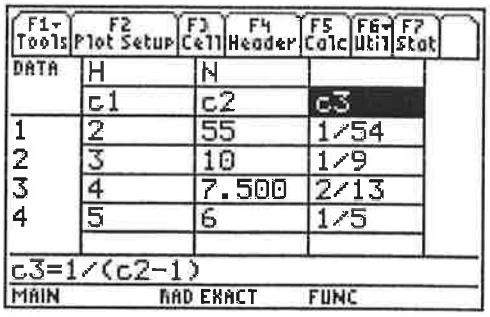


Figure 4

❖ Traçons le graphique de $\frac{1}{N-1}$ en fonction de H :

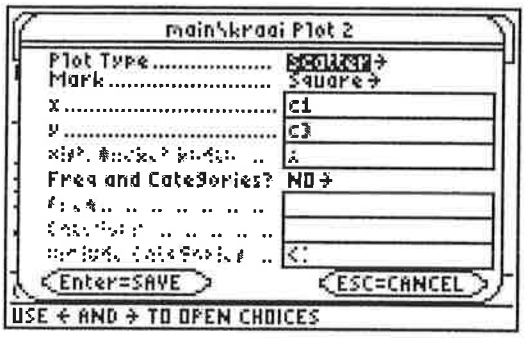


Figure 5

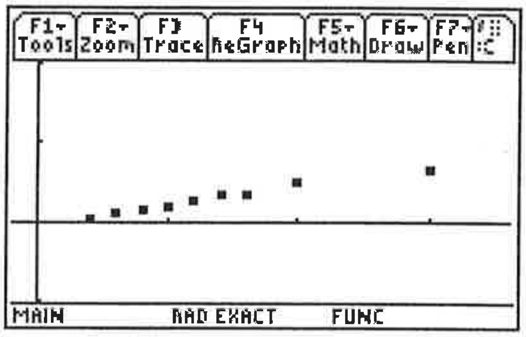


Figure 6

❖ Appliquons une régression linéaire aux données de la figure 4 :

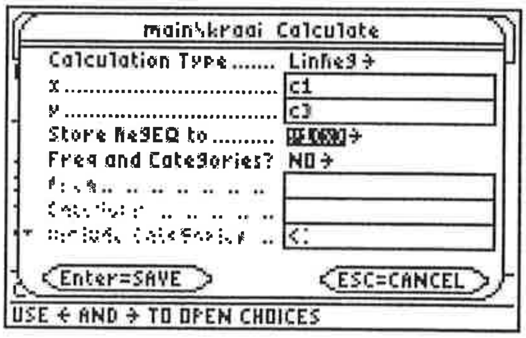


Figure 7

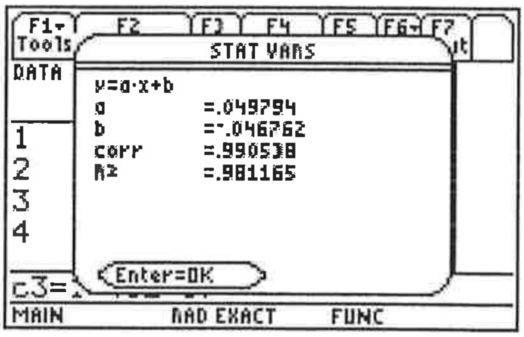


Figure 8

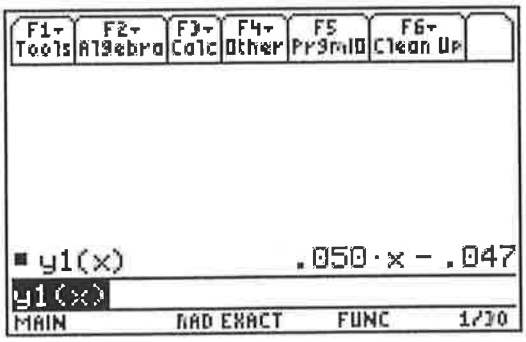


Figure 9

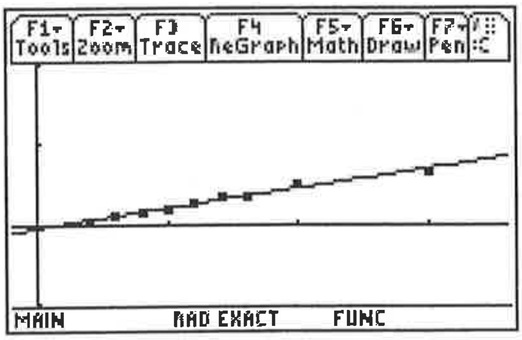


Figure 10

Nous pouvons donc approcher $\frac{1}{N-1}$ par $\frac{1}{N-1} = 0.050 \cdot H - 0.047$.

Calcul de N :

$$y_1(x) = \frac{1}{N-1} \Leftrightarrow N = \frac{1}{y_1(x)} + 1$$

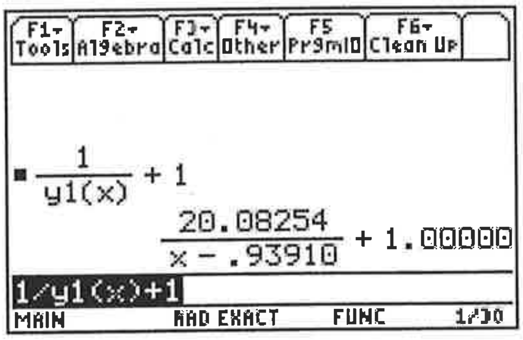


Figure 11

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{N = N(H) = \frac{20.08254}{H - 0.93910} + 1} \quad (3)$$

Preuve que ces corneilles sont vraiment de drôles d'oiseaux…

Utilisant les formules (1) et (3), nous pouvons poser que le travail effectué par une corneille pour casser la coquille de son repas égale

$$\boxed{W = k \cdot N \cdot H = k \cdot \left(\frac{20.08254}{H - 0.93910} + 1\right) \cdot H = \frac{k \cdot (H + 19.14344) \cdot H}{H - 0.93910}} \qquad (4)$$

où k est une constante et H l'altitude où l'oiseau monte.

La fonction $W' = N \cdot H$ a le même minimum que W. Traçons le graphique de W' dans une fenêtre bien choisie :

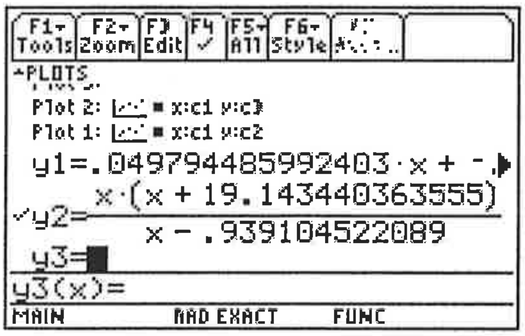


Figure 12

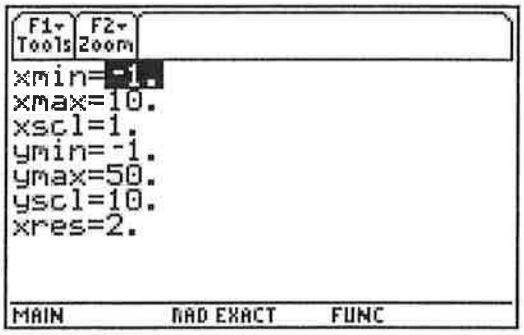


Figure 13

Ce qui donne :

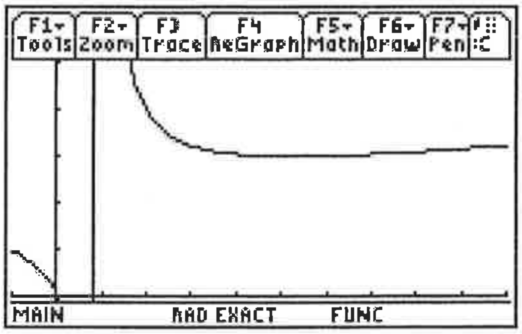


Figure 14

Le minimum de cette fonction est ……

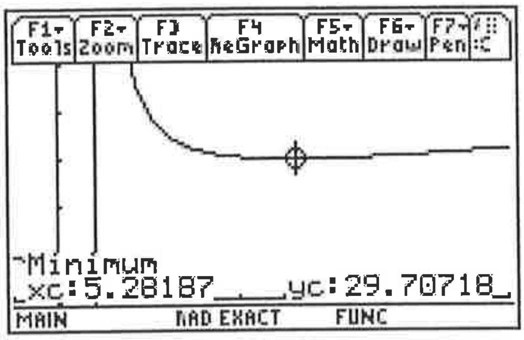
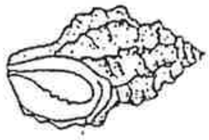


Figure 15

…. *environ 5 mètres !!* N'est-ce pas étonnant ?

Une petite pensée pour la proie …



Dans Microsoft® Encarta® Online Encyclopedia 2000
http://encarta.msn.com

on trouve pour le mot "WHELK" :

Whelk, common name applied to marine gastropod, also known as a sea snail, having a spiral shell. The common northern whelk has a thick, spiral shell, usually about 7.5 to 15 cm (about 3 to 6 in) in length, with a wide aperture and ridged whorls. It is active and carnivorous, feeding on living or dead animals, which it grasps with its foot. The mouth is located at the end of a large proboscis, and the radula, or tongue, is toothed and capable of boring holes in the shells of other mollusks on which the whelk preys. Common along the northern coasts of the North Atlantic Ocean, the whelk occurs from the low-water mark to a depth of about 180 m (about 600 ft). Several hundred eggs are laid in individual capsules; the latter are attached to each other, forming spongelike masses. In many countries the whelk is used for food. See also Conch.

Scientific classification: Whelks belong to the order Neogastropoda. The common northern whelk is classified as Buccinum undatum.

Bibliographie.

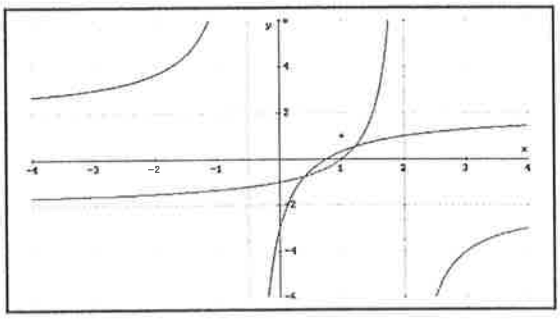
Brian A. Keller and Heather A. Thompson, Whelk-come to Mathematics,
The Mathematics Teacher, Vol. 92, n°6, p. 475-489, September 1999.

Renée Gossez, De homografische functie en het gedrag van vogels,
Uitwiskeling, jaargang 18, nummer 3, blzd. 3-9, Mei 2002.

Remerciements.

Je remercie le Professeur Francis Buekenhout et le Professeur Jean Doyen de l'Université Libre de Bruxelles, ainsi que Michel Lartillier pour la documentation qu'ils ont eu la gentillesse de me procurer.

Quelques mots à propos de la fonction homographique.



Savez-vous qui a baptisé « fonction homographique », la fonction $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$?

Michel Chasles 1793-1880

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/

C'est **Michel Chasles**, vers 1850.

Le mot « homographique » vient du grec : *homos* = semblable et *graphein* = écrire, dessiner.

Pour Chasles, deux figures étaient « homographiques » lorsqu'elles avaient des dessins « semblables », c'est-à-dire lorsqu'elles étaient images l'une de l'autre par une projectivité.

Comme les projectivités de la droite projective sont décrites par des fonctions de la forme

$$x \to \frac{ax+b}{cx+d}$$

il a appelé ces fonctions « homographiques ».

CeDoP

CENTRE DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUE

Le Centre de Documentation Pédagogique de l'ULB édite et diffuse des brochures à caractère didactique, destinées essentiellement aux enseignants et aux étudiants du secondaire. Ces brochures peuvent être utilisées par les enseignants comme outil de recyclage. Elles peuvent également être employées en classe comme outil didactique.

Un catalogue gratuit est disponible sur simple demande. Il peut également être consulté sur le site web de l'ULB (dans le menu de la page d'accueil, cliquez sur « vous êtes enseignant » et laissez-vous guider par les liens hypertexte). Les brochures les plus récentes sont proposées en format .pdf sur le site. Certains documents sont disponibles sous forme de disquette ou de CD-ROM.

<u>Pour tout renseignement ou toute commande</u> :

Yvon Molinghen
Tél. 02/650.40.35
e-mail cedop@ulb.ac.be

Autres titres disponibles dans la même collection :

- Apprendre à parler graphique
- Cours de mathématique du secondaire
- Développer le concept de nombre depuis les méthodes intuitives jusqu'aux algorithmes et la rationalisation
- Graphiques logarithmiques et semi-logarithmiques
- Huit questions à propos du Lotto
- L'ellipse ou la rencontre d'un spirographe, d'une échelle qui tombe et d'une attraction foraine
- L'histoire des logarithmes
- L'ombre à la lampe sur la TI92
- La théorie des nœuds, une théorie… attachante !
- La tradition mathématique
- Le cas de la géométrie
- Le professeur de mathématiques
- Les calculatrices, sources de développements inattendus
- Les dérivées et... les boîtes de conserve
- Les tribulations de l'équation du second degré
- Lieux géométriques faciles... mais déroutants
- Modéliser les stratégies face à un test à choix multiple
- Quelques propositions de leçons intégrant le logiciel DERIVE. Partie 1 : les intégrales
- Quelques propositions de leçons intégrant le logiciel DERIVE. Partie 2 : à propos des fonctions
- Suites de polygones
- Une étude de coniques... pour ne pas tomber en panne de kérosène
- Une définition de polyèdre
- Utilisation du logiciel DERIVE en algèbre linéaire

Université Libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique – CeDoP
50, avenue Franklin Roosevelt (CP 178)
Tél. 02/650.40.35   Fax 02/650.47.20   e-mail cedop@ulb.ac.be

Dépôt légal D/2002/6890/05
Prix de vente : 1 €