Traduction de Francis BUEKENHOUT

ULB

centre de documentation pédagogique

La tradition mathématique

Extrait de *Mathematics as an Educational Task*
Hans Freudenthal

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

Freudenthal H., *Mathematics as an Educational Task,*
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973, 680 p.

Collection: Les Cahiers du CeDoP
Mise en page: Frédérike van Gyzegem

Le texte qui suit est la traduction du chapitre 1 de l'ouvrage
Mathematics as an Educational Task de Hans Freudenthal,
Reidel, Dordrecht, 1973, pp. 1 - 16

MATHÉMATIQUE

LA TRADITION MATHÉMATIQUE

Traduction: Fr. Buekenhout

Mathematics as an Educational Task,
Hans Freudenthal

Personne ne sait si l'homme inventa d'abord l'écriture ou l'arithmétique. L'alphabet a deux millénaires de plus que notre système numérique indo-arabe, mais ceci ne prouve rien. La mathématique est bien plus ancienne que ces numéraux. Les premiers exercices en écriture et en arithmétique sont fortement liés. Personne ne peut dire au juste combien de temps et dans quelle mesure on a compté oralement ou avec des jetons, avant d'écrire[1]. Il est frappant de constater que les numéraux jusqu'à 10 et celui pour 100 appartiennent au tronc commun des langues indo-européennes. Ils furent inventés longtemps avant l'écriture.

Quelle que soit la manière dont elles se développèrent, à la fin du 3ᵉ millénaire av. J.-C., une arithmétique et une algèbre élémentaire existaient en Mésopotamie. Ce n'est pas notre algèbre formelle de *x* et de *y*. Les inconnues sont désignées par les termes *"longueur"* et *"largeur"* (d'un rectangle).

On dit que la science babylonienne était l'affaire des prêtres. Mais cette expression prête à confusion. Ceux qu'on appelait prêtres étaient en fait les intellectuels de l'époque, les employés, les professeurs, les bibliothécaires, les astronomes, les augures, les architectes et les devins. À l'origine des mathématiques, se trouvent le calculateur, l'arpenteur, le marchand, l'agent de change, le banquier, le comptable, l'exécuteur testamentaire, le constructeur de ponts, routes et cités. Mais leurs besoins étaient rapidement satisfaits. Les problèmes que les élèves résolurent durant deux millénaires dans les écoles des temples de Babylone n'étaient pas si proches de la pratique. Les professeurs leur demandaient de couvrir une route longue de 100 km et large d'un mètre avec de l'asphalte et de calculer combien de jours de travail cela coûtait. Ou ils posaient le problème qui consiste à répartir un héritage de 65 pièces d'or entre 5 frères, de manière que chaque frère plus jeune reçoive 3 pièces en moins que le frère immédiatement plus âgé. Chaque génération reprend ces problèmes immortels: la pierre qui pèse une livre de plus que la moitié de son poids, etc.

Voilà ce qu'ils apprenaient - des multiplications et divisions utiles avec tables et jetons. Mais quel était le but de cet enseignement? Etait-ce de résoudre des équations linéaires et quadratiques inutiles? Les élèves se plaignaient-ils? Et s'ils se plaignaient, que répondaient leurs professeurs ou leurs parents? Répondaient-ils que les élèves avaient étudié les mathématiques depuis le déluge, que les mathématiques aiguisent l'esprit ou simplement que d'autres sujets étaient encore plus inutiles? Par exemple le sumérien, encore enseigné alors que c'était une langue morte depuis deux millénaires, ou l'écriture cunéiforme, alors que l'alphabet existait depuis mille ans. Ou les professeurs disaient-ils d'attendre quelques mois et que l'année suivante, on verrait comment appliquer cette mathématique au calcul du calendrier, des fêtes, de la course du soleil, de la lune et des étoiles?

L'astronomie fut la science suivante de l'humanité et l'astronomie mathématique a deux millénaires de moins que la mathématique elle-même. Ceci était réellement une science pratique. On ne peut produire des étoiles et des planètes à partir de rien comme on le fait pour des problèmes mathématiques. À quoi servait l'astronomie? À prédire le calendrier, les fêtes, les éclipses, les guerres, la peste, les tempêtes, les inondations, le sort des nations et même celui des individus. N'était-ce pas une science utile, une fructueuse application des mathématiques qui vivrait durant deux millénaires? En fait, même dans ces applications, il n'y avait pas d'usage pour les équations quadratiques. Pour appliquer celles-ci, on devait poser des problèmes comme le suivant : "Longueur et largeur, j'ai multiplié longueur et largeur et obtenu l'aire; j'ai ajouté à l'aire l'excès de la longueur sur la largeur, 183; j'ai ajouté longueur et largeur, 27; demandé: longueur, largeur, aire."

Des milliers de tels problèmes ont été préservés sur des tablettes d'argile, mais il reste très peu de la littérature théorique, des textes contenant les règles qui permettent de résoudre ces problèmes.

On a conservé moins encore sur les mathématiques égyptiennes confiées non pas à des tablettes d'argile, mais à des papyrus moins durables. Mais le principe est toujours le même: c'était une mathématique qui dépassa rapidement et largement les besoins pratiques.

Nous comprenons trop bien pourquoi le calculateur et l'arpenteur étaient fascinés par des figures et des formes familières; ils aimaient jouer avec ces objets pour en percer les secrets et en pénétrer les mystères. La plupart des livres racontent que jusqu'à l'époque des Grecs, les mathématiques étaient une collection d'applications de base, mais ceci est tout simplement faux.

[1] Voir cependant G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Seghers, 1981.

MATHÉMATIQUE

LA TRADITION MATHÉMATIQUE

Traduction: Fr. Buekenhout

Mathematics as an Educational Task,
Hans Freudenthal

Il est certain que la mathématique grecque est différente et si les rares sources qui ont survécu sont fiables, elle fut différente dès le début. Durant le 6ᵉ siècle av. J.-C., les Grecs ont dû apprendre la mathématique et l'astronomie babyloniennes. Les connaissances traditionnelles concernant Thalès permettent facilement de reconnaître l'influence babylonienne et celle-ci rend compte de nombreux faits attribués à Pythagore et à son école. Qui ne connaît le soi-disant théorème de Pythagore?

Celui-ci était connu des Babyloniens quelque deux mille ans avant les Grecs[2]. Peut-être Pythagore fut-il le premier à en donner une preuve ? Non, un théorème pareil n'est pas évident par pure inspection et ne peut être découvert qu'en le démontrant. Il ne peut être découvert de manière empirique en mesurant les côtés de triangles. Il n'empêche que la plupart des livres vous diront que prouver des théorèmes fut une invention grecque plutôt que babylonienne.

Ce que les Grecs accomplirent fut d'ériger les démonstrations en un principe des mathématiques. Dans les mathématiques grecques, apparaît ce que nous appelons aujourd'hui un système déductif. Ceci débuta peut-être avec Thalès.

On dit qu'il a prouvé des théorèmes. Un coup d'œil à ceux-ci révèle qu'ils ne sont pas de la même espèce que le théorème de Pythagore, mais qu'il s'agit au contraire de propriétés évidentes par simple inspection visuelle (telle l'égalité de 2 angles dans un triangle isocèle). Quand les gens se mettent à prouver des propositions de ce genre, ils ont découvert un jeu nouveau, à savoir démontrer pour démontrer. Du fait qu'ils étaient capables de démontrer des propositions de ce genre, on peut conclure qu'ils avaient construit un système dans lequel l'art de la démonstration est une activité significative.

Si un tel système et une telle méthode de démonstration ont existé à Babylone, toute trace en est perdue. Aristote explique ce qu'est un exposé déductif plus clairement que quiconque ne l'a fait après lui, jusqu'aux temps modernes. Toute science vraie, d'après Aristote, part de principes sur lesquels elle est fondée, de par sa nature, et dont elle peut être déduite. Les *Éléments* d'Euclide partent de définitions, de postulats et d'axiomes. D'autres auteurs utilisent d'autres termes, mais cette coutume de faire débuter la géométrie par des principes de ce genre était vieille d'au moins un siècle. Il est probable qu'Hippocrate de Chios, le premier auteur d'Éléments, la connaissait déjà. Nous ne connaissons pas l'origine de cette coutume. Trouve-t-elle sa source en philosophie ou dans les techniques de discussion des séances publiques? On peut imaginer qu'une telle base de principes fut un moyen de combattre les chicaneries et les litiges.

Euclide ne rend pas explicites tous les axiomes qu'il utilise, mais blâmer Euclide pour ce caractère incomplet est un point de vue trop moderne. Une science repose sur des principes, mais personne ne vous demande de les énoncer tous; jusqu'où il convient d'aller est sujet à discussion.

Il y a des parties d'Euclide qui apparaissent comme des mathématiques modernes, par exemple la théorie des proportions et de la similitude dans les 5ᵉ et 6ᵉ livres. Elle est attribuée à Eudoxe et joue le rôle que nous accordons aujourd'hui à la théorie des réels. Par ailleurs, il y a des parties qui ont une structure déductive extrêmement faible. Euclide fut essentiellement un compilateur. Il n'empêche que pendant plus de 20 siècles, son œuvre a provoqué l'admiration et incité à l'imitation. Cette admiration était justifiée, mais les imitations connurent en général peu de succès. Bien entendu, des savants tels qu'Archimède et Christian Huygens ont été d'aussi grands "axiomatiseurs" qu'Eudoxe. Mais les efforts axiomatisants de Spinoza en philosophie, de Leibniz en jurisprudence et en politicologie et de Whiston en cosmologie ne sont pas vraiment convaincants. Ce que l'axiomatique signifie et comment ses axiomes devraient être formulés, ne fut pas montré avant la fin du 19ᵉ siècle, dans l'œuvre de M. Pasch qui l'enseigna aux géomètres italiens et dans celle d'Hilbert.

La déduction et le germe de l'axiomatique sont, d'après nous, les traits les plus frappants et les plus modernes des mathématiques grecques. Un autre fait des mathématiques grecques fut la découverte des irrationnels, l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré. Il y a peu de choses qui semblent plus évidentes que la possibilité d'exprimer tout rapport de longueurs par des nombres naturels. Suivant les historiens modernes, la découverte de la fausseté de cette "évidence" doit avoir provoqué une crise des fondements des mathématiques, mais ce point de vue est probablement trop moderne. Il est vrai que les irration-

[2]Un livre récent de Van der Waerden, *Geometry and algebra in ancient civilization*, Springer, 1983, fait remonter la première démonstration du théorème de Pythagore à une science de l'âge néolithique née, entre 3000 et 2500 av. J.-C., en Europe Centrale et diffusée à partir de là en Grande-Bretagne, au Proche-Orient, en Inde et en Chine.

nels contredisaient la doctrine pythagoricienne selon laquelle tout est nombre (entier), mais les mathématiciens pythagoriciens ont dû chercher une échappatoire. Une nouvelle définition du rapport était demandée qui évite les nombres naturels. Elle fut d'abord effectuée par des approximations infinies, puis celles-ci furent éliminées. La solution définitive de l'Antiquité ressemble un peu aux coupures de Dedekind. Elle est présentée dans les livres 5 et 6 des *Éléments*, avec la version antique des epsilons.

La doctrine grecque fit un pas de plus. Elle élimina, non seulement les processus infinis, mais aussi l'algèbre babylonienne. Puisque les nombres ne suffisaient pas à expliquer les rapports géométriques, ils furent bannis de la géométrie; les nombres réels étaient inconnus et les nombres rationnels interdits, du moins dans les sciences exactes. Les marchands et artisans continuèrent à utiliser des fractions. Pour le mathématicien, comme pour Pythagore, le nombre naturel était sacro-saint. Platon réagit avec irritation aux essais *"pour diviser l'unité"*.

L'algèbre fut-elle rejetée? Pas entièrement, car un succédané fut inventé: une algèbre géométrique qui comportait un système de constructions géométriques permettant notamment de résoudre des équations linéaires et quadratiques. Ce système est exposé dans le 2e livre des *Éléments* et est appliqué, entre autres, au livre10, en vue de classer des irrationnels. C'est un modèle de mathématique illisible.

L'algèbre géométrique, ce produit impuissant du dogmatisme méthodique et du rigorisme fanatique, fut la maladie qui tua les mathématiques grecques. Tant que les méthodes heuristiques de l'algèbre et des infinitésimaux furent enseignées oralement, à côté des mathématiques rigoureuses officielles d'Euclide et d'Archimède, les étudiants pouvaient apprendre à travailler à l'intérieur du carcan officiel. Dès que cette tradition fut interrompue, tout fut perdu. La tradition babylonienne doit avoir survécu jusqu'au 3e siècle apr. J.-C. comme l'atteste Diophante, qui fut un véritable algébriste, mais c'était la fin.

L'algèbre fut réinventée dans le monde arabe. Les Indiens et le Moyen Âge chrétien contribuèrent à son renouveau, bien que la rigueur grecque aveuglât encore les héritiers de la culture grecque. Le premier à se libérer de la tradition grecque fut Descartes, le provocateur de toute tradition. Il mit la charrette devant les bœufs: au lieu de géométriser l'algèbre, il algébrisa la géométrie. Le résultat fut ce qu'on appela la géométrie analytique dans l'enseignement scolaire et universitaire.

Entre-temps, les procédés de limites et les méthodes infinitésimales étaient devenus en vogue et ceci aboutit à l'invention du calcul différentiel et intégral de Newton et de Leibniz. Personne ne réalisa quels étaient les scrupules qui avaient amené les Grecs à rejeter l'algèbre; les epsilons d'Eudoxe étaient incompris ou rejetés. La rigueur d'Euclide et d'Archimède était encore admirée, mais bien peu la comprenaient réellement. Après Huygens, il ne demeura personne pour l'imiter. C'est seulement au 19e siècle, lorsque la rigueur fut réadoptée, que les gens comprirent l'essence des mathématiques grecques.

Il est possible que ce cours des événements ait été une nécessité historique: la camisole de force d'Eudoxe qui étrangla les mathématiques grecques, le millénaire non-mathématique, la libération qui rejeta le bon avec le mauvais, la reconstruction laborieuse de la rigueur (qui prit plus de temps que dans l'Antiquité) et finalement, la redécouverte des Grecs qui, il y a si longtemps, savaient déjà tant de choses.

Assez pour la tradition de la rigueur mathématique ! Une fois de plus, je dois avertir qu'il convient de ne pas exagérer la rigueur antique. En particulier, la géométrie élémentaire d'Euclide présente des lacunes et même des arguments faux. D'autre part, le lecteur moderne est frappé par le soin accordé à la théorie des parallèles. Le postulat des parallèles, tel qu'on le trouve chez Euclide, était dans l'Antiquité, la solution finale d'un problème qui avait dû préoccuper les mathématiciens Grecs longtemps avant Euclide. À partir de rares allusions à d'autres vues sur les parallèles, on peut deviner que les Grecs en savaient davantage qu'il n'est révélé dans les *Éléments* et qu'ils étaient plus proches des géométries non-euclidiennes qu'on ne pourrait le penser sur une base strictement historique. Mais, une fois de plus, comme pour la rigueur mathématique, le contenu de la tradition dans les fondements de la géométrie fut fixé, pour deux millénaires, par les *Éléments* d'Euclide.

La même observation vaut pour la méthode géométrique, celle des lignes auxiliaires, qui consiste à décomposer une figure en chaînes de triangles congruents qui permettent un passage systématique d'une grandeur à une autre

MATHÉMATIQUE

LA TRADITION MATHÉMATIQUE

Traduction: Fr. Buekenhout

Mathematics as an Educational Task,
Hans Freudenthal

dont on veut prouver l'égalité. Il s'agit d'une folie méthodologique.

Prenez, par exemple, le problème classique en mathématiques scolaires, qui consiste à prouver que dans un cube, étant donné un sommet *A*, le plan par les trois sommets adjacents à *A* est orthogonal à la diagonale spatiale issue de *A*. Combien de triangles deux à deux congruents sont nécessaires pour le démontrer alors qu'une simple inspection montre que la rotation de 120° dont l'axe est la diagonale spatiale conserve le cube et le plan en question. Il y a une trentaine d'années, une telle démonstration aurait été jugée impropre. Heureusement, aujourd'hui les applications comme les réflexions, translations et rotations, sont le *"dernier cri*[3]*"* en matière d'instruction scolaire.

En géométrie créative, les applications émergèrent au 19e siècle; elles sont un principe de géométrie moderne, mais la tradition euclidienne des triangles congruents était encore si coercitive dans notre siècle qu'une autorité aussi grande que celle de Félix Klein ne parvint pas à introduire les transformations dans les écoles allemandes. Jusqu'aux derniers Éléments avant ceux d'Euclide, il semble que les transformations aient été un argument admissible. Bien que des reliques en survivent dans les *Éléments* d'Euclide, c'est un fait que ce dernier élimina les transformations et que cette attitude décida de leur sort jusqu'au 19e siècle.

Pourquoi les transformations furent-elles bannies ? Probablement parce que leur connotation cinématique était en désaccord avec le caractère hautement statique de la géométrie; le détachement de la géométrie du monde matériel ne s'accordait pas à la variabilité qui est la caractéristique du mouvement. De tels dogmes philosophiques, encore entendus à des époques plus modernes, peuvent avoir été à la base du rejet des transformations. La tradition grecque était si forte que même le concept d'inspiration cinématique que sont les fonctions modernes ne modifia pas les habitudes géométriques.

Pythagore, selon une légende ancienne, éleva la géométrie d'un statut artisanal à celui d'un art, à une occupation d'homme libre qui ne se salit pas les mains. Avec l'Arithmétique, la Musique et l'Astronomie, la Géométrie appartient au quadrivium médiéval des arts non-triviaux. Tous sont attribués à Pythagore. C'est un fait qu'ils furent au moins enseignés par ses premiers disciples. Le terme *"mathématique"* naquit dans ce cercle. Parmi les adeptes de Pythagore, il y en avait qui s'appelaient eux-mêmes mathématiciens, parce qu'ils cultivaient les quatre *"mathemata"*, c'est-à-dire la géométrie, l'arithmétique, la théorie musicale et l'astronomie.

La thèse selon laquelle ceux-ci étaient des arts libéraux et leurs sujets étaient détachés du monde sublunaire fut avancée par Platon et son école, thèse que la tradition a acceptée. Ceci était en tout cas leur théorie, mais cela n'empêcha pas les mathématiciens grecs de chercher à appliquer les mathématiques. Certains pratiquèrent même la mécanique technique, le plus célèbre d'entre eux n'étant personne d'autre qu'Archimède. En fait, en Grèce comme à Babylone, les mathématiques étaient fort en avance sur leurs applications. On le voit par la théorie des coniques, qui ne fut appliquée que deux mille ans après leur découverte, lorsque Kepler décrivit les mouvements planétaires par des ellipses. La mathématique a toujours devancé ses applications; c'est le style des mathématiques de rechercher des modèles de pensée parmi lesquels les praticiens peuvent faire leur choix.

Il n'y a pas de doute que les performances scientifiques des Grecs atteignirent leur sommet en mathématique. Ils firent mieux dans les sciences théoriques que dans les sciences empiriques. Ce n'est pas difficile à comprendre. Babylone n'était pas très différente. Quiconque a saisi le pouvoir de la pensée continuera à l'exercer. La perception sensorielle est illusoire, comme les philosophes l'ont montré les uns après les autres. À une certaine distance, les objets paraissent plus petits, des tours carrées paraissent rondes, la rame semble brisée par l'eau. Seul un esprit clair peut comprendre la nature et en déjouer les pièges.

Le rationalisme joue un grand rôle dans la pensée grecque. Mais si certains prétendent, et beaucoup le font, que les Grecs n'observaient pas la nature, ils exagèrent énormément. À titre d'exemple, ils citent généralement Zénon d'Élée, qui se risqua à prouver qu'Achille ne peut rattraper la tortue, bien que chacun sache que ceci est contredit par l'expérience. Bien entendu, Zénon savait cela. Ses paradoxes ne sont pas destinés à réfuter la réalité, mais bien à réfuter des théories inconsistantes de la réalité.

[3]En français dans le texte.

Les gens citent généralement Aristote comme un rationaliste qui préférait la déduction - à partir de principes - à l'expérience. Ceci n'est pas exact. Ce qui nous frappe à propos d'Aristote, c'est qu'il interprète la nature dans un cadre de pensée psychologique et biologique plutôt que mathématique et mécanique, ce qui a parfois pour effet de donner à ses arguments un côté magique.

La mécanique moderne n'a pas évolué parce que Galilée, Huygens et Newton étaient de meilleurs observateurs que les Grecs, mais bien parce qu'ils analysaient la nature de manière plus logique et plus pénétrante. La preuve donnée par Aristote, preuve que le monde est fini, devrait d'abord être rejetée non pas parce que de telles assertions ne peuvent être prouvées, mais parce que cette preuve contient de sérieuses erreurs. D'autre part, Galilée établit sa thèse sur les vitesses égales de corps tombant dans le vide non pas sur des observations, mais sur une analyse profonde et surprenante.

L'astronomie témoigne du fait que les Grecs savaient observer. Les astronomes s'exerçaient à *"sauver les phénomènes"*, c'est-à-dire à ajuster les paramètres de leur modèle du système planétaire aux données astronomiques. Bien entendu, ils devaient agir ainsi puisque l'ajustement était un critère de vérité facile à vérifier. Néanmoins, même en dehors de l'astronomie, il subsista une sorte de mathématique pratique à côté de la science pure, mathématique dont des exemples nous sont parvenus par les compensia de Héron.

Aujourd'hui, il y a une transition presque continue entre les manifestations de mathématiques théoriques extrêmes et celles de mathématiques pratiques extrêmes. Chaque fois qu'on discute la science du passé, il ne faut pas oublier que les stimuli que la mathématique a reçus et pouvait recevoir des applications n'étaient pas très nombreux. Ceci seul aurait pu décider du sort des mathématiques anciennes si elles n'avaient pas porté en elles-mêmes le germe de la paralysie. C'était une conséquence du style des *Éléments*, un modèle de science toute faite, un texte ouvert si un bon professeur était disponible, mais un livre fermé à l'autodidacte. Nous reviendrons sur ce point.

Quand les Indiens, les Arabes et les moines médiévaux restaurèrent les mathématiques, ce fut une nouvelle science qui surgit, une science dépourvue de la marque de Pythagore qui l'aurait élevée en art libéral. Les rénovations furent surtout d'ordre pratique. De l'Inde, les Arabes apprirent un nouveau moyen d'écrire les nombres qu'ils transmirent à leur tour aux Européens. C'est notre système décimal de position qui est très supérieur au système littéral grec et aux numéraux romains. Il est en effet très supérieur, mais sa supériorité ne doit pas être exagérée.

Comment les Grecs calculaient-ils et comment faisaient les Romains avec leurs indications numériques peu pratiques? Ce devait être une torture. Comment pouvaient-ils être si peu pratiques? En astronomie, les Grecs acceptèrent le système de position sexagésimal des Babyloniens. Pourquoi n'ont-ils pas entrepris de transcrire leurs nombres dans un système de position et puis dans une version décimale?

En fait, la question de savoir comment les Grecs et les Romains calculaient avec leurs numéraux peu pratiques est facile à élucider. La réponse est : pas du tout. Les nations antiques calculaient, non pas sur du papier comme nous, mais avec des jetons sur un abaque et ceci fut dès le début un instrument de position. C'est ainsi que les nombres furent manipulés de l'Antiquité jusqu'aux Temps Modernes et le système est toujours en vigueur en Extrême-Orient. En dépit de quelques inconvénients, c'est aussi rapide qu'un crayon et du papier. Le calcul indo-arabe, avec des numéraux écrits, progressa avec l'usage de la planche à poussière où les nombres étaient écrits dans la poussière ou du sable fin; les innovations ultérieures dépendirent de l'apparition d'un papier bon marché.

Le système indo-arabe fut un progrès certain, mais il progressa lentement. Il est étrange que les fractions décimales durent attendre Stevin au 16e siècle alors que des fractions sexagésimales existaient depuis l'époque babylonienne.

Les fractions communes constituent un chapitre encore plus étrange. Il fallut longtemps pour les accepter. Qu'est-ce que 2 divisé par 7 ? Répondre "deux septièmes" ressemble à un subterfuge. Le vrai calculateur calcule tant qu'il y a quelque chose à calculer. 2/7 peut s'écrire 1/4 plus 1/28 et ceci semble beaucoup plus joli. C'était la coutume en Égypte de présenter les fractions comme une somme de fractions à numérateur 1. Les Grecs imitèrent cela. Même les mathématiciens et les astronomes firent ainsi, du moins

MATHÉMATIQUE

LA TRADITION MATHÉMATIQUE

Traduction: Fr. Buekenhout

Mathematics as an Educational Task,
Hans Freudenthal

quand leurs scrupules philosophiques leur permettaient d'accepter des fractions. Ce n'est qu'à la période indienne que les fractions furent réellement acceptées. Les Indiens indiquaient les fractions par le numérateur et le dénominateur comme nous le faisons, mais sans écrire une barre horizontale.

Admettre les fractions communes (et plus tard, les nombres négatifs) est une idée typiquement algébrique qui dépasse la simple activité calculatoire. C'est une idée algébrique que d'exiger la possibilité des opérations sans restriction et de la réaliser en introduisant des objets nouveaux. Une autre idée algébrique est le symbolisme, l'usage de signes qui n'appartiennent pas au langage courant, en vue d'indiquer des variables. *"Pensez à un nombre"* est la manière d'introduire les problèmes dans la vieille algèbre narrative. Dans l'œuvre de Diophante, le mot *"nombre"* devient de plus en plus un symbole de calcul. Ceci se poursuit chez les mathématiciens indiens et arabes.

À la fin du Moyen Âge, on dispose d'un système de symboles pour l'inconnue et ses puissances, même au-delà de la troisième, à laquelle les géomètres auraient limité le système. Un pas important dans le progrès de l'algèbre symbolique est l'apparition au 15^e^ siècle de fractions formelles en polynômes de l'inconnue au numérateur et au dénominateur. L'algèbre comme nous l'utilisons commence à la fin du 16^e^ siècle quand Viète indiqua par des symboles littéraux, non seulement les inconnues, mais aussi les indéterminées.

Le pas important qui suit est l'algébrisation de la géométrie par Descartes qui surmonte la restriction que, pour pouvoir être additionnés algébriquement, des termes doivent avoir la même dimension. Chez Descartes, la tradition algébrique grecque est définitivement abandonnée. En même temps, Descartes créa une nouvelle tradition en algèbre. On en néglige souvent la force. Huygens combattit Descartes en physique et Leibniz fit de même en mathématique.

Les grands mathématiciens se consacrèrent au calcul infinitésimal et le diffusèrent - Newton, Leibniz, les Bernoulli, Euler, Lagrange et Laplace. Il est certain qu'il y en eut beaucoup plus qui étudièrent et comprirent les nouvelles méthodes, mais combien furent-ils ?

Il est vrai que de nombreuses adaptations populaires d'Euclide et des manuels d'algèbre en langue vulgaire montrent à quel point les connaissances géométriques et algébriques s'étaient répandues, même dans les universités. Mais qu'en fut-il du calcul infinitésimal qui avait alors surpassé l'algèbre ? Où était-il enseigné ? Si je ne me trompe pas, durant tout le 18^e^ siècle, il n'y eut pas d'endroit où les gens pouvaient apprendre le calcul infinitésimal. C'est un fait étonnant, sans précédent en histoire. Comment cela fut-il possible ? Etait-il si difficile de vendre le calcul infinitésimal aux universités qui venaient tout juste de se convertir à grand peine au cartésianisme et qui avaient même accepté le système de Copernic ?

En fait, les universités du 18^e^ siècle étaient plutôt inertes. De plus, pratiquement aucun mathématicien de premier plan n'enseignait dans les universités. La science était le souci des académies et des sociétés savantes qui n'avaient rien à faire de l'enseignement. Mais il y a plus que cela. L'art de l'imprimerie avait conduit la tradition de la science sur de nouvelles pistes. L'enseignement oral, bien qu'il fût toujours important, n'était plus indispensable. Si le calcul infinitésimal avait été inventé quelques siècles auparavant, il aurait disparu sans laisser de traces s'il n'y avait pas eu des écoles où il était enseigné. Les choses avaient changé. Il y avait maintenant des livres dont on pouvait apprendre le calcul infinitésimal et comme celui-ci fut au moins nécessaire en astronomie, après Newton, quelques personnes essayèrent de lire ces livres. Elles furent sans doute peu nombreuses. Pour comprendre ce qui était publié en calcul infinitésimal, il fallait que le lecteur soit en sympathie avec l'auteur. Il s'ensuivit que le calcul infinitésimal fut appris par beaucoup moins de personnes que l'algèbre - une tradition qui subsiste encore. L'art d'imprimer libéra les savants de pointe de la nécessité d'établir des écoles. Beaucoup d'entre eux jouirent de cette liberté, mais en même temps, la tradition de la science fut sérieusement freinée par l'absence d'écoles. Nous verrons comment il fut remédié à cette absence au 19^e^ siècle.

Le retour de la science active dans les universités est marqué par la création de l'École Polytechnique en France et les réformes de Humboldt en Allemagne. Le mouvement ne fut pas aussi rapide partout ni dans tous les domaines de l'enseignement. À Königsberg et à Berlin, Jacobi donnait le ton avec ses séminaires, alors qu'à Göttingen, avec Gauss, on n'enseignait que les mathématiques les plus élémentaires. De nouvelles traditions virent le jour. De France, vint celle du cours d'analyse, de la mécanique rationnelle, de la géométrie descriptive; d'Allemagne, celle du cours sur les fonctions elliptiques. La structure classique du cours d'analyse s'est depuis désintégrée sous l'influence de la théorie des ensembles, de la topologie et de l'algèbre; il devint une victime de la restructuration des mathématiques entreprise par Cantor et poursuivie par Fréchet, Hausdorff, Steinitz et Emmy Noether.

La tradition de la mécanique théorique mourut quand cette application des mathématiques fut comprise de manière encore plus large. Le phénomène le plus absurde fut la tyrannie de la géométrie descriptive qui dura plus d'un siècle. Aujourd'hui personne ne comprend comment cette technique a pu être pratiquée et admirée comme un modèle de mathématique appliquée alors que c'est plutôt le modèle d'un domaine des mathématiques complètement isolé, un domaine sans relations avec les autres ou avec les applications des mathématiques, une discipline qui ne fut jamais appliquée nulle part parce qu'elle était trop rigide pour être appliquée.

L'importance historique des fonctions elliptiques est mieux comprise; elles furent la première percée de la théorie des fonctions après les fonctions élémentaires bien connues et elles furent le point de passage obligé vers de nouveaux domaines. Qu'elles aient pu se survivre durant des décades est une des expressions de la loi d'inertie de la tradition.

Une autre mode du 19e siècle fut la théorie algébrique des invariants. Quiconque a pu se familiariser avec les charmes de la méthode symbolique peut comprendre cet état d'esprit. Il est étonnant de voir comment cette discipline est morte. Hilbert y mit fin, en montrant implicitement et sans intention, à quel point ses problèmes paraissent petits d'un point de vue plus complet. Avec les découvertes d'Hilbert, la théorie algébrique des invariants passa dans l'algèbre des anneaux de polynômes.

Le sort de larges domaines de la géométrie du 19e siècle fut semblable. Ils disparurent dans une partie de l'algèbre qui reçut le nom peu satisfaisant de géométrie algébrique. De même, naquit et mourut au 20e siècle une sorte de théorie des fonctions d'une variable complexe qui fut extensivement et profondément développée en Allemagne. Un autre exemple est la théorie analytique des nombres, commencée par Euler, et qui fleurit durant le premier tiers de ce siècle; elle est maintenant arrivée à un point mort bien que ses grands problèmes demeurent ouverts. Un certain type de géométrie différentielle, qui fut très populaire durant les années 1920 et 1930, se tourna bientôt vers un formalisme rigide et stérile.

Tout au long de l'histoire, tradition et rénovation alternent l'une avec l'autre. Aujourd'hui, la résistance du vieux ne dure pas plus d'une génération. Les progrès ont un pouvoir de conviction, en particulier en mathématique où les progrès peuvent être évalués plus objectivement qu'ailleurs.

On rencontre rarement des génies méconnus en mathématiques. Les histoires sentimentales racontées sur Abel sont de l'invention pure. L'importance d'Abel fut immédiatement reconnue par ses contemporains, même par ceux qui ne lurent pas son travail dès qu'il fut publié. Abel ne dut pas jeûner; en fait, il reçut des bourses confortables qui lui permirent de voyager; c'est aussi de la médisance pure de dire que Cauchy perdit un des traités d'Abel. Il est néanmoins vrai qu'Abel mourut trop jeune pour se voir devenir célèbre. Il en va de même pour Galois - s'il avait vécu plus longtemps, sa théorie se serait peut-être répandue plus vite. D'après les conteurs de boniments, Riemann dut également jeûner. Comme Abel, il mourut de tuberculose, mais plus vieux qu'Abel et au sommet de sa gloire. Cantor est connu comme la victime de l'indifférence de ses contemporains, mais ceci ne fut pas la cause de sa maladie et il n'est pas vrai que les gens furent indifférents et hostiles aux idées de Cantor. Sa théorie des ensembles de points fut immédiatement acceptée, bien que la théorie abstraite des ensembles ait exigé un plus long temps d'incubation. La théorie des ensembles pénétra plus lentement d'autres parties des mathématiques; elles devaient mûrir pour avoir besoin de la théorie des ensembles, et en cours de maturation, elles en furent imbues. Ce développement sera esquissé au chapitre suivant.

En même temps, c'est une exagération de compter Boole parmi les génies méconnus. Il est inutile de surestimer les mérites de formalismes isolés et creux dont l'utilité apparaît beaucoup plus tard; aussi longtemps qu'ils ne sont pas accompagnés d'un contenu substantiel, les contemporains ne peuvent être accusés de les avoir négligés.

MATHÉMATIQUE

LA TRADITION MATHÉMATIQUE

Traduction: Fr. Buekenhout

Mathematics as an Educational Task,
Hans Freudenthal

Les logiciens considèrent généralement Frege comme un génie, ce qui est de nouveau une forme d'exagération. Frege vécut dans son propre coin confortable des mathématiques; son ignorance et son appréciation peu intelligente de ce qui se passait dans les mathématiques contemporaines autour de lui ne témoignent pas en sa faveur.

Au début de ce chapitre, nous avons beaucoup parlé de mathématiques utiles. Plus nous avons progressé dans l'histoire de la tradition, moins nous sommes revenu sur ce sujet. Dès l'époque babylonienne, les mathématiques de l'homme de la rue, des marchands, des artisans et arpenteurs étaient complétées par celles de l'astronome; en Grèce, elles atteignirent de nouveaux sommets et en dehors des astrologues, elles purent compter sur la clientèle des navigateurs; la technologie gréco-romaine requérait certainement plus de mathématiques que celle de Babylone et d'Égypte, mais c'était encore une mathématique appliquée pauvrement et ceci freina encore une fois le développement des mathématiques pures. Ce n'est pas seulement pour cette raison que les mathématiques manquèrent de stimulants mais bien plutôt parce qu'une discipline socialement inutile ne fait pas beaucoup d'adeptes dans une société. De manière caractéristique, quand un Romain parlait d'un mathématicien, il pensait à un astrologue - appelé aussi Chaldéen, parce que l'astrologie venait de l'Orient. Comment un mathématicien pouvait-il gagner sa vie ? Le droit, la rhétorique, l'art, la philologie et même la poésie étaient plus prometteurs. Dans le Moyen Âge chrétien, il y eut des monastères qui pouvaient se permettre de promouvoir les sciences mais les mathématiques y tenaient peu de place.

Qu'est-ce qui provoqua l'essor soudain des mathématiques et des sciences au 16^e siècle pour nous donner, au 17^e siècle, Galilée, Descartes, Kepler, Huygens, Newton, Leibniz ? L'histoire est généralement écrite par des savants en sciences humaines, qui voient l'essor des mathématiques et des sciences au travers du prisme de la renaissance des arts et des lettres. Pour ces nouveaux développements, la renaissance de l'Antiquité fut toutefois moins cruciale qu'on ne le croit en général. La technologie comme moteur de l'histoire est généralement négligée, parce qu'elle est hors de portée de la plupart des historiens. Ils ne remarquent pas qu'en technologie, le développement démarre trois siècles plus tôt. Entre 1200 et 1500, plus de choses furent inventées que jamais auparavant dans l'histoire de l'humanité - une chaîne d'inventions réellement fondamentales dans laquelle l'art de l'imprimerie est le dernier maillon. C'est cette technologie qui prépara l'essor soudain des mathématiques et des sciences, non pas parce qu'elle eut immédiatement besoin d'une science plus profonde, mais bien parce que c'est la même attitude mentale qui concocte les inventions, joue des tours à la nature et recherche les secrets des nombres et des figures.

Il n'y a pas de doute non plus que les mathématiques étaient de plus en plus utilisées. Les nombreux manuels, avec souvent un aspect pratique, étaient évidemment écrits pour des gens qui voulaient utiliser les mathématiques. Newton franchit le pas allant de la cinématique céleste à la dynamique céleste et pour cela, il inventa les fluxions[4]. Les Bernoulli s'essayaient à des problèmes mécaniques qui pouvaient être d'une certaine utilité technique. Néanmoins, l'influence grandissante des applications sur les problèmes de mathématiques date des débuts du 19^e siècle. L'arrière-plan de cette croissance soudaine des mathématiques appliquées, au 19^e siècle, a été peu observé jusqu'ici.

Les noms de Fourier, Poisson, Cauchy indiquent le rôle clé des savants français dans la question. Soudain, ce fut un grand honneur que de s'occuper de mathématiques appliquées puisque cela vous rendait digne de l'École Polytechnique, la nouvelle école de la Révolution qui jetait un regard condescendant sur les vieilles universités calcifiées. Ceci, de nouveau, fut une exagération. La surestimation des mathématiques appliquées et la sous-estimation des mathématiques pures firent beaucoup de tort à la mathématique française dans son ensemble, au 19^e siècle. Mais ce phénomène fut secondaire. Dans l'ensemble, le mouvement vers les applications fut très bénéfique et il fournit un programme de développement des mathématiques au 19^e siècle.

Par les applications, nous ne visons pas l'astronomie (qui après des milliers d'années atteignit un sommet avec Laplace) ni d'autres usages traditionnels, ni même les probabilités qui tendaient à se développer en surface plutôt que de jeter des racines profondes. Nous entendons par applications, le large champ dont les mathématiques allaient recevoir une forte impulsion, le champ appelé aujourd'hui physique mathématique. En dépit d'Euler, Lagrange et Laplace, il commença vraiment avec Fourier, Poisson et Cauchy.

[4] C'est-à-dire le calcul infinitésimal.

Les manuels peuvent évoquer l'idée que la mécanique fut établie en principe par Newton et qu'il ne resta plus rien à faire qu'à élaborer des détails. Cette idée est tout à fait fausse. La mécanique des systèmes requit de nouveaux principes, sans oublier la mécanique des milieux déformables, la conduction de la chaleur, l'élasticité et les vibrations de solides, liquides et gaz.

Ceux-ci furent les problèmes attaqués au 19e siècle. Guidés par des idées physiques, les chercheurs développèrent des méthodes qui sont devenues des modèles pour l'analyse des équations aux dérivées partielles, des équations intégrales et pour l'analyse fonctionnelle. La profusion d'impulsions engendrées par ces problèmes n'a pas encore cessé d'agir aujourd'hui.

Il est frappant que cette physique mathématique fut développée théoriquement par des gens ayant un sentiment très sûr de sa portée physique, mais avec un fond empirique très pauvre et loin de toute expérimentation. Les méthodes mathématiques développées pour l'élasticité furent d'abord réellement appliquées et testées en optique et en électromagnétisme, ce qui fournit une récompense imprévisible et néanmoins magnifique. Une fois de plus, dans ce siècle, les mathématiques reçurent une énorme impulsion et stimulation des applications; ce n'est pas avant d'être guidée par la mécanique quantique que l'analyse fonctionnelle fraye de nouveaux chemins. À quel point la statistique mathématique est redevable aux problèmes de la pratique statistique est bien connu.

Ce que la mathématique du futur peut espérer de l'analyse numérique et des ordinateurs est imprévisible.

L'enthousiasme pour la théorie des nombres, la géométrie algébrique et les catégories ne doit empêcher personne de reconnaître à quel point les mathématiques seraient plus pauvres sans l'impulsion reçue des applications. La mathématique a débuté comme une activité utile et aujourd'hui, elle est plus utile qu'elle ne l'a jamais été. Ceci est pourtant une sous-estimation. Il faudrait dire : si elle n'était pas utile, la mathématique n'existerait pas.

Pourquoi cette insistance sur l'utilité des mathématiques ? Parce que rien n'est oublié aussi vite qu'un truisme. Même les gens responsables de l'instruction et de l'éducation l'oublient souvent. Je ne prétends pas qu'ils peuvent ou qu'ils veulent le nier. Il n'empêche que l'enseignement et l'éducation sont de l'action et ce qui est immédiatement reconnu dans le discours prend parfois longtemps pour influencer l'action.

Université libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 186 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
✆ 02/650 40 35

Prix de vente : ~~30 FB~~ 0,50