Traduction de Charlotte BOUCKAERT

ULB

Développer le concept de nombre depuis les méthodes intuitives jusqu'aux algorithmes et la rationalisation

Extrait de *Mathematics as an Educational Task*
Hans Freudenthal

UREM

**Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques**

centre de documentation pédagogique

Les Cahiers du CeDoP

Le contenu de ce document n'engage que la seule responsabilité de son auteur.
Copyright © 1973 by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland

Translated by permission of Kluwer Academic Publishers
Freudenthal H., *Mathematics as an Educational Task*,
D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973, 680 p.

Mise en page : Marie-Line Haesevelde
Collection : Les Cahiers du CeDoP

Le texte qui suit est la traduction du chapitre 12 de l'ouvrage
Mathematics as an Educational Task de Hans Freudenthal,
Reidel, Dordrecht, 1973, pp. 242-286.

PLAN

UREM

Unité de Recherche
sur L'Enseignement des Mathématiques

Professeurs
Fr. Buekenhout, M. Parker, J. Sengier

CAMPUS PLAINE C.P. 216
BD DU TRIOMPHE
B-1050 BRUXELLES
Tél. (32) (2) 650 58 71 (Secrétariat 650 58 64)
e-mail ulbmath @ ulb.ac.be
Telex Unilib B 23069
Fax (32) (2) 650 58 99

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

Le nombre, la première science que j'ai inventée pour eux.

Eschyle, *Prométhée*

Dans le développement du concept de nombre, je voudrais distinguer les différentes phases d'apprentissage qui ne sont pas nécessairement identiques à celles que j'ai appelées phases précédemment : opération intuitive, opération algorithmique, opération algébrique, organisation globale (le concept de champ), subordination au système des mathématiques.

La division en phases ne signifie pas une succession dans le temps. Face à différents concepts, un élève peut se trouver dans différentes phases, et face à un même concept, il peut opérer dans deux phases différentes en même temps.

De plus, après la phase intuitive, je mentionne explicitement la phase algorithmique qui lui appartient, et j'aurais par conséquent dû la répéter après la phase algébrique et les autres phases.

Arithmétique intuitive avec un matériel structuré

Nous avons souligné la priorité didactique du nombre destiné à compter. Depuis les temps anciens, la didactique des débuts de l'arithmétique a toujours eu pour but de systématiser le processus de compter, et si je ne me trompe pas, elle le fait toujours avec les bonnes méthodes d'enseignement. L'enfant doit apprendre à additionner en comptant vers l'avant, à soustraire en comptant vers l'arrière, à articuler les comptes par dix, à multiplier en comptant avec d'autres intervalles que 1, et ainsi de suite.

Apprendre à dénombrer systématiquement avec du matériel structuré a joué un rôle important depuis les temps anciens, et rien n'indique pourquoi cela aurait changé. L'un des grands inconvénients des diagrammes de Venn est d'inciter l'auteur et l'utilisateur de manuels à négliger la nécessité de structuration. Bien sûr, l'élève devrait aussi apprendre à travailler avec du matériel non structuré, entre autre pour apprendre à le structurer. Travailler avec du matériel non structuré en soi ou détruire intentionnellement la structure est un plaisir théorique qui n'a rien à voir avec l'enseignement de l'arithmétique.

On apprend à compter de manière systématique plus lentement avec les diagrammes de Venn. Dans l'opération d'addition, ils invitent l'élève à recommencer à compter, plutôt que de compter plus loin. On n'a pas encore découvert une méthode pour enseigner la soustraction par les diagrammes de Venn. En dehors de représentations parfaitement insensées, j'ai vu beaucoup de tentatives sérieuses mais pas convaincantes. La plus astucieuse que j'ai vue était la suivante : soit cinq oiseaux dont trois sont assis et deux s'envolent, pour illustrer la soustraction 5 - 2. La plupart des représentations de la soustraction par les diagrammes de Venn nécessitent de maladroites explications verbales pour être comprises, même avec des adultes. C'est étrange qu'après tant d'échecs, la foi dogmatique dans les diagrammes de Venn ne soit toujours pas ébranlée.

Une exigence que le matériel d'apprentissage du calcul a toujours dû satisfaire, c'est l'homogénéité. Sur les bouliers, on a utilisé des pierres, des boules, des compteurs qui étaient considérés comme équivalents. Sur les bouliers de mon enfance, il y avait des billes de deux couleurs. On aurait pu s'attendre à une mise en évidence de l'homogénéité du matériel comme une conséquence du point de vue ensembliste, puisqu'un élément d'un ensemble est juste un élément, rien de plus. Cependant, les auteurs de manuels d'arithmétique d'aujourd'hui s'ingénient à

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

représenter les ensembles avec lesquels les enfants doivent apprendre à compter de la manière la moins homogène possible - les diagrammes de Venn sont un mélange de lettres, de nombres, d'étoiles, de croix et d'autres symboles sans signification, tous différents. Le fondement de cette attitude n'est pas un principe didactique mais une erreur mathématique que je vais analyser plus tard. Deux *lettres a* à deux endroits différents du tableau font référence à un seul élément ; donc, il ne peut pas y avoir deux fois le même symbole dans un diagramme de Venn, parce que cela indiquerait le même élément au lieu d'éléments différents - ceci semble être le fil de la pensée des auteurs. C'est faux. Cela présuppose que le diagramme de Venn est une collection de signes sans signification plutôt qu'une image qui contient des images, par exemple de pièces de monnaie que l'enfant doit compter. Certains manuels d'arithmétique vont jusqu'à faire croire à l'enfant que le nombre d'éléments d'un ensemble peut seulement être déterminé si tous les éléments ont l'air différents. Bien sûr, l'enfant doit aussi apprendre à travailler avec du matériel non homogène. Mais cela ne convient pas pour apprendre à compter et du matériel non homogène érigé en principe est un contresens.

Pour ce qui est de la structuration du matériel, on peut distinguer un point de vue logique (ou conventionnel) et un point de vue intuitif. Notre système de numération est conventionnellement structuré par le biais de la valeur de position. Une structure similaire existe dans les systèmes de mesure et plus concrètement, dans les systèmes monétaires. La valeur de position est imitée dans l'abaque où une boule est multipliée par dix si elle est déplacée d'une position vers la gauche (il y a parfois des étapes intermédiaires de 5). L'abaque a disparu de nos pays avec l'apparition de l'arithmétique écrite. Il a été préservé en Extrême-Orient et en Russie. De là, il s'est redéployé en Occident au 19e siècle dans une interprétation simplifiée. Je pense au boulier de mon enfance avec dix rangées de dix boules. C'est *intuitivement* un matériel structuré. Chaque boule a la valeur d'une unité ; il n'y a pas d'unités supérieures comme dans la numération de position et les systèmes monétaires. Montessori a réinterprété ce boulier d'enfants en donnant une valeur de position pour l'utiliser dans l'enseignement de l'arithmétique.

Le matériel lié au papier

Autrefois, on apprenait les opérations sur les petits nombres en réunissant ou en séparant des objets concrets ; les doigts, en particulier, étaient un support familier. Ces dernières années, on a eu tendance à remplacer des objets concrets et tangibles par leur représentation sur papier. C'est une idée raisonnable si elle est réalisée avec du bon sens et de l'imagination, ce qui, hélas, est plutôt rare. Même si les ensembles sont parfois représentés sur papier de manière assez réaliste, il y a une curieuse propension à les emballer dans des diagrammes de Venn non motivés. Nous expliquerons maintenant d'où cela provient. C'est une longue suite d'erreurs qui se termine par une série d'imitations ennuyeuses. En dépit de bien meilleurs outils, le diagramme de Venn domine le sujet. Les excellents manuels hongrois d'arithmétique, à mon avis la meilleure série de manuels au monde, évitent complètement les diagrammes de Venn. Pour représenter les ensembles, ils utilisent uniquement les groupements naturels, comme les tours de blocs, les livres sur une étagère, les enfants sur un banc, et les nombres sont additionnés et soustraits dans ce contexte-là ; par exemple, 5 - 2 où deux blocs tombent d'une tour de 5 blocs.

D'autre part, avec des diagrammes de Venn des non-sens comme la figure 2 sont relativement courants, peut-être avec le signe + plutôt qu'avec le signe ∪ et dans le diagramme-somme des objets différents de ceux des sommants.

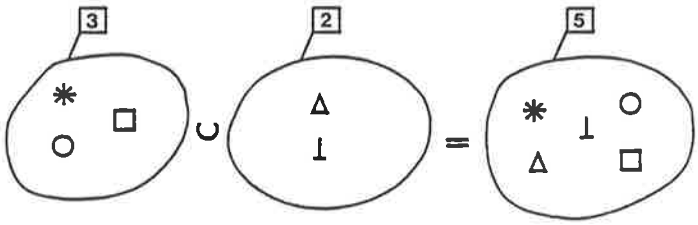

Fig. 2.

Il y a cependant aussi des représentations correctes, comme la figure 3, de ce que faisait l'enfant autrefois quand il devait ajouter deux piles de compteurs, mais c'est abstrait, artificiel et ennuyeux comparé à la méthode hongroise. La figure 4 est moins satisfaisante. La soustraction est le point faible des diagrammes de Venn. Le matériel concret et déplaçable de la méthode hongroise est bien supérieur.

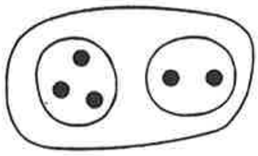
Fig. 3.

On peut se demander quels sont les fondements rationnels de ce matériel. Pourquoi l'enfant ne pourrait-il pas additionner des compteurs sur sa table, pourquoi ceci doit-il être représenté sur papier ? Chaque fois que du matériel d'apprentissage est remplacé par du matériel de consommation (à usage unique), il y a lieu d'être sceptique. L'industrie gagne beaucoup plus d'argent avec le matériel de consommation qu'avec le matériel d'apprentissage. Y a-t-il des abus ? On produit beaucoup de mauvais matériels de consommation, mais il en va de même pour le matériel d'apprentissage et il ne me semble pas que le pourcentage de déchets soit plus élevé pour le matériel de consommation que pour le matériel d'apprentissage. Au contraire, le matériel de consommation disparaît plus vite du marché, s'il l'atteint jamais, que les manuels et autres matériels d'apprentissage.

Le matériel de consommation rend l'enseignement plus cher. À l'époque de l'ardoise, les écoles et les élèves n'auraient jamais pu se le permettre. En a-t-on plus pour son argent ? Je pense qu'un enseignant expérimenté et imaginatif peut faire un bien meilleur usage des possibilités offertes par le matériel libre que du matériel lié au papier. Ce dernier offre cependant deux avantages qui ne sont pas à négliger. Tout d'abord, l'activité de l'élève est plus facile à contrôler et ensuite, il impose à l'enseignant inexpérimenté une didactique bien conçue d'opérations concrètes auxquelles il n'aurait peut-être pas pensé sans lui. Le second argument est

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

particulièrement important - cela peut être un avantage de lier autant que possible le matériel d'enseignement au papier pour fixer complètement son ordre et sa didactique. Cela peut même être vrai au-delà du premier enseignement de l'arithmétique. Malgré l'intérêt qu'il y a d'analyser les avantages et inconvénients des deux types de matériels, je dois abandonner ce problème maintenant.

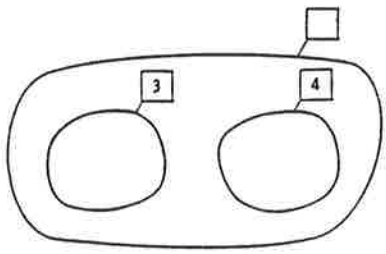

Fig. 4.

Exemples de matériels structurés

Beaucoup du matériel moderne est intentionnellement structuré. Pour représenter les nombres, il y a souvent le principe sous-jacent que chaque unité occupe le même volume, quoique les unités soient arrangées de manière appropriée pour former des objets plus grands. C'est le cas du matériel de Cuisenaire et de Stern avec des bâtonnets construits à partir de un à dix cubes élémentaires. Cuisenaire attachait une grande importance à la liaison des nombres aux couleurs. C'est défendu par certains comme un article de foi, tandis que d'autres critiquent cela comme la pire des hérésies, mais cela ne vaut pas la peine de s'y attarder. Stern a conçu du matériel pour compléter les bâtonnets de calcul.

Le matériel de Z. Dienes est plus flexible. Les cubes élémentaires sont systématiquement arrangés d'après toutes les dimensions, les cubes, les bâtonnets de dix, les plateaux de cent, les cubes de mille et ainsi de suite, de la même manière. D'autres bases que 10 sont aussi utilisées. Ce matériel peut très bien servir à autre chose qu'à apprendre à compter, par exemple à résoudre des équations en algèbre. Il semble que les enfants travaillent plus facilement sur ce matériel que les professeurs de mathématiques qui sont évidemment trop attachés aux méthodes formelles pour pouvoir travailler aussi intuitivement.

Comme signalé précédemment, les didacticiens n'ont jamais été portés à encourager le calcul en dénombrant simplement. Les matériels qui viennent d'être mentionnés permettent de dénombrer de manière *systématique* ; ils structurent l'addition et la soustraction, ce qui devrait finalement aboutir au calcul algorithmique. Le matériel intuitif a parfois été critiqué. On a dit que l'enfant restait attaché trop longtemps au matériel et que cela pouvait retarder le passage à l'arithmétique algorithmique, voire à le rendre plus difficile ou même impossible. Je peux imaginer qu'il y ait un réel danger à compter sur les doigts, mais je n'ai pas l'impression que le matériel moderne ait des effets pervers. Je pense qu'on peut laisser jouer l'enfant avec le matériel aussi longtemps qu'il le désire. Plus le matériel est sophistiqué, plus vite l'enfant s'en fatiguera une fois qu'il l'a maîtrisé.

Les bâtonnets sont aussi utilisés dans l'arithmétique intuitive des fractions. Plus précisément, les proportions simples sont visualisées à l'aide des bâtonnets. Cela va un peu trop loin à mon avis.

L'ensemble des paires

Sous son aspect numérique, le produit de deux nombres naturels est défini au moyen d'un ensemble de paires. Si A est un ensemble de a éléments et B est un ensemble de b éléments alors $a \cdot b$ est le nombre d'éléments de l'ensemble des paires $\lceil A,B \rceil$,c'est-à-dire l'ensemble des $\lceil a,b \rceil$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Le modèle rectangulaire de la figure 5 visualise le produit $3 \cdot 6$

11 •	12 •	13 •	14 •	15 •	16 •
21 •	22 •	23 •	24 •	25 •	26 •
31 •	32 •	33 •	34 •	35 •	36 •

Fig. 5.

Il n'y a pas de doute que ces modèles doivent être utilisés à fond pour visualiser la multiplication. Dans l'arithmétique traditionnelle, ils n'étaient pas négligés mais ils n'étaient pas non plus populaires. La raison en est claire : ils ne sont pas d'une grande utilité dans le calcul algorithmique. Pour voir que $3 \cdot 6 = 18$, le modèle doit être réarrangé et cela détruit sa forme et sa symétrie. C'est pour cette raison que les didacticiens ont inventé d'autres moyens. Ils faisaient plus confiance au dénombrement mais utilisaient une version sophistiquée avec des pas plus grands que l'unité. Le dénombrement systématique est, en théorie et en pratique, un instrument utile. Parmi les livres modernes d'arithmétique, il y en a qui négligent complètement le dénombrement.

Dans le cas présent, le dénombrement systématique signifie la construction inductive du produit, $3 \cdot 6$ comme $6 + 2 \cdot 6$ et plus généralement, $(1 + a) \cdot b$ comme $b + (a \cdot b)$ avec $0 \cdot b = 0$ ou $1 \cdot b = b$ comme point de départ. Jadis, ceci était le principe d'entraînement aux tables de multiplication. La plupart des ordinateurs construisent la multiplication inductivement par l'addition.

Cette réduction inductive de la multiplication à l'addition est le moyen le plus efficace d'acquérir la maîtrise arithmétique. C'est rejeté par pur dogmatisme par certains novateurs. Ils s'y opposent parce que « plus tard, dans le concept de champ, la multiplication est indépendante de l'addition et qu'il faut en tenir compte depuis le début ». Cet argument est absolument faux. Dans le concept de champ, la multiplication est *séparée* de l'addition. C'est parfaitement légitime mais le concept général de champ est une boîte vide. Pour la remplir, il faut au moins un exemple de champ. Il faut fournir au moins un exemple avec l'addition et la multiplication et à moins que l'on ne veuille se limiter aux champs finis, c'est le champ des rationnels qui doit être produit en premier lieu et si dans ce champ la multiplication doit être définie, aucun dogme ne peut vous éviter de définir la multiplication en la réduisant inductivement à l'addition comme cela a toujours été fait en arithmétique élémentaire.

Le modèle rectangulaire de la multiplication ne devrait jamais être négligé. C'est l'un des points positifs des « maths modernes » de l'avoir mis en évidence, quoique s'y attarder trop ne soit pas nouveau. Il y a toujours eu des professeurs qui entraînaient leurs élèves à « voir » des produits comme $7 \cdot 8$ dans un modèle rectangulaire et des classes qui arrivaient à des prouesses incroyables dans ce genre d'arithmétique intuitive. Une approche à ce point intuitive ne convient pas à la majorité des professeurs. Ils s'appuient sur le dénombrement systématique, sur la génération inductive des produits et sur les

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

tables. Le modèle rectangulaire ne doit pas pour autant être oublié. Il se construit joliment avec le matériel de Dienes ; les bâtonnets conviennent moins bien.

En ce qui concerne la trop grande place occupée par le modèle rectangulaire dans la didactique d'aujourd'hui, on peut se demander pourquoi les applications dans lesquelles ce modèle pourrait être opérant sont négligées. Cette attitude s'explique facilement puisque dans toutes les applications, l'aspect numérique du nombre naturel, cher à beaucoup de novateurs, est vite broyé. Dans les applications, les facteurs deviennent vite des nombres réels, voire même des nombres négatifs pour lesquels le modèle rectangulaire n'est plus de mise.

Les applications habituelles en arithmétique élémentaire forment l'ensemble des paires $\lceil A,B \rceil$ de deux ensembles finis A et B avec a éléments dans A et b éléments dans B, comprenant $a \cdot b$ éléments. Par exemple « combien de paires garçon-fille peut-on former à partir de 5 garçons et de 4 filles ? ». Les véritables applications sont tout à fait différentes. L'ensemble à étudier doit encore être structuré en paires. Je pense à l'exemple suivant : l'horaire d'une école est divisé selon deux critères, le jour de la semaine et l'heure de classe ; cela donne un modèle de, admettons 5 jours et 4 heures, avec 20 heures par semaine. L'ensemble Ω des heures de classe (si c'est un ensemble) est structuré. Ici, A et B et $\lceil A,B \rceil$ doivent être compris comme des sous-ensembles de Ω, c'est-à-dire A l'ensemble des jours de la semaine, B l'ensemble des heures et $\lceil A,B \rceil$ l'ensemble des paires de jours et d'heures.

Il y a énormément d'exemples comme celui-là. Le plus frappant est celui du rectangle dont la base est divisée en 5 bandelettes et la hauteur en 4 bandelettes (qui ne doivent pas être égales) de manière à obtenir 20 rectangles. Ce modèle permet d'introduire le calcul d'aires si les sous-segments sont unitaires, admettons 5 pour la base et 4 pour la hauteur. J'ai un souvenir très vif de ma première expérience mathématique dans mon enfance pré-scolaire : la grande excitation qui m'a pris quand j'ai compris que l'aire d'un rectangle est calculée en le divisant horizontalement et verticalement. Je vous raconte cela parce que les adultes oublient trop facilement ce qui peut étonner les enfants. Si j'analyse bien cette expérience maintenant, ce qui comptait alors, ce n'était pas le fait que l'ensemble des cinq bandelettes horizontales et des quatre colonnes verticales comportait $5 \cdot 4 = 20$ objets. Cela, je devais déjà le savoir puisque je connaissais déjà la multiplication. La raison de mon excitation doit avoir été la structuration constructive d'un rectangle non-structuré. Mon père l'avait dessiné dans le sable. Un rectangle dans un livre avec toutes les lignes auxiliaires déjà mises n'aurait jamais pu donner une telle force intuitive à cette structure *in statu nascendi*.

Le cardinal de l'ensemble des paires comme produit des cardinaux des ensembles facteurs peut être retenu même par un idiot. C'est totalement hors de propos comme d'ailleurs le sont les problèmes où ces ensembles généraux sont remplacés par des ensembles particuliers. Les seuls problèmes pertinents sont ceux où la structure de l'ensemble des paires doit être créée par l'enfant. En arithmétique traditionnelle, c'est fait pour le rectangle mais seulement pour justifier la formule de l'aire. Une fois celle-ci obtenue, l'élève est autorisé à oublier la structuration du rectangle. Bien sûr, pour calculer l'aire d'un rectangle de 23, 46 cm sur 17, 89 cm, personne ne dessine un rectangle avec ces dimensions-là pour le diviser en je ne sais trop quoi. Donc, la formule de l'aire ne devient pas opérative dans l'instruction arithmétique. Bien sûr, l'enfant peut imaginer de telles subdivisions, mais il n'a pas appliqué assez la structuration de l'ensemble des paires pour pouvoir le faire. Il ne faudrait pas se limiter à des subdivisions équidistantes, mais un rectangle subdivisé selon deux directions devrait être l'application et la visualisation de la structure d'un ensemble d'après deux critères.

En dépit de l'importance que j'accorde ici à l'ensemble des paires comme moyen de structurer, je dois aussi insister sur le fait que c'est tout à fait insuffisant. Cela ne fonctionne pas dans beaucoup de cas où le modèle est cité à tort [1]. Si, dans l'exemple des 5 garçons et des 4 filles, on forme toutes les paires « garçon-fille » (ce qui est un peu fou) alors l'ensemble des paires est correct au sens de la théorie des ensembles. Dans beaucoup de cas, l'ensemble des paires n'est pas adéquat pour les problèmes de multiplication. Je rappelle le problème des cinq chats chacun avec quatre pattes : « combien de pattes y a-t-il ? ». Le « chacun » suggère la multiplication mais, comme je l'ai expliqué précédemment, le modèle sous-jacent n'est pas l'ensemble des paires. Ce modèle convient encore moins bien pour l'exemple suivant : « lors d'une réunion de 5 personnes, il faut choisir un président et un secrétaire ; de combien de manières différentes peut-on le faire ? ». Le modèle mathématique de ces problèmes-là est l'application de P dans Q de manière que tous les éléments de Q aient le même nombre d'originaux. De même, « m paniers avec chacun n œufs » ne structure pas l'ensemble des œufs comme des paires, mais par le moyen d'une application f qui applique chaque œuf à son panier, et cela c'est l'application sur un ensemble-image de cardinal m, où chaque image a précisément n originaux.

Ce modèle devrait être enseigné en profondeur. Ce serait une application de valeur de la théorie des ensembles au lieu de la profusion des applications sans intérêt qui abondent dans les manuels.

Généralisation du modèle rectangulaire

Une fois que le modèle rectangulaire a été exploité pour la multiplication intuitive des nombres naturels, les fractions s'annoncent d'elles-mêmes. À l'aide de ce modèle, la multiplication devient l'opération la plus intuitive avec les fractions. Le carré unité peut être rempli avec $5 \cdot 4$ rectangles de côtés 1/5 et 1/4 ; chaque rectangle est 1/20 du carré et donc $1/5 \cdot 1/4 = 1/20$.
On obtient aussi intuitivement : $2/5 \cdot 3/4 = 6/20$.

À partir d'ici, il y a une petite étape (en particulier avec les fractions décimales) depuis l'interprétation de l'aire du rectangle, comme le produit des longueurs de côtés, jusqu'à l'interprétation d'un produit de deux grandeurs, comme un rectangle, avec les facteurs donnés comme côtés. Comme c'est bien connu, dans l'algèbre géométrique des Grecs, le produit de deux grandeurs est toujours appelé un rectangle ; un vestige de cette terminologie est notre lecture « a carré » pour a^2. Mais, même maintenant, l'interprétation des produits comme rectangles joue un grand rôle, notamment dans la définition et l'application des concepts de l'intégrale. Dans les expériences d'Emma Castelnuovo [2], il apparaît que les enfants visualisent spontanément le moment d'une force comme le produit du bras et de la force.

La visualisation rectangulaire devrait être développée davantage, c'est-à-dire pas seulement avec des longueurs de côtés et des aires de rectangles et pas seulement avec des facteurs qui sont des nombres entiers naturels. Ceci est fortement suggéré par le concept d'intégrale, mais on peut déjà l'aborder à un stade plus élémentaire. On peut appliquer des hommes-heures, des kilogrammes-mètres, des kilowatts-heures, et des watts sur des carrés-unités et les grandeurs mesurées par ces unités sur des rectangles. Par exemple, 100 hommes-heures (watts) comme un rectangle de 5 hommes (ampères) et 20 heures (volts) ou de 4 hommes (ampères) et 25 heures (volts) et ainsi de suite. J'ai déjà expliqué [3] comment cette multiplication de nombres concrets pouvait se justifier mathématiquement, et combien c'est important dans les applications et par

[1] Voir H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, 1973, p. 189.

[2] Voir *Educational Studies in Mathematics* **2** (1970), p. 309.

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

conséquent, dans l'enseignement. La seule chose que je veuille montrer ici, c'est la visualisation.

L'application la plus importante des schémas rectangulaires se trouve dans la multiplication du temps par la vitesse pour obtenir le chemin parcouru (ou le produit du volume par la densité pour obtenir la masse, et ainsi de suite). Je le mentionne ici, mais je ne pense pas que cela puisse être introduit plus tôt. En fait, les durées sont déjà moins intuitives que les chemins parcourus, de même que les vitesses, les densités et toutes les grandeurs dérivées ; pour les obtenir, on doit diviser le chemin parcouru par le temps, la masse par le volume. Pour ce qui est des vitesses, on devrait commencer par expérimenter qu'il y a différentes vitesses ; on devrait estimer leurs relations réciproques d'abord avec « plus » et « moins » et puis « le double » et « la moitié », et la tâche finale serait de trouver une mesure exacte de la vitesse. Une telle procédure peut être répétée avec les poids (masses) et les volumes et beaucoup d'autres paires de grandeurs. Un principe général se dégage de tous ces exemples et doit peut-être être formulé explicitement. Bien sûr, on peut aussi dicter à l'étudiant les règles de calcul de la vitesse et d'autres grandeurs semblables, mais cette méthode n'a jamais réussi de manière convaincante.

Ce n'est peut-être pas l'endroit pour en discuter, mais j'en parle ici pour faire comprendre que le chemin est plutôt long avant d'arriver à des notions comme la vitesse. À un niveau plus élémentaire de l'enseignement de l'arithmétique, on peut se contenter de notions logiquement semblables mais plus intuitives comme le prix unitaire obtenu comme un quotient du prix et de la quantité. Une fois que les vitesses se sont élevées au-dessus de l'horizon des concepts, on devrait tirer toutes les conséquences d'une représentation intuitive. Il faut montrer le rectangle « chemin parcouru » comme un produit du « temps » et de la « vitesse ». Il faut également admettre des vitesses variables pour éviter que les élèves ne croient que les vitesses sont toujours constantes. Dans le mouvement uniformément accéléré, on devrait mesurer l'espace parcouru comme l'aire triangulaire limitée par le graphique de la vitesse et préparer consciemment de cette manière l'intégrale d'une fonction comme l'aire limitée par son graphique. Je dis cela par parenthèse pour y revenir si les graphiques sont traités comme un moyen de visualisation.

Deux sortes de divisions

Après avoir vigoureusement plaidé pour le modèle intuitif, je dois mettre en garde contre tous les excès de l'appel à l'intuition.

Le modèle rectangulaire est relativement symétrique en ce qui concerne les facteurs. Cette symétrie n'apparaît pas quand des nombres concrets sont multipliés. Si des kilogrammes ou des nombres de pièces sont multipliés par des prix unitaires, des heures par des salaires horaires, des nombres de mois par 30, il y a une distinction plus ou moins prononcée entre le multiplicande et le multiplicateur ; si des quantités d'argent sont multipliées par des taux d'intérêts, des contenus par des poids spécifiques, des volts par des ampères, alors on peut à peine distinguer le multiplicande du multiplicateur, mais il n'y a cependant pas de symétrie entre le premier et le second facteur. Néanmoins, le modèle du rectangle convient bien dans tous les cas. On attend d'un modèle qu'il soit utile pour un emploi général.

Curieusement, cette asymétrie était fortement ressentie par les anciens didacticiens dans le cas de la division. La raison en était sans nul doute que la division elle-même était perçue comme une opération très intuitive. Distribuer 20 pains à 5 personnes est

[3] Voir H. Freudenthal, *op. cit.*, p. 207.

intuitivement différent de distribuer 20 pains de manière que chaque personne en reçoive 4. Dans le cas de la distribution de 20 pains à 5 personnes, on parlait de division distributive, tandis que dans le cas où 20 pains étaient partagés en lots de 4 pains, on parlait de division-quotient. L'élève était contraint de résoudre les deux problèmes par deux méthodes différentes, en particulier les divisions longues avaient un autre aspect dans les deux cas. Je ne crois pas qu'il y avait beaucoup de professeurs qui comprenaient et pouvaient appliquer ce que les livres leur disaient de faire.

C'est certainement une manière détournée de traduire la différence entre les problèmes concrets en une différence entre algorithmes. Le sens d'un algorithme, c'est d'être universel. Les schémas généraux sont là pour rendre la vie plus facile. Les ordinateurs ne connaissent, eux aussi, qu'une seule division et ce qui est bon pour l'oie est bon pour le jars.

Bien sûr, il y a des différences dans la manière de poser le problème ; les professeurs devraient en être conscients et les élèves pas. Mais il y a bien plus de manières de poser un problème face à la dichotomie entre la division distributive et la division-quotient. Même dans le cas de la division distributive, il n'est pas vrai, malgré que les manuels tentent de le faire croire, que les 20 pains sont divisés par un nombre abstrait 5 ; c'est bien plutôt 20 pains divisés par 5 personnes, ce qui donne 4 pains/personne (ou 4 pains par personne). Prenons toutes les divisions où l'aire est divisée par la longueur pour obtenir la largeur, les kilogrammes par le volume pour obtenir des kg/cm^3, le chemin parcouru par le temps pour obtenir la vitesse et ainsi de suite. Pour être cohérent, on devrait inventer une division spéciale pour chacun de ces problèmes. On ne peut pas soutenir que deux sortes de divisions soient moins absurdes que quelques centaines. Comme on l'a déjà souligné à maintes reprises, c'est une caractéristique des mathématiques que les procédures isomorphes sont réduites à un seul schéma abstrait. Si, ici, on a besoin d'un modèle intuitif, alors le modèle rectangulaire est à portée de main pour la multiplication et la division. L'élève devrait apprendre à interpréter la multiplication des nombres concrets dans le schéma rectangulaire pour donner une signification concrète à la multiplication, non seulement si des cardinaux sont multipliés, mais encore plus, si ce sont des nombres qui représentent des mesures. Si on utilise ce modèle-ci, alors une certaine symétrie des facteurs est suggérée et par conséquent, il n'est plus nécessaire de distinguer les divisions d'après le facteur qui joue le rôle de diviseur.

Mais une fois de plus, je ne voudrais pas être mal interprété. L'écolier devrait apprendre à résoudre les deux problèmes comme « par combien doit être multiplié 4 pour obtenir 20 ? » et « qu'est-ce qui doit être multiplié par 4 pour obtenir 20 ? » et encore beaucoup d'autres, non pas pour acquérir une certaine routine dans chacun des cas, mais pour comprendre le modèle commun de manière qu'une seule routine suffise.

J'ai traité ce problème parce que les deux types de divisions, quoiqu'enterrées depuis longtemps, surgissent des ténèbres encore et encore, à chaque génération, chaque fois qu'un didacticien se met à penser à la division sur des bases moins solides que celles qu'offre la théorie des grandeurs.

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

La droite des nombres - deux erreurs

Elle est toujours tracée horizontalement parce que c'est la tradition à laquelle nous sommes attachés. Les droites des nombres les plus évidentes sont cependant verticales : le thermomètre, les étages, les instruments pour mesurer le corps. C'est un fait que la droite horizontale des nombres ne fonctionne pas bien avec de jeunes enfants. J'ai appris cela auprès de nombreux enseignants et je ne peux pas croire que leurs classes étaient des exceptions. C'est un fait généralement connu ou plutôt, il devrait l'être. Mais rien n'a changé. La tradition a trop de poids.

C'est dans le « positif-négatif » ou dans le « gauche-droite », comme dans beaucoup d'autres concepts obtenus par polarisation, que les pôles ne sont pas bien distingués. Combien de temps cela ne prend-il pas à certains enfants de distinguer la gauche de la droite, et même s'ils peuvent le faire, ils ne sont toujours pas capables de tourner à droite ou de tourner à gauche, de distinguer entre *b* et *d*, et de distinguer entre 9 heures et 3 heures sur un cadran. J'ai lu dans les journaux que les habitants de Tristan da Cunha avaient du mal à distinguer les concepts de gauche et droite ; au lieu de cela, ils employaient plutôt l'est, l'ouest, le nord et le sud ce qui leur a causé beaucoup de problèmes quand on les a évacués à Londres. Les adultes comprennent souvent mal les difficultés de polarisation des enfants. Ils pensent que c'est évident que la main droite définisse la jambe droite, l'œil droit et le tour à droite, ce qui n'est pas vrai pour les enfants qui ont des difficultés de polarisation. J'ignore si la difficulté réside dans la kinesthésie ou dans le domaine de l'intuition et j'ignore s'il y a des recherches entreprises à ce sujet.

Les nombres naturels sont d'abord présentés comme des nombres de quantité ou comme des nombres qui permettent de compter dans le temps. Le parcours temporel connaît aussi une polarisation, celle du passé et de l'avenir ; c'est cependant une polarisation naturelle et obligatoire. Une ligne droite dessinée qui doit être interprétée comme une droite de nombres doit avoir une direction. En indiquant la direction que nous préférons, nous sommes amenés à tracer des droites horizontales, ou approximativement horizontales, de la gauche vers la droite, mais les droites verticales sont généralement dirigées de bas en haut quoique ceci soit contraire à la direction de l'écriture. Ce qui est en bas et en haut sur le papier est de nouveau une convention : en bas, c'est le bord qui est près de la poitrine de celui qui écrit. Lorsqu'un enfant commence à dessiner, ce n'est souvent pas encore fixé ; mais, avec tous les livres d'enfants où les gens et les animaux sont représentés « sur leurs pieds », le processus d'endoctrinement « de bas en haut » agit vite.

Je crois que si une droite de nombres doit être utilisée avec de petits enfants, elle doit être dessinée verticalement et dirigée de bas en haut. Le bas et le haut, c'est aussi une polarisation, mais elle passe mieux que celle de « gauche-droite ». Peut-être qu'une droite inclinée conviendrait encore mieux ou une échelle inclinée (ne pas employer d'escaliers) ou une bandelette comme dans certains jeux de dés. Bien sûr, de telles propositions ont peu de chance d'être adoptées. La droite horizontale des nombres est trop fermement ancrée. De plus, une droite verticale ou même inclinée dérange sérieusement la disposition régulière d'un texte imprimé. Plus tard, j'indiquerai d'autres conventions traditionnelles qui sont aussi contestables que la droite horizontale mais que personne n'ose remettre en question.

Je dois explicitement attirer l'attention sur une autre erreur que j'ai trouvée dans les livres et les films dans lesquels la droite des nombres est représentée. Comme beaucoup de règles, la droite des nombres est représentée avec des graduations et des traits avec, à gauche, les nombres 1, 2,..., évidemment pas 0. Ceci provoque l'erreur bien connue que commettent les enfants quand ils utilisent une règle (mesurer 1 au lieu de 0). J'ai même vu une droite des nombres où les nombres 1, 2,... se trouvaient exactement entre deux traits. Manifestement l'auteur avait l'intention de numéroter les intervalles. En soi, ce n'est pas tellement idiot. Nous faisons la même chose avec les années après J.-C. : l'année au cours de laquelle Jésus de Nazareth est né est l'année 1 et donc, son premier anniversaire a lieu au cours de l'année 2 (parce que c'était sa deuxième année de vie). Ce qui n'est pas pratique dans cette chronologie, c'est ce qui se passe dans les années avant la naissance de Jésus. L'année au cours de laquelle Jésus est né est définie comme 1 et l'année 0 n'existe pas. Il est clair que l'auteur de manuel qui numérote les intervalles a rencontré les mêmes difficultés lorsqu'il a exploré la région négative de la droite.

La droite des nombres comme moyen de visualisation

Le nombre naturel qu'on pouvait reconnaître comme indicateur de quantité de boules dans le cas du boulier, de cubes dans le cas des réglettes et des plateaux, est tout à fait abandonné dans le contexte de la droite des nombres. Une suite de points équidistants est numérotée comme les maisons dans une rue et bientôt, la suite est continuée à gauche du zéro. Tous les manuels que j'ai examinés montrent un passage abrupt et non motivé à la droite des nombres après une demi-année ou une année d'enseignement des nombres comme indicateurs de quantité. On a l'impression qu'aucun auteur de manuel n'est conscient de ce changement. Il commence tout simplement à employer les nombres enseignés jusque là, dans un contexte qui n'a pas grand chose à voir avec leur définition quantitative. Vraisemblablement, ni les professeurs ni les élèves ne s'en rendront compte ou n'en seront handicapés. En fait, l'aspect de dénombrement qui prévaut sur la droite des nombres, quoique réprimé par l'approche quantitative, est depuis longtemps familier même pour les enfants, qui, ou bien en connaissent l'existence avant d'entrer à l'école ou bien l'ont rencontré dans plusieurs contextes de leçons d'arithmétique, dans d'autres leçons, dans de nombreux jeux et en dehors de l'école. Au contraire, ce qui serait improbable, ce serait un professeur pour lequel le dénombrement est l'aspect le plus important, qui s'empêcherait inconsciemment de l'enseigner à beaucoup d'occasions, parce qu'un manuel rigide le contraindrait à enseigner l'aspect quantitatif uniquement. Avec la droite des nombres, l'enseignement de l'arithmétique qui avait été artificiellement isolé de la vie de l'enfant et s'était développé dans une serre, lui est de nouveau relié.

Le caractère intuitif de la droite des nombres diffère beaucoup de celui des autres matériels mentionnés précédemment. Il n'exploite ni ne prépare le système de numération de position. Beaucoup d'autres choses peuvent être vues sur la droite des nombres : le « plus ou moins » est visualisé par la direction dans laquelle la droite est parcourue. L'addition est visualisée par un déplacement vers la droite, la multiplication comme une dilatation. L'enchâssement des nombres naturels dans la droite des nombres permet des prolongements au-delà des nombres naturels ; il prépare les extensions de domaines et d'opérations. De plus, les applications viennent tôt, ce qui est un avantage. La droite des nombres est donc un « bon » outil, mais comme pour tout, il y a le danger que les gens tentent d'aller trop loin ou essaient d'obtenir plus que la droite des nombres ne peut donner. Comparée à d'autres matériels, elle n'est pas temporaire, on ne l'abandonne pas après un certain temps comme pour les réglettes.

Savoir si la droite des nombres peut être qualifiée de matériel d'enseignement est une question de terminologie. Dans le sens strict du terme, quelque chose est un

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

matériel d'enseignement si en le vendant, on peut gagner de l'argent. On trouve des paires de réglettes mobiles pour calculer sur la droite des nombres ou d'autres instruments comme la règle à calcul. Le principe est suffisamment simple pour des concrétisations multiples.

J'ai déjà mentionné que la droite des nombres est utilisée de trois manières sur le plan didactique :

1) La droite des nombres comme si c'était une règle, où les points sont invariablement *identifiés avec* des nombres réels, c'est-à-dire, en bref, l'interprétation de la règle, ou l'interprétation objet.
2) La droite qui comporte une échelle avec une origine arbitraire, une unité arbitraire et une direction arbitraire. Les points sont *étiquetés* par des réels, en bref, l'interprétation de coordonnée.
3) La droite comme substrat rigide où les nombres agissent comme des opérateurs (addition, multiplication), l'interprétation d'opérateur.

J'expliquerai pourquoi les deuxième et troisième interprétations sont à rejeter sur le plan didactique, mais avant de passer à cette discussion, je veux expliquer comment l'addition est représentée dans l'interprétation objet. Dans les manuels modernes ,j'ai vu deux méthodes. Dans la figure 6, chaque addition de 3 à 0, 1, 2,... est suggérée par une flèche. Dans la figure 7, la droite des nombres est soulevée comme si c'était une règle et placée trois unités plus loin, à droite. On peut imaginer pour les deux applications qu'elles se sont faites à partir de sauts-unités.

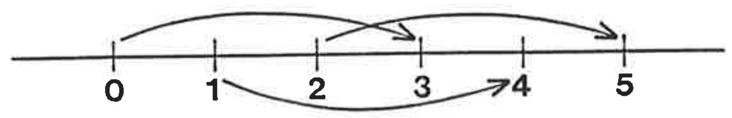

Fig. 6.

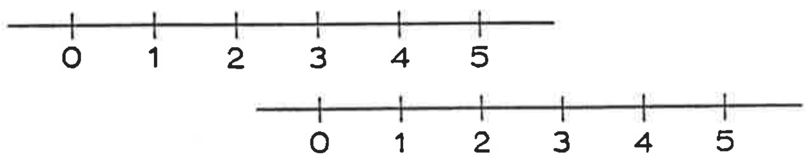

Fig. 7.

Dans cet ordre d'idées, les sauts vers la gauche sont interprétés comme des additions à des nombres négatifs. Ainsi les nombres négatifs apparaissent d'abord avec un signe prédicatoire [4]. Cela conduit immédiatement à leur localisation sur la droite des nombres et donc à l'extension de N à Z. De même, les multiplications sont représentées comme des dilatations.

Donc, toutes les applications sont vues de la manière suivante : à un élément de la droite des nombres est affecté un élément de la droite des nombres, plutôt que de changer l'étiquetage des points. C'est de cette manière que les transformations géométriques sont comprises de nos jours : les points sont affectés à des points ; de cette manière, les déplacements de l'espace sont aussi vus comme des opérateurs dans les espaces de fonctions. C'est une méthode universelle et didactiquement la plus efficace par son appel direct au processus d'application. Son adversaire est la suivante.

[4] N.d.T. : le terme prédicatoire est utilisé ici dans le sens donné par S. Baruk, *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*, Paris, Seuil, 1992.

L'interprétation de coordonnée

C'est une méthode avec un champ très restreint et moins clair, puisqu'elle sépare le point et le nombre l'un de l'autre. Autrefois, c'était courant d'interpréter les transformations comme des changements de coordonnées et les physiciens adhèrent toujours à cette habitude. Bien sûr, aussi longtemps que l'on se borne à un système de coordonnées et à une interprétation réaliste, cela n'a pas d'importance qu'on utilise ou non des coordonnées ; c'est donc une duplication inutile de séparer les coordonnées des points. Mais les adeptes de l'interprétation de coordonnée préfèrent étendre cette interprétation aux transformations. Cela peut se faire uniquement de manière artificielle et mal motivée comme nous allons le voir.

Une nouvelle graduation est introduite sur la droite des nombres avec l'origine à l'ancien 3. L'ancienne graduation est coloriée en bleu, la nouvelle en orange. L'addition de 3 est interprétée comme un changement d'étiquette : au même point la nouvelle étiquette x correspond à l'ancienne étiquette $x + 3$. N'est-ce pas complètement fou que l'addition de 3 conduise de la nouvelle étiquette à l'ancienne ? Bien sûr, on peut éviter cela en disant que l'addition par 3 se fait par un déplacement de l'origine de 3 pas vers la gauche (ou, si l'on préfère, de - 3 vers la droite). Ceci est très confus pour des élèves aux prises avec la polarité gauche-droite, et cela a l'air absurde si la droite des nombres est dessinée verticalement.

C'est pareil pour la multiplication. La multiplication par 3 est représentée en introduisant une nouvelle graduation orange à côté de l'ancienne en bleu et l'affectation de la nouvelle étiquette x d'un point dont l'ancienne étiquette était $3x$, ou en réduisant l'unité au tiers de sa valeur.

Quels péchés graves ai-je donc commis pour être hanté dans mes vieux jours par mes cauchemars de première année d'université ? À l'époque, cela s'appelait la co- et la contregradience. Je l'ai seulement compris au moment où moi-même je l'ai enseigné dans un cours de première année en utilisant l'algèbre linéaire moderne. J'ose maintenant l'expliquer au lecteur, mais je n'oserais pas effrayer de jeunes étudiants avec de tels fantômes.

En quelques mots, j'expliquerai ce que je veux dire : l'espace vectoriel R à n-dimensions est décrit par des coordonnées à travers une base ordonnée $e_1, \ldots, e_n$. Les coordonnées du point $x = \sum \xi_i e_i$ sont donc $\xi_1, \ldots, \xi_m$. On choisit une autre base $f_1, \ldots, f_m$,

$$f_j = \sum_i \alpha_{ij} e_i .$$

Le point x a de nouvelles coordonnées $\eta_1, \ldots, \eta_n$ telles que

$$\sum_j \eta_j f_j = \sum_i \xi_i e_i ,$$

Donc

$$\xi_i = \sum_j \alpha_{ij} \eta_j .$$

Ceci montre comment les coordonnées se transforment dans le sens contraire des bases. Dans la terminologie actuelle, c'est facilement compris mais cela demande un niveau d'études avancé.

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

Je pense que la droite des nombres perd son rôle de visualisation, si l'introduction des opérations implique de telles complications. Il faut bien entendu à un moment donné faire des exercices sur les changements d'origine et d'unité. Ceci relève plus des transformations de coordonnées en géométrie analytique ou en algèbre linéaire. Les professeurs savent que c'est un chapitre difficile. On ne peut pas le justifier comme moyen de compliquer l'introduction et la représentation intuitive des opérations.

L'interprétation d'opérateur

Dans l'interprétation d'opérateur, les nombres ne sont pas identifiés avec des points de la droite mais avec les applications de la droite vue comme un bâtonnet rigide. La droite est un substrat. La chose mathématique essentielle, ce sont les opérations avec la droite. 3 n'est pas un point de la droite mais l'application qui déplace chaque point de 3 unités vers la droite. La somme de 3 et de 5 est l'application composée de l'application 3 et de l'application 5, c.-à-d. la composition d'un déplacement de 3 et d'un déplacement de 5 vers la droite et ceci résulte en un déplacement de 8 vers la droite. D'autres le formulent de la manière suivante : 3 est une flèche de taille 3 dirigée vers la droite qui peut être placée n'importe où sur la droite. On ajoute les flèches en les joignant de l'extrémité vers l'origine.

Cela semble élégant. C'est une méthode qui est populaire en mathématiques avancées, à juste titre je pense. L'interprétation habituelle de l'addition montre un manque de symétrie. Un nombre est ajouté *à* un autre, l'un est un objet direct de l'opération, l'autre un objet indirect, pour le dire grammaticalement. Sur la droite des nombres, cela revient au même. Si j'ajoute 3 à 5, le 5 est un point à qui il arrive quelque chose, 3 est une opération et le résultat 8 est à nouveau un point. Par l'interprétation d'opérateur, cette asymétrie semble supprimée. J'expliquerai plus tard pourquoi cette impression d'asymétrie n'est pas justifiée : elle provient d'une mauvaise interprétation de la méthode. Je poursuis maintenant l'exposé de l'interprétation d'opérateur.

D'après cette interprétation, $\mathbb{N}$ est constitué de sauts au-dessus d'intervalles entiers de la droite des nombres, ou de flèches mobiles. Pour obtenir la multiplication, on peut considérer l'endomorphisme sur le demi-groupe additif $\mathbb{N}$, c.-à-d. les applications f telles que

$$f(a+b) = fa + fb \quad \text{pour } a,b \in \mathbb{N}.$$

C'est bien sûr beaucoup trop abstrait. Pour subir des opérations, $\mathbb{N}$ doit devenir plus concret. $\mathbb{N}$ ne devrait plus être un ensemble d'applications, mais bien le substrat lui-même. Il faut enchâsser $\mathbb{N}$ dans la droite des nombres, et ceci se fait en attachant les flèches par leur origine à une origine arbitraire mais fixe. Maintenant, l'addition des flèches est devenue une addition de points plutôt que de flèches. Tant que ceci n'a pas été fait, on ne peut pas commencer la multiplication. Les multiplications sont des dilatations de la droite des nombres qui respectent la structure additive. La dilatation qui applique 1 sur a est appelée la multiplication par a. Cela encore a l'air asymétrique. Si le produit $a \cdot b$ de a et de b signifie le résultat de la multiplication de b par a, alors a joue de nouveau le rôle du multiplicateur et b celui du multiplicande. C'est un nouveau péché contre l'élégance. C'est bien plus joli de définir le produit de deux dilatations plutôt que de considérer les dilatations comme des produits. Le produit des dilatations qui appliquent 1 sur a et b est défini comme le produit de deux applications, et ab est défini comme l'image de 1 par l'application produit. Ensuite, la dilatation de 1 vers a peut de nouveau être identifiée avec le point a de la droite des nombres et il s'ensuit qu'en opérant la dilatation qui transporte le point 1 de a vers b, on obtient de nouveau ab.

En résumé, plutôt que de définir les opérations d'addition et de multiplication comme des applications, certaines applications de la droite sont considérées comme éléments d'un groupe (demi-groupe), et l'addition et la multiplication sont introduites comme des opérations sur un groupe, en identifiant seulement après les éléments du groupe avec les points de la droite des nombres. Tout ceci, les détails comme le principe, doit être compris par le professeur et enseigné à l'élève.

Le premier qui a réellement approfondi ces difficultés et les a surmontées avec succès a été Dienes. Il a compris que l'interprétation des nombres comme opérateurs ne pouvait être maintenue indéfiniment. À un certain moment, les opérateurs d'un certain domaine doivent être réinterprétés comme des objets, si de nouveaux opérateurs doivent opérer sur l'ancien domaine. Cette réinterprétation doit être faite avec soin et elle ne peut pas se faire avant que l'étudiant ne maîtrise le premier domaine à un point tel que travailler avec lui ne demande plus un cadre intuitif. Dienes a montré de manière merveilleuse comment satisfaire ces exigences. En même temps, si j'ose dire, il a montré que c'est une tâche qui doit être laissée aux didacticiens de génie. En dépit du profit didactique qui peut être gagné de l'interprétation d'opérateur des nombres, il vaudrait mieux ne pas exagérer. Plutôt que d'être rendues plus compliquées, les choses devraient être rendues plus simples, tant pour les professeurs que pour les élèves. Il n'y a pas le moindre doute que l'objectif doit être les nombres comme objets. Les nombres comme opérateurs ne peuvent que bloquer cet objectif.

L'interprétation des nombres comme opérateurs est cultivée par quelques didacticiens uniquement dans le cas de la multiplication, spécialement par les fractions. Si une dilatation par 3 est inversée comme application, on obtient une contraction de 3, qui est écrite comme une multiplication par 1/3. C'est-à- dire, voici la définition de 1/3 : l'opérateur d'une contraction de 3 interprété multiplicativement. Une dilatation par 5 composée avec une contraction par 3 conduit par définition à l'opérateur multiplicatif 5/3. Multiplier de tels opérateurs comme par exemple 5/3 et 7/4 dans le sens de composer des applications est alors une opération intuitive et les règles de multiplication deviennent évidentes. L'addition des opérants et le comportement distributif sous la multiplication sont bien motivés. Mais personne ne peut expliquer pourquoi ces opérateurs devraient non seulement être multipliés entre eux mais aussi additionnés. Ajouter des opérateurs distributifs peut être mathématiquement motivé mais dans un contexte intuitif, cela n'a pas la moindre signification intuitive. Il n'y a jamais eu de problème didactique pour multiplier des fractions ; c'est l'opération la plus facile pour les fractions. L'addition reste une activité obscure si les fractions sont interprétées comme des opérateurs, et la division n'est absolument pas accessible de cette manière.

L'interprétation objet

Ici, tout est définitif depuis le début. Les nombres sont des objets plutôt que des opérateurs et puis, par réinterprétation, des objets. Ils sont attachés fermement à la droite des nombres, ils ne se détachent pas, ils ne reçoivent pas l'ordre de bouger

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

lors de changements d'origine et d'unité. Les applications affectent un objet à un objet.

Beaucoup de gens n'aiment pas cela : l'addition de 3 applique 5 sur 8, avec 5 et 8 qui sont clairement des objets, tandis que 3 est un opérateur. Cela semble asymétrique et c'est vilain. Voilà comment beaucoup de gens le voient, mais cette vision est due à une mauvaise interprétation. Pour expliquer cela, je considère d'abord la multiplication.

$3 \cdot 5$ est lu dans beaucoup de langages européens comme trois fois cinq (ou quelque chose du genre). Curieusement, dans une majorité de pays, on imposait et dans quelques-uns, on impose encore, que 5 plutôt que 3 soit considéré comme le multiplicateur. Je n'en connais pas la raison ; peut-être était-ce l'habitude en arithmétique écrite de mettre le plus petit nombre en deuxième lieu, et qu'il y a une certaine inclination à considérer le deuxième facteur comme le multiplicateur ? Dans de tels systèmes scolaires, les enfants doivent apprendre les tables dans l'ordre $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 4$,... et pour souligner que dans $3 \cdot 5$, le multiplicateur est 5, ils sont obligés de lire cela comme « trois cinq fois ». C'est incroyable que la tendance à la modernisation puisse laisser une telle tradition intacte. En conséquence, dans beaucoup de manuels, la multiplication par 5 est indiquée [5] par

$$x \to x \cdot 5 \text{ ou } \Upsilon_x\, x \cdot 5,$$

plutôt que par

$$x \to 5 \cdot x \text{ ou } \Upsilon_x\, 5 \cdot x$$

En fait, cela ne fait pas de différence à cause de la commutativité de la multiplication, mais ce n'est pas la même chose en pratique. C'est en fait très peu pratique et c'est la clé de la mauvaise interprétation que nous allons analyser.

Ce n'est pas vrai que dans la multiplication par 3 de 5 avec le résultat 15, les nombres se présentent de façon asymétrique comme les gens ont tendance à le croire. Ce n'est pas vrai que ' 3 ' est un opérateur ici ; c'est une interprétation inutile et inadéquate. 3 est un nombre, un objet sur la droite des nombres, tout comme 5 et 15. Il est certain que 3 détermine un opérateur (ou une fonction) à savoir la fonction triple (ou trois fois). C'est la manière dont nous l'exprimons dans le langage courant, et il n'y a pas de raison d'abandonner le confort du langage courant, lorsqu'il y a une distinction claire entre le nombre n et l'opérateur n-fois ; pourquoi effacerions-nous de telles subtilités du langage courant ?

On répond aisément au « pourquoi ». Contre vents et marées, les gens tâchent de faire jouer le rôle de multiplicateur au deuxième facteur, et une interprétation étrange en entraîne une autre. Aussitôt que c'est écrit de manière naturelle

$$x \to 3 \cdot x \text{ ou } \Upsilon_x\, 3 \cdot x,$$

l'opération triple est clairement indiquée par ' $3 \cdot$ '. Donc le signe de fonction est ' $3 \cdot$ '. À chaque $a \in \mathbb{N}$ (ou $\in$ Z, ou $\in$ R) appartient une fonction indiquée par ' $a \cdot$ '.

[5] Bien sûr, ces notations ne sont pas destinées à servir aux élèves ; c'est le langage du didacticien qui fait une analyse.

C'est particulièrement simple : $a\cdot : x \rightarrow a\cdot x$ ou $a\cdot = \Upsilon_x\, a\cdot x$

Cela devient maintenant nettement plus facile de passer du nombre a à l'opérateur $a\cdot$, et inversement. Il y a différentes notations pour les deux et il n'y a pas de raison de s'ennuyer soi-même et d'ennuyer les enfants avec une identification inutile de l'opérateur et de l'opérant.

Pourquoi l'addition ne bénéficie-t-elle pas des mêmes facilités que la multiplication ? Pourquoi ne pas interpréter 3 + 5 comme indiquant le résultat de l'addition de 3 à 5 ? Dans la figure 6, j'ai anticipé cette interprétation. Voici l'opérateur

$$a+ : x \rightarrow a+x \quad \text{ou} \quad a+ = \Upsilon_x\, a+x,$$

Cela veut dire que le saut au-dessus de a est indiqué par ' a + '. Pour ce qui est de l'addition, c'est une extension du langage courant. De manière analogue au « trois fois », nous introduisons le « trois plus » pour éviter que trois soit lancé à la fois comme un opérateur et comme un opérande. Dans l'opérateur ' 3 + ', le nombre 3 intervient comme un objet qui détermine l'opérateur. Dans ' 3 + 5 ', le 3 et le 5 sont des objets de même nature, mais le ' 3 ' plutôt que d'être isolé fait partie de la notation ' 3 + '.

On peut comprendre le moins de la même manière. On obtient la fonction

$$- : x \rightarrow -x \quad \text{ou} \quad - = \Upsilon_x\, (-x),$$

ce qui est visualisé comme une réflexion par rapport à l'origine et par exemple,

$$7- : x \rightarrow 7-x \quad \text{ou} \quad 7- = \Upsilon_x\, (7-x),$$

la soustraction de 7 qui est l'inversion sur la droite des nombres, interchangeant 0 et 7 (figure 8). Plus généralement,

$$a- : x \rightarrow a-x \quad \text{ou} \quad a- = \Upsilon_x\, (a-x),$$

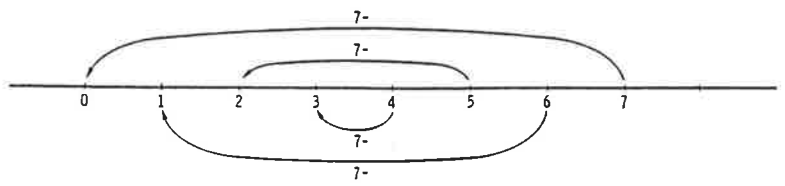

Fig. 8.

est une inversion qui échange 0 et a. Bien sûr, ' - ' peut se comprendre comme un cas particulier de ' a - ', c.-à-d. comme une abréviation de ' 0 - '.

Les enfants manipulent cette visualisation de la soustraction sans difficulté. Le lecteur a peut-être du mal à le croire. Au début, je ne pouvais pas le croire non plus. Jusqu'à ce que je renonce à la camisole de force de mes habitudes algorithmiques, il ne m'est pas venu à l'esprit que 7 - 3 se faisait le plus facilement en détachant 3 de « la fin du 7 », et c'est précisément la description adéquate de ce qu'il advient du 3 s'il subit une réflexion qui échange le 0 et le 7. C'est la raison pour laquelle les enfants le comprennent plus vite que les adultes.

Objections contre l'interprétation objet

En fait, notre interprétation de l'addition et de la multiplication déplace seulement l'asymétrie, ce que certains n'aiment pas. Dans $a+b$ et dans $a.b$, le a et le b sont des objets de même nature, mais à l'inverse du second, le premier est la partie déterminative d'un opérateur. Cela se voit lorsque

$$(?x)\ 3 + x = 7 \quad \text{et} \quad (?x)\ x + 3 = 7$$

sont comprises intuitivement. Elles signifient, en effet, deux choses différentes : « quel est le nombre qui passe à 7 avec un saut de 3 ? » et « quel saut faut-il faire pour passer de 3 à 7 ? ». Avant de rejeter l'usage ou l'interprétation de la droite des nombres à cause de cette asymétrie, on doit considérer qu'il faut exercer les deux inversions, peut-être pas sur la droite des nombres mais au moins sur la ligne du temps, dans des problèmes du genre « John a 7 ans ; quel âge avait-il il y a 3 ans ? » et « John a 7 ans ; combien de temps y-a-t-il qu'il a eu 3 ans ? ». Les didacticiens d'autrefois savaient que dans les problèmes pratiques une inversion ne garantit pas l'autre ; comme beaucoup de bonnes habitudes de l'enseignement de l'arithmétique, celle-ci semble être oubliée trop souvent de nos jours.

Le but de l'enseignement de l'arithmétique devrait être de se restreindre à un seul modèle, et dans ce cas à un modèle symétrique, et pour atteindre ce but l'élève doit apprendre à effacer les asymétries de l'addition et de la multiplication. Elles ne peuvent pas être effacées tant que l'addition et la multiplication sont vues comme « addition à » et « multiplication par », c'est-à-dire comme des applications d'une variable, ce qui a une grande valeur intuitive. C'est un aspect de l'addition et de la multiplication qui n'est pas transitoire. Il coexiste avec la vision de l'addition et de la multiplication comme des opérations binaires. Mais cultiver deux algorithmes différents pour les deux inversions avec deux sortes de divisions est intenable.

De même dans le cas de la soustraction, il faut exercer les deux inversions

$$(?x)\ 7 - x = 3 \quad et \quad (?x)\ x - 4 = 3$$

si pas en mathématiques pures, alors certainement dans les applications, et ceci est trop souvent négligé.

Signes prédicatoire et opérateur

Notre interprétation de l'addition résout un autre problème de didactique traditionnelle. Les didacticiens se plaignent toujours du double rôle des signes plus et moins, comme signe opérateur et comme signe prédicatoire. Des notations telles que

$\bar{1},\bar{2},\bar{3}$,...ou $^{-}1$,$^{-}2$,$^{-}3$,... ont été inventées pour distinguer les deux significations, alors que d'autres préféraient des couleurs différentes. Il faudrait éviter les méthodes et les notations non définitives. Elles me rappellent l'enseignement du latin où, dans les textes de première année, tous les noms de la troisième déclinaison, qui constituent la grande majorité, sont remplacés par des noms de la première ou de la deuxième déclinaison (comme *urbs* par *oppidum*) et tous les verbes irréguliers sont remplacés par des verbes réguliers (comme *ire* par *ambulare*). Comme nous le verrons plus tard, l'enseignement de l'arithmétique utilise des trucs analogues. Le truc du signe, de toute manière, est inutile.

Dans ' 3 + (- 7) ', le ' - ' est un signe prédicatoire ou un pré-signe, de même que dans ' (- 3) + 7 ' ; dans cette dernière expression, le ' + ' n'est pas un pré-signe de ' 7 ' mais un post-signe de (- 3). Pour ce qui est du pré-signe ou signe prédicatoire, ' + 7 ' veut dire la même chose que 7. En d'autres termes, le signe ' + ' comme signe prédicatoire n'est pas nécessaire, tandis que le signe ' - ' peut intervenir comme pré- ou post-signe et dans chaque cas, son rôle est absolument clair.

La systématique de la droite des nombres

Au début, les seuls points marqués sur la droite des nombres sont les éléments de $\mathbb{N}$. L'addition de 3 est un saut à droite de 3 pas unitaires. Si on compose une addition de 3 et une addition de 5, cela produit une addition de 8. Cela conduit à la loi d'associativité de manière plus convaincante que les démonstrations factices habituelles. Dans la mesure du possible, on exercera dans $\mathbb{N}$ les deux inversions de l'addition. La soustraction de 7 est la réflexion qui échange 0 et 7. Sa valeur intuitive a déjà été mentionnée. $(a + b) - b$ et $(a + b) - a$ ont des significations intuitives différentes.

Le besoin d'une inversion sans restrictions de l'addition fait sortir des limbes l'image des nombres négatifs sur la droite des nombres. (- 3) peut soit être interprété comme la partie déterminative de l'opérateur d'addition (- 3) +, ce qui arrive si 3 + doit être inversé aussi loin que possible, ou - 1,- 2,- 3,... sont repérés pour la première fois sur la droite des nombres lorsqu'on demande de résoudre le problème $(?x)\ a + x = b$ sans restrictions. Dans tous les cas, $(- a) +$ apparaît comme l'inversion de a +. De plus, $b - x$ apparaît comme solution de $(?x)\ a + x = b$. Il faut noter que

7 - 3 = 7 - (+ 3) est une trivialité, c.-à-d. une pure convention d'écriture

tandis que

7 - 3 = 7 + (- 3) n'est pas trivial.

La multiplication par un facteur positif s'avère être une dilatation de la droite, notamment si le facteur est a, c'est la dilatation qui applique 1 sur a. Comment la multiplication avec un facteur négatif devrait être interprétée n'est pas évident dans ce contexte. C'est un point sur lequel nous reviendrons plus tard. Comme pour les additions, les multiplications peuvent être composées entre elles et les lois qui s'y rapportent peuvent être énoncées comme conséquence. Finalement, on tâche d'inverser la multiplication, disons une multiplication par 3. Alors, les fractions avec le dénominateur 3 sortent des limbes et $1/3\ \cdot$ s'annonce comme un nouvel opérateur de multiplication. Composer $1/3\ \cdot$ avec $7\ \cdot$ donne $7/3\ \cdot$, et plus généralement, tous les opérateurs de multiplication rationnels $r\,\cdot$, où r est un nombre rationnel (éventuellement négatif).

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

Ici aussi, 1/3 · plutôt que 1/3 est interprété comme un opérateur. Un tel opérateur est suffisamment intuitif. Un bon nombre de ceux qui ont réfléchi à la didactique des fractions l'ont trouvé attrayant et cela fonctionne certainement bien dans les classes. Comme je l'ai déjà expliqué, il y a des limites à cette méthode. Si les fractions doivent être interprétées d'une certaine façon comme des opérateurs de multiplication, alors multiplier des fractions est aussi naturel que de composer des applications, mais ajouter et soustraire de tels opérateurs n'est pas bien motivé. Il existe des méthodes intuitives attrayantes pour introduire les fractions ; elles couvrent joliment la multiplication et puis cafouillent pour l'addition ou n'en parlent pas.

Si l'addition des fractions doit être visualisée, celles-ci sont mieux imaginées lorsqu'elles émergent lors de l'inversion de la multiplication dans Z plutôt que comme opérateurs. Il faut exercer la subdivision de la droite des nombres, et l'addition et la soustraction des fractions devraient aussi être vues comme des sauts sur la droite des nombres.

D'un point de vue intuitif, il y a deux manières d'inverser la multiplication,

$$(?x)\ a \cdot x = 7 \quad \text{et} \quad (?x)\ x \cdot a = 7.$$

La première s'adresse à l'intuition aussi longtemps que a est un entier ; cet appel disparaît dès que a est une fraction. La seconde inversion est à peine accessible à l'intuition même si a est un entier qui n'est pas diviseur ou multiple de a.

En fin de compte, la division par des nombres qui ne sont pas des entiers est une opération formelle sans racines intuitives, que la droite des nombres ou d'autres moyens de visualisation soient utilisés ou non. Sur la droite des nombres et dans le schéma rectangulaire, la multiplication peut encore être vue comme la prise d'un multiple de quelque chose, mais la division ne parvient pas à refléter le processus de subdivision. Bien sûr, on peut toujours l'expliquer comme l'inversion de la multiplication, mais c'est une explication logique plutôt qu'intuitive. Comprendre une telle opération demande d'autres pré-requis que ceux que l'on suppose habituellement en arithmétique élémentaire.

Nous reviendrons au problème didactique des fractions. Mais même avant les fractions, nous avions remarqué des cas où la droite des nombres ne s'était pas avérée suffisante pour une approche intuitive des opérations arithmétiques. Il ne faut pas s'en étonner. Aucun matériel intuitif pris isolément ou aucun modèle ne peut couvrir tout un domaine, mais ensemble ils peuvent se compléter l'un l'autre. C'est une inclination naturelle de s'appesantir sur un modèle particulier, mais le didacticien devrait tester toutes les possibilités dans une expérience de pensée, et lorsqu'une expérience échoue, elle doit être éliminée. En sciences expérimentales, si une expérience échoue, elle n'en réchappe pas par des manœuvres trompeuses. Pourquoi la théorie de l'enseignement a-t-elle besoin de cultiver ses erreurs ?

Les graphiques comme moyens de visualisation

On a discuté ici plus d'une fois de la multiplication des nombres concrets ; un des moyens de visualisation est le modèle rectangulaire. Une visualisation très différente est celle des représentations graphiques de fonctions linéaires. A. Delessert [6] a proposé un moyen de matérialiser la fonction linéaire en utilisant une règle transparente qui tourne sur un pivot sur un damier. C'est dommage que la représentation graphique soit toujours si peu utilisée dans un domaine traditionnellement

[6] Voir *Educational Studies in Mathematics 1 (1969), p. 374.*

dominé par la règle de trois. Bien sûr, les listes de prix d'une denrée de 1 à 10 kg sont pratiques mais un graphique est plus convaincant. Avec les graphiques du chemin parcouru en fonction du temps, il faut être plus prudent : les mouvements ne sont pas nécessairement uniformes. Le terme technique pour ce que d'autres appellent vitesse est la vitesse moyenne, mais peu de gens savent vraiment ce que cela veut dire. Si on vole de Londres à Amsterdam une distance de 350 km en 55 minutes, on entendra le capitaine dire aux passagers que la vitesse moyenne de l'avion est de 850 km/h, où la vitesse moyenne veut probablement dire, comme souvent, la vitesse maximale. De toute manière, il ne faut pas négliger les graphiques de mouvements non uniformes.

Il est évident, je pense, que dans ce contexte, la fonction représentée graphiquement est non seulement un moyen de visualiser mais aussi de résoudre. Même les problèmes décriés de cyclistes qui se rencontrent et qui se dépassent, de sources et d'écoulements qui contrôlent l'économie de l'eau d'un lac, du mélange de vins et d'épices, peuvent être résolus de manière naturelle par les graphiques. Bien sûr, ce n'est pas une raison pour traiter de tels problèmes. Je fais allusion au modèle qui peut être utilisé avec des sujets raisonnables.

J'ai en tête qu'il faut utiliser les graphiques bien avant que les fonctions et leurs représentations graphiques ne soient étudiées plus systématiquement. Comme premier exemple, je mentionne les « lignes de vie » d'un garçon né le 1er juillet 1962 et de son père né le 1er janvier 1937 : « quand le garçon aura-t-il la moitié de l'âge de son père ? » (Figure 9). Ou prenons l'exemple de la figure 10, des trains voyageant de A vers B en directions opposées avec des vitesses différentes : « quand vont-ils se rencontrer ? ». Ou dans la figure 11 qui montre comment quelqu'un transfère un montant mensuel de son compte vers celui d'un autre, avec la question : « quand le compte du bénéficiaire sera-t-il plus élevé que celui du débiteur ? ». Regardons finalement un exemple d'addition et de soustraction graphiques comme dans la figure 12 où un bateau se déplace avec ou contre le courant. La figure 13 montre la représentation graphique de mouvements cycliques comme les aiguilles d'une montre qui se croisent régulièrement. Les fonctions discutées précédemment

$$\curlyvee_x a+x \text{ et } \curlyvee_x a \cdot x$$

ne devraient pas être négligées non plus ; dans ces exemples, les variables numériques ont un sens très concret.

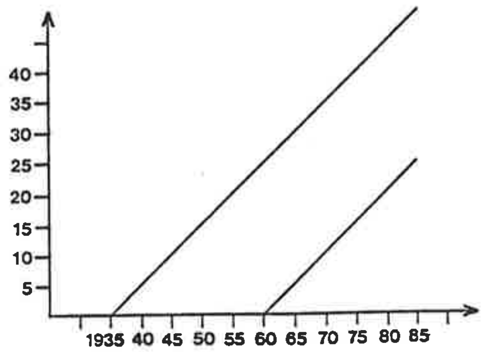

Fig. 9.

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

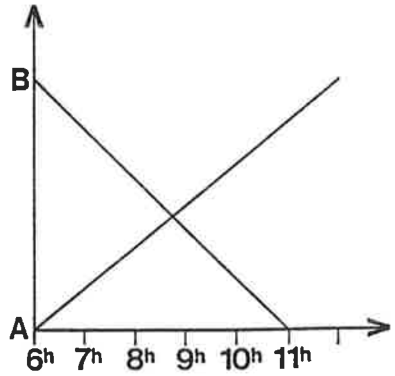

Fig. 10.

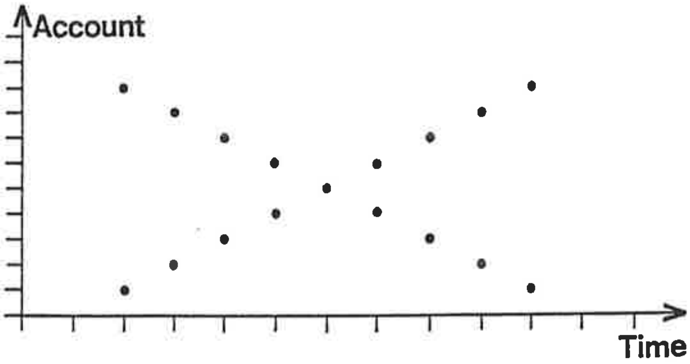

Fig. 11.

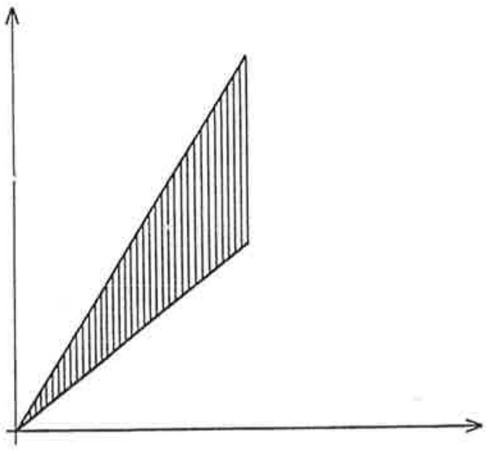

Fig. 12.

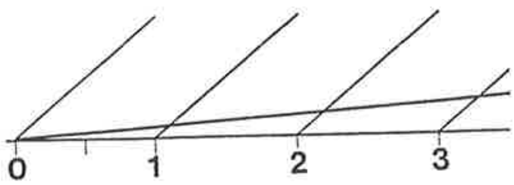

Fig. 13.

Le levier

J'ai plusieurs fois proposé le levier comme moyen de visualisation, pour montrer non seulement les nombres négatifs mais aussi certaines opérations et les lois algébriques. Par la suite, lorsque j'ai voulu élaborer mes propositions, je me suis trouvé face à des difficultés. Le résultat n'était pas satisfaisant. Peut-être d'autres profiteront-ils de mon expérience et la tenteront-ils avec plus de bonheur ? La situation est la suivante :

les entiers (ou même les rationnels ou les réels) sont représentés sur un levier de deux manières ; d'abord, comme distances sur le bras de levier comptées à partir du point d'appui à droite positivement, à gauche négativement comme sur une droite des nombres horizontale, deuxièmement comme des forces (poids) qui agissent positivement de bas en haut et négativement de haut en bas - le dispositif habituel pour inverser les forces est la poulie [7]. Le produit de deux grandeurs représentées est physiquement disponible comme le moment (force fois bras de levier). L'addition est représentée en ajoutant physiquement. C'est bien connu que le levier est en équilibre si la somme des moments, c.-à-d. une certaine somme de produits disparaît.

Ceci nous amène aux difficultés dont j'ai parlé. Comment doit être interprétée l'égalité entre deux expressions. Si c'est une balance, l'équilibre doit être le critère d'égalité de contenu des deux plateaux. Mais aussitôt que nous comptons les distances sur un bras comme positives et sur l'autre comme négatives, nous perdons la liberté de faire cela. L'équilibre signifie que la somme des moments disparaît. Les seules équations que nous puissions lire directement sur le levier sont celles de l'état d'équilibre, c.-à-d. celles pour lesquelles la somme de certaines expressions disparaît. Peut-être faudrait-il essayer d'identifier le moment avec un effet de rotation intuitif et considérer que deux expressions réalisées par des poids sur des bras différents sont égales si elles montrent le même effet de rotation ? Mais ceci ne pourrait se faire qu'à un niveau assez avancé. L'action de rotation et le moment ne sont pas suffisamment élémentaires.

Plus concrètement, nous pouvons définir l'égalité de deux expressions sur le levier lorsqu'elles sont en équilibre avec un poids fixe sur un bras fixe ; par exemple, $3 \cdot (-4) = 4 \cdot (-3)$ parce qu'ils sont tous les deux en équilibre avec $4 \cdot 3$ (figure 14).

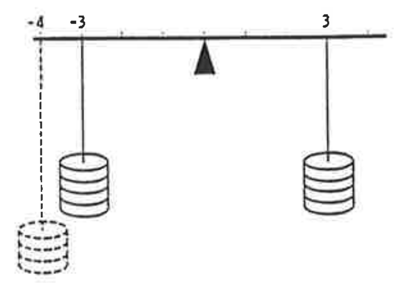

Fig. 14.

Supposons ce problème résolu. Alors survient un second - la représentation du levier fournit les sommes de produits. Comment représenter la soustraction ? Enlever ne fonctionne pas bien. On peut toujours suspendre l'élément à soustraire du « mauvais côté » du levier, mais c'est une interprétation artificielle.

[7] K. Orlov (Voir *Educational Studies in Mathematics* 3 (1971), pp. 192-205) utilise un autre dispositif. Comme il préfère des bras constants, il ne peut pas représenter la multiplication avec son instrument.

En dépit de ces problèmes, je pense que le levier est un outil de valeur, si au lieu de le surcharger avec toute l'arithmétique, on l'utilise pour illustrer des idées algébriques et pour démontrer l'une des applications les plus importantes des nombres négatifs. Au moyen du levier, on peut voir si certaines expressions sont positives ou négatives. La positivité ou la négativité d'expressions se reconnaît si le levier tourne à droite ou à gauche. Ce que j'appelle l'effet « rotationnel » n'est pas facile à comprendre s'il s'agit d'une compréhension *quantitative*. Mais si c'est la « qualité » qui compte, c.-à.-d. si l'on doit seulement décider si une force quelconque fait tourner le levier à gauche ou à droite, c'est plus palpable. Par ce moyen, on décide vite laquelle des expressions $5 \cdot 7$, $(-5) \cdot 7$, $5 \cdot (-7)$, $(-5) \cdot (-7)$ doit être comptée positivement ou négativement. En particulier, le levier montre joliment que les signes moins se suppriment lors d'un produit. Il faut mentionner qu'Emma Castelnuovo a produit d'autre belles justifications par analogie.

Pourquoi, vous demandez-vous, tant de justifications de $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ si la manière la plus expéditive est de l'ordonner ? Et s'il faut vraiment l'illustrer, pourquoi ne pas se limiter à un exemple ? À cela je répondrai que formaliser une action opposée par un signe moins est le fil qui passe par toutes les applications des nombres négatifs et qu'utiliser la multiplication est un test pour savoir si l'application est appropriée et profonde. De l'arithmétique aux mathématiques, le chemin devrait être chargé de relations. On ne peut pas se permettre d'en manquer une seule. Mais il faut éviter d'exprimer un modèle jusqu'à la dernière goutte. Avant de rencontrer des difficultés, il faut s'arrêter et retarder un traitement plus systématique du levier.

Les calculateurs

J'ai mentionné plusieurs fois le boulier comme outil intuitif d'enseignement de la numération décimale de position. Quoique ce soit plutôt inhabituel, je compterais aussi les calculateurs comme matériel intuitif - je veux dire les machines non automatiques avec une manivelle, pas un substitut ou une machine électrique. Je suppose qu'on a dû l'utiliser quelque part dans les classes mais je ne connais pas de publications à ce sujet. Je proposerais l'usage de calculateurs dès que des additions comme $8 + 5$ doivent être faites, mais à ce stade conjointement avec le boulier. Que peut-on attendre de ce matériel ?

D'abord, il prépare l'élève à quelque chose qu'il devra apprendre de toute manière, à savoir l'usage des machines à calculer, mais cet aspect n'est pas très important. Ce qui compte maintenant, c'est que les calculateurs non automatiques peuvent donner une excellente perception de la numération de position ; c'est une démonstration oculaire de l'addition et de la soustraction de position, et du transfert ; il montre comment les chiffres sont mis en colonnes, comment les multiplications et les divisions sont effectuées comme des additions et des soustractions itérées, et ce qu'est un reste ; la position de la virgule devient plus claire avec les calculateurs. Un autre avantage est que l'élève est confronté à des problèmes réalistes et donc numériquement plus élaborés, sans être noyé par les erreurs de calcul, et en particulier, les divisions désespérément longues.

Je connais des gens qui objectent que l'étudiant après avoir été gâté par le calculateur refusera d'apprendre les tables de multiplication. Il faut évidemment éviter cela. Un professeur imaginatif peut inventer plusieurs moyens. Soit un étudiant qui construit la table $1 \cdot 7, 2 \cdot 7, \ldots$ et note les résultats dans son cahier ; c'est plus fiable que l'ancienne méthode d'établir les tables par ses propres moyens et cela poursuit le même objectif. Imaginons deux étudiants en concurrence l'un avec l'autre pour des multiplications et des divisions, l'un à la machine et l'autre mentalement. Si c'est fait à fond, celui qui est à la machine apprendra et n'oubliera jamais que $9 \cdot 9$ à la machine prend un certain temps.

Parmi les méthodes intuitives dont j'ai discuté, le calculateur conduit au calcul écrit le plus en douceur. Bien sûr, je ne voudrais pas abolir les longs calculs écrits. Si je ne discute pas de ces techniques dans ce paragraphe, cela signifie seulement que je ne saurais qu'ajouter à ce domaine classique de l'instruction, à part sa connexion avec les calculateurs. Nul doute que l'habileté en arithmétique mentale et écrite va diminuer avec l'usage du calculateur, mais je ne crois pas qu'il faille le déplorer. En fait, cette habileté n'a jamais été aussi bonne dans le passé que les gens le pensent. Depuis plus d'un siècle, chaque génération adulte s'est plainte du déclin de l'habileté arithmétique dans la jeune génération.

Il y a cependant deux algorithmes que je ne peux pas éviter de discuter - les fractions et la règle de trois. En arithmétique traditionnelle, ces algorithmes ont une base rationnelle plutôt qu'intuitive. À cet égard, ils diffèrent des algorithmes de l'arithmétique pure avec des entiers. Mais avant de traiter ces sujets, je dois aborder un problème de nature plus fondamentale.

Méthode rationnelle contre méthode intuitive - Règle de trois et fractions

Jusqu'où doit s'étendre le cadre de l'arithmétique élémentaire ? Dans l'enseignement de l'arithmétique élémentaire, les nombres et les opérations sont au départ des données intuitives, et les applications ont elles aussi un caractère intuitif. Bien entendu, l'arithmétique devient de plus en plus abstraite ; on travaille avec des nombres qui sortent des limites de l'imagination et le contenu des problèmes appliqués dépasse lui aussi l'imaginable. Les didacticiens chevronnés essayent des moyens intuitifs plus sophistiqués pour dépasser ces limites, et souvent avec succès. Nous avons mentionné le graphique de la fonction linéaire, qui échoue lorsqu'il faut illustrer la dépendance de plus d'une variable. Le moyen classique pour organiser ce domaine, c'est la règle de trois ; mais c'est loin de l'intuition et logiquement surchargé. Tout le monde sait que ces méthodes battent la campagne. Ceux qui ont appris l'algèbre résolvent ces problèmes par l'algèbre, ou devraient le faire ; si les problèmes dans ce domaine sont plus élaborés, il va les algébriser immédiatement par un usage explicite des inconnues. Les professeurs et les auteurs de manuels qui connaissent l'algèbre et qui néanmoins imposent à leurs élèves de résoudre de tels problèmes par les méthodes d'arithmétique élémentaire pratiquent l'imposture ; s'ils n'ont pas maîtrisé l'algèbre, ils conduisent leurs élèves à tâtons dans le noir. C'est de nouveau de la pédagogie avec deux poids et deux mesures, la doctrine des deux vérités, une pour Jupiter et une pour le boeuf. C'est très courant même dans l'éducation universitaire : éliminer d'une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre toute théorie des fonctions et peut-être même les nombres complexes ; remplacer les intégrales par des sommes stupéfiantes ; en bref, rendre élémentaire un sujet de telle manière que la version élémentaire peut être comprise seulement par ceux qui ont maîtrisé la version non élémentaire - ce sont des traits courants d'une philosophie de l'enseignement répréhensible. Si l'algèbre est le moyen le plus adéquat de résoudre un problème, alors l'élève a le même droit que le professeur de le résoudre de cette manière. Si Paul Pry de quatrième année demande si on peut le faire avec x, alors la réponse « attends la huitième année » est une déclaration de faillite pédagogique. La réponse n'est pas honnête non plus parce qu'en huitième année, avec les équations du second degré en vue, il faut passer

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

trop de temps à ouvrir et fermer des parenthèses et on ne peut plus s'occuper des problèmes d'arithmétique élémentaire que le professeur de quatrième a promis à Paul Pry de résoudre par l'algèbre. Pour une majorité d'écoliers, cela veut dire qu'il ne sauront jamais ce qu'on peut faire avec l'algèbre.

Que peut-on faire avec les traditionnels problèmes de mots ? Je veux dire lorsque trois grandeurs a, b, c reliées par la relation $ab = c$, deux d'entre elles sont données et la troisième est demandée, ou de quatre grandeurs a, b, c, d reliées par $abc = d$, trois sont données et la quatrième est demandée (par exemple, chemin parcouru = vitesse fois temps, ou intérêt = capital fois taux d'intérêt fois années, et ainsi de suite. Mais je pense aussi à des problèmes comme : « quel nombre doit être multiplié par ... pour obtenir ... ? »). Ce sont des questions qui émergent de l'arithmétique élémentaire mais vont au-delà. On ne devrait pas les bannir de l'arithmétique élémentaire mais on ne doit pas non plus les cultiver comme c'était souvent le cas par le passé. L'élève devrait apprendre à aborder de tels problèmes par des moyens intuitifs, même par des moyens *ad hoc*, et il devrait le faire de manière diversifiée. Eu égard à ces concepts, ces méthodes intuitives sont à nouveau d'un niveau pré-mathématique. L'élève ne devrait pas rester à ce niveau parce qu'il doit continuer à étudier des mathématiques. La première expression d'une tendance mathématique dans ce contexte est, en effet, d'analyser et de comprendre ses propres actions. Depuis toujours, les bons didacticiens de l'arithmétique élémentaire ont tenté cette approche avec peu de succès. Ils avaient l'espoir que l'écolier analyserait son activité logique, avec des moyens logiques empruntés au langage courant ou dans une version artificielle du langage courant - je pense à des formulations du genre : « le quotient de a et b est le nombre par lequel b doit être multiplié pour obtenir a ». Évidemment, c'est plus simple avec x. La version en langage courant est l'une des versions élémentaires artificielles que j'ai rejetées plus haut. C'est une illusion de croire qu'un élève qui n'a pas la maturité pour employer x peut travailler avec de telles formulations même s'il est capable de les comprendre.

Les exercices que j'ai mentionnés plus haut se justifient uniquement en vue de ce qu'ils préfigurent ; ils ont seulement du sens s'ils sont une préparation aux mathématiques correspondantes, notamment l'algèbre. Ils n'ont donc pas de sens s'ils viennent avant qu'un accès à un niveau supérieur ne soit possible, ou avec des enfants qui ne sont pas capables de raisonnement mathématique ; mais ils ne doivent pas durer plus que le temps nécessaire pour préparer l'écolier à l'algèbre. D'autre part, il ne faut pas les négliger comme préparation à l'algèbre si l'élève doit jamais apprendre l'algèbre comme quelque chose qui doit être appliqué.

Peut-être mes remarques sur la règle de trois et celles qui lui ressemblent sont-elles vieux jeu ? J'enfonce peut-être des portes ouvertes. J'ai beaucoup insisté sur le sujet parce que dans un cas analogue (je pense aux fractions) des conséquences analogues n'avaient pas encore été tirées, et je pense que les mêmes arguments contre la règle de trois s'appliquent aussi à l'enseignement traditionnel des fractions. On peut difficilement mettre en doute que l'enseignement des fractions est un grand échec didactique. Je suis convaincu que cela le restera tant que les fractions sont confinées à leur contexte actuel, à savoir celui de l'arithmétique élémentaire.

Les enfants peuvent travailler intuitivement avec des fractions intuitives. C'est la raison pour laquelle l'introduction intuitive traditionnelle aux fractions fonctionne merveilleusement bien. Ce succès engage le professeur à s'attaquer aux fractions algorithmiques pour arriver, peu après, à l'inévitable catastrophe. Entre le diable et la grande bleue, l'enfant apprend les règles de simplification et les quatre opérations pour les mélanger aussitôt et les modifier *ad lib*. En fait, c'est un jeu absurde.

2/3 + 1/3, 2/3 - 1/3, 2/3 · 1/3, 2/3 : 1/3 n'est pas un problème ; cela se voit, si on ouvre les yeux, sur la droite des nombres. Mais qu'est-ce qu'il faut faire avec 127/131 et 8/47 ? Pour être sûr, ces nombres peuvent être situés approximativement sur la droite des nombres ; avant de travailler avec des expressions contenant de telles fractions, l'élève devrait faire une estimation grossière du résultat pour éviter des désastres. L'opération la plus significative et la plus intuitive avec les fractions est la multiplication. Simplifier a aussi du sens, mais manque d'un support intuitif tout en étant bien motivé ; l'addition et la soustraction font bien appel à l'intuition mais la motivation est pauvre et le sens peu apparent. La division, même avec des fractions intuitives, est très éloignée de l'intuition de l'arithmétique élémentaire, sans motivation ni signification. Travailler sur des fractions compliquées, sauf peut-être pour les simplifier, n'a pas de justification en arithmétique élémentaire.

Les fractions compliquées et les opérations sur elles sont des inventions des enseignants qui ne peuvent être comprises qu'à un niveau plus avancé. Van Hiele a remarqué et souligné le fait que l'idée qui domine et motive les fractions est nettement algébrique. Les fractions et les opérations sur les fractions sont introduites pour garantir une validité sans restriction des quatre opérations et de leurs lois. Cette idée d'un domaine clos sous certaines opérations est entièrement algébrique ; c'est la base de toutes les entités algébriques. Dans la mesure où elles sont moins intuitives, les fractions et leurs opérations devraient être motivées par cette idée. Je sens que ce n'est que justice de le dire de cette manière - d'exiger explicitement la validité des opérations arithmétiques. C'est une motivation abstraite, à peine influencée par des besoins pratiques ; c'est de l'algèbre *in optima forma*. Je suis d'accord que les nombres négatifs, eux aussi, doivent leur existence au désir d'une opération sans restriction, à savoir, la soustraction, mais à part cela, ils sont fortement motivés par l'intuition, ce qui est beaucoup moins le cas des fractions.

On assiste aujourd'hui à beaucoup d'efforts pour améliorer l'enseignement des fractions dans le cadre de l'arithmétique élémentaire. Certains d'entre eux sont remarquables et je serais le premier à les accueillir s'ils ne déviaient pas l'attention du vrai problème. Même si ces efforts sont didactiquement valables, ils sont en même temps dangereux parce qu'ils ne font que retarder la vraie solution, peut-être indéfiniment. À mon avis, la seule solution acceptable, c'est de traiter les fractions en algèbre.

Cela ne signifie évidemment pas les introduire comme classes d'équivalence de paires de nombres. Quoique j'ai abordé le sujet au chapitre XI [8], je pense que cela vaut la peine de répéter mon analyse brièvement. Une fraction comme 7/3 est inventée pour résoudre l'équation (?x) $3x = 7$. Donc, on prend un x et on travaille avec ce x pour que $3x = 7$. J'appelle cette règle de comportement le « principe algébrique ». Lorsqu'on multiplie les deux membres par 5, on obtient $15x = 35$, ce qui implique que 7/3 et 35/15 sont les mêmes. Pour ajouter 7/3 et 3/5, on procède en déduisant de $3x = 7$ et $5y = 3$ une équation pour $x + y$, à savoir $15\,(x + y) = 44$, et donc $x + y = 44/15$.

Les autres opérations devraient être enseignées de manière semblable. Cela signifie travailler avec $x, y, \ldots$ comme si c'étaient des solutions de certaines équations tout en appliquant les règles arithmétiques habituelles. J'ai discuté l'inévitable reproche que cette stratégie présuppose l'existence de la somme, du produit, etc. La même remarque peut être reformulée en version positive : lorsqu'on suppose l'existence des somme, produit, etc., alors les lois arithmétiques du système étendu, la forme algorithmique de la somme, du produit, etc. sont démontrées rigoureu-

[8] Voir H. Freudenthal, *op. cit.*, p. 226.

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task, Freudenthal H.

sement. Ceci est bien plus important que l'existence parce que c'est la caractéristique qui est utilisée encore et toujours.

Méthode rationnelle contre méthode intuitive - Les nombres négatifs

En ce qui concerne la règle de trois et les fractions, j'ai plaidé pour le passage direct des méthodes intuitives à l'algèbre. Pour les nombres négatifs, j'ai peut-être laissé croire qu'on pouvait continuer indéfiniment avec les méthodes intuitives. Je voudrais cependant faire une mise en garde. Il y a des limites. À long terme, l'intuition peut freiner l'élève. Le but de l'arithmétique élémentaire est l'aptitude algorithmique - ce n'est pas par accident que le mot algorithme provient du nom de l'auteur du premier livre sur le calcul indo-arabe.

Les expériences du début de ce siècle font preuve d'une arithmétique faible et souvent liée à une approche intuitive obstinée et primitive du concept de nombre, mais je ne crois pas que de telles pathologies démontrent quoi que ce soit. Normalement, les éléments intuitifs dans les activités mentales sont graduellement broyés. Cela ne veut pas dire qu'ils n'ont pas été utiles. Si l'élève peut calculer 7 + 5 et l'appliquer, c'est qu'il l'a fait une première fois intuitivement ; s'il fait des additions avec le crayon et le papier, c'est à la suite de ses expériences avec le boulier ; et si finalement, il est capable d'appliquer l'arithmétique de la manière dont il a été drillé, c'est probablement décisif qu'il connaisse la signification intuitive des opérations en plusieurs versions.

Mais il n'est pas recommandé de s'appuyer trop sur une approche intuitive comme moyen didactique. Nous avons signalé qu'en fin de compte, cela échoue pour les fractions, malgré que des succès au début puissent inciter le professeur à une algorithmisation prématurée. Nous avons reconnu que la validité de l'approche intuitive peut être étendue par des artifices attrayants et des pratiques didactiques délibérées dans l'enseignement des fractions, mais que cela ne conduit pas assez loin pour être rentable et que les fractions doivent, en définitive, être abordées d'une autre manière. Pour la règle de trois, c'est le même problème. Les méthodes intuitives, aussi valables soient-elles, ne vont pas assez loin. J'en conclus qu'un abandon, au bon moment, des méthodes intuitives au profit des méthodes rationnelles est recommandable ; mais il faut insister pour que ces méthodes rationnelles soient de vraies mathématiques plutôt que des ersatz.

Même à un stade antérieur, il faut se poser la question de savoir jusqu'à quel degré les méthodes intuitives sont fiables. Il faut se poser la question dès que les lois d'arithmétique sont formulées. Doivent-elles être empruntées à l'intuition ou bien l'étudiant devrait-il apprendre à les justifier par des moyens rationnels ? Si je mentionne les lois de l'arithmétique, je ne vise pas l'addition. La commutativité et l'associativité ont l'air si évidentes que leur évidence ne peut être mise en doute qu'à un niveau plus avancé. Bien sûr, elles sont appliquées implicitement, par exemple, si on calcule $8 + 5$ via $8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3$. Ceci est en fait une loi arithmétique, mais est-ce bien payant de la motiver explicitement ? La connexion entre l'addition et la soustraction est bien différente. Mais de façon à motiver que $(?x)\ 8 + x = 13$ se résout par $x = 13 - 8$ etc., les significations intuitives de l'addition et de la soustraction suffisent. La loi de distributivité gouverne l'arithmétique algorithmique à un très haut point mais, même ici, je ne vois pas de raison pour une justification autre qu'intuitive. Les lois telles que $a - (b + c) = a - b - c$ sont un peu différentes ; quoiqu'elles soient intuitivement claires, on est enclin à verbaliser l'idée intuitive : au lieu d'enlever b et c ensemble, on peut les enlever l'un après l'autre.

Je pense que le besoin d'une rationalisation qui dépasse la démarche intuitive est d'abord perçu avec les nombres négatifs - J'aime placer les nombres négatifs avant les fractions quoique par tradition les fractions appartiennent à l'arithmétique et les nombres négatifs à l'algèbre. Les entiers négatifs et leur opération peuvent être abordés de manière intuitive, par exemple sur la droite des nombres, et c'est extrêmement utile de les aborder de cette manière. Mais j'hésite à m'appuyer dessus. Une des raisons pour lesquelles je voudrais être prudent est la difficulté liée à la polarisation dont j'ai parlé plus haut, qui peut dévaluer la droite des nombres.

J'ai déjà discuté d'un traitement rationnel des nombres négatifs. On opère sur x comme si

$$x + a = 0.$$

Un tel x peut être relié à un y, défini par

$$y + b = 0,$$

par addition et multiplication selon les règles habituelles. Alors de

$$(x + y) = (a + b) = 0,$$

il s'ensuit que

$$-(a + b) = -a - b\ ;$$

de

$$b\,(x + a) = 0 \text{ et } (y + b)\,x = 0,$$

il découle que

$$xy - ab = 0,$$

et donc

$$(-a)\cdot(-b) = ab.$$

Nous avons déjà discuté ce genre d'argument.

Cela devrait être parfaitement clair que la difficulté d'enseigner les nombres négatifs réside non pas dans leur introduction, ni dans des problèmes comme $3 - 7$, $7 + (-3)$, $(-7) + 3$, $2 \cdot (-5)$, mais bien dans $3 - (-7)$, $10 - (-7)$, $(-3) \pm (-7)$, $(-2) \cdot (-5)$. Si on fait une démonstration d'une nouvelle méthode d'enseignement des nombres négatifs, c'est intéressant de voir quels problèmes ont été inclus et lesquels ont été négligés. (C'est encore plus intéressant avec les fractions.)

Depuis des années, j'ai diffusé la méthode d'extrapolation inductive. L'élève construit des tables comme les suivantes :

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

$3 + 2 = 5$	$3 - 2 = 1$	$3 \cdot 2 = 6$	$(-3) \cdot 2 = -6$
$3 + 1 = 4$	$3 - 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$(-3) \cdot 1 = -3$
$3 + 0 = 3$	$3 - 0 = 3$	$3 \cdot 0 = 0$	$(-3) \cdot 0 = 0$
$3 + (-1) = \ldots$	$3 - (-1) = \ldots$	$3 \cdot (-1) = \ldots$	$(-3) \cdot (-1) = \ldots$
$3 + (-2) = \ldots$	$3 - (-2) = \ldots$	$3 \cdot (-2) = \ldots$	$(-3) \cdot (-2) = \ldots$

Je pense que je n'ai pas besoin d'ajouter d'autres commentaires. C'est une extrapolation inductive au-delà de zéro. La méthode peut être combinée avec la méthode intuitive ; c'est un complément actif de la contemplation passive de la droite des nombres, puisqu'elle est vérifiée par des calculs et des inférences. Même si l'approche intuitive est préservée, c'est un complément valable, et si la droite des nombres n'est pas du tout utilisée, c'est l'approche la plus naturelle. De plus, à cause de l'induction implicite mais pas encore formalisée, cela prépare aux vraies mathématiques. Cela reproduit ce qui passe pour un nombre compteur dans un processus de comptage et cela préfigure ce qui, à un niveau plus avancé, devient une démonstration rigoureuse.

Arithmétique appliquée

C'est seulement quand j'aurai ajouté quelques mots sur l'arithmétique appliquée que je pourrai dire adieu à l'arithmétique élémentaire. Cette section séparée ne signifie pas que les applications doivent former un chapitre séparé dans l'enseignement de l'arithmétique. Au contraire, je voudrais insister sur les liens étroits avec l'arithmétique « pure ». Est-ce bien nécessaire de le faire ? C'est une vieille tradition que l'enseignement de l'arithmétique commence par et retourne continuellement vers les applications. Au moins jusqu'aux fractions, c'était l'habitude. Un regard superficiel dans les livres d'arithmétique révèle une grande variété d'applications, si j'ose dire, analysées dans les moindres détails. On a souvent l'impression que l'auteur a analysé toutes les possibilités et nécessités de l'arithmétique appliquée. En fait, ce qui nous frappe ce sont les sédiments à plusieurs couches d'une longue tradition, mais le résultat final n'est pas trop mauvais. Cette affirmation inclut les résultats éducatifs. Au marché et dans les magasins, on peut voir pas mal de gens qui maîtrisent l'arithmétique. En particulier, c'est remarquable que l'instruction de l'arithmétique ait réussi à mettre en oeuvre non seulement l'arithmétique mais aussi ses applications. Cela distingue l'instruction de l'arithmétique de l'instruction de l'algèbre et de la géométrie. Cette dernière, enseignée loin de la réalité, ne peut pas être appliquée par ceux qui l'ont apprise et maîtrisée pendant un moment. Ce n'est pas un argument valide de dire que les applications de l'arithmétique sont plus simples. Elles le sont parce que l'arithmétique a été mieux enseignée.

Récemment, j'ai regardé une collection de textes que certains de mes enfants avaient utilisés de 1940 à 1945 pour apprendre l'arithmétique. C'était bien avant les maths modernes. J'ai ouvert l'un des manuels - pour la 5e année. À la page 30, il y a un dessin grossièrement fait d'un quai de gare avec un train ; la page 31 est pour la moitié un horaire des trains ; et en-dessous, un certains nombre de problèmes qui peuvent se poser lorsqu'on regarde l'horaire. Le premier était : « Dimanche, papa est prêt à partir à 8 heures. Il voyagera de Zwolle à Utrecht. Quel train va-t-il prendre ? À quelle heure arrivera-t-il à Utrecht ? ». Je crains que les maths modernes ne haussent les épaules à ce genre de banalité. La question n'est pas bien formulée non plus.

N'aurions-nous pas dû demander la borne inférieure des heures de départ d'un certain ensemble de trains ? Ceci aurait au moins été une formulation décente, même si ce ne sont pas des mathématiques décentes tant que ce n'est pas encadré dans un système axiomatique.

Quelques pages plus loin, je trouve un tarif téléphonique. C'est un régal d'entendre la sonnerie retentir dans ces problèmes, mais c'est dommage que je doive avouer que ces pages ont probablement été sautées, peut-être parce que c'était la guerre et que les gens ne voyageaient pas et ne téléphonaient pas beaucoup. La page suivante comporte des problèmes sur les pourcentages, l'argent et les enfants malades.

Je me demande si les gens se rendent compte de ce que les enfants doivent apprendre dans les leçons d'arithmétique, je veux dire au delà de l'arithmétique elle-même. En combien de formulations différentes le même problème de calcul peut-il apparaître ? Par exemple :

(1) John a 16 ans. Il y a combien de temps avait-il 10 ans ?
(2) John a 10 ans. Dans combien de temps aura-t-il 16 ans ?
(3) John a 10 ans et Peter 16. Combien d'années de plus que John, Peter a-t-il ?
(4) John a 10 ans et Peter 16. Combien d'années de moins que Peter, John a-t-il ?
(5) John a 10 ans et Peter 16. Il y a combien de temps Peter avait-il le même âge que John ?
(6) John a 10 ans et Peter 16. Dans combien de temps John aura-t-il l'âge que Peter a maintenant ?
(7) En 1916, John avait 10 ans. Quand est-il né ?
(8) John est né en 1910. Quel âge avait-il en 1916 ?

Ceci est un très petit choix des formulations du problème 16-10. Ne pourriez-vous pas produire des milliers de problèmes du même genre ? Le citoyen moyen peut les résoudre ainsi que beaucoup d'autres. Ou bien pensez-vous qu'ils sont ridicules ? Si vous le pensez, cela prouve que vous avez bien appris vos leçons.

N'est-ce pas un miracle que tant de gens les aient apprises ? C'est miraculeux mais ce n'est pas un miracle. Cela s'explique bien trop facilement. L'arithmétique a été enseignée en connexion si proche avec ses applications qu'aucun problème d'applicabilité ne peut jamais surgir. L'arithmétique appliquée était et est toujours le chapitre le plus intuitif, proche de l'imagination de l'enfant.

Et si je suis satisfait des résultats de l'enseignement de l'arithmétique élémentaire comme on pourrait le croire, pourquoi alors ai-je passé tant de temps là-dessus ? Pourquoi ? Parce que je ne suis pas du tout satisfait. N'y ai-je pas trouvé un bon nombre de fautes ? De plus, c'est un fait que j'ai pris mes exemples de l'instruction de l'arithmétique dans un passé récent et je ne peux donc pas vérifier l'impact social de l'enseignement actuel à des petits enfants, comme je peux le faire aujourd'hui vis-à-vis de l'instruction que les adultes ont reçue dans le passé. Je peux juger l'enseignement d'aujourd'hui seulement d'après les manuels les plus courants. Si je feuillette les plus récents, je remarque avec anxiété une tendance à s'éloigner des applications. Il y a un effort évident pour rehausser l'approche intuitive - c'est déjà en soi gratifiant - mais on insiste aussi plus sur l'abstraction. De nouveau, en soi, ce n'est pas mauvais. Mais l'abstraction est en général en dangereuse compagnie - l'adhésion à un système. C'est dangereux parce que cela exige l'exclusion de tout ce qui ne rentre pas dans le système. Dans les nombres, le système est : nombre naturel, entier, nombre rationnel, nombre réel. Et le principe du nombre naturel est le cardinal. Quelques applications rentrent dans cette camisole de force. Est-ce que l'indication de nombre dans $ 0, 57 est un nombre rationnel ? Est-ce un nombre naturel

MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 12
DÉVELOPPER LE CONCEPT DE NOMBRE DEPUIS LES MÉTHODES INTUITIVES JUSQU'AUX ALGORITHMES ET LA RATIONALISATION

Traduction : Ch. Bouckaert

Mathematics as an Educational Task,
Freudenthal H.

dans ¢ 57 ? De toute évidence, ce sont des questions sans objet. Et que dire au sujet des nombres de l'horaire des trains ? Dans un *système* arithmétique, il n'y a pas de place pour l'horaire des trains. Les vieux manuels d'arithmétique montraient clairement une progression des problèmes faciles vers les problèmes difficiles, mais étaient peu systématiques. Les mêmes problèmes étaient répétés encore et encore avec des données numériques plus compliquées. Si 16-10 était un problème rédigé, les formulations possibles n'étaient pas enseignées en même temps mais étalées sur un long intervalle. Au milieu de problèmes d'un nouveau type, les anciens étaient répétés. En fait, il y avait de nombreuses répétitions. De tels livres font mal aux yeux de tout systématicien alors que chaque mathématicien aime systématiser.

Le choix des problèmes était le résultat, comme je l'ai caractérisé, d'une sédimentation continue. Peut-être est-ce juste le moment de nettoyer ? Peut-être que plus d'abstraction conduit plus loin que beaucoup d'applications concrètes ? Mais partout j'ai noté une tendance à l'exagération. J'ai peur que si cette tendance triomphe, nos enfants apprendront encore plus de mathématiques qu'ils ne pourront pas appliquer. Ceci en soi pourrait être le résultat le plus heureux. Mais il y a des effets secondaires qui sont bien pires que cela. Comme je le montrerai plus tard, une partie de la littérature des maths modernes est rédigée par des charlatans, quoique la plus grande partie soit rédigée par des honnêtes gens qui manquent simplement d'idées saines sur les principes mathématiques qu'ils proposent pour être enseignés par d'autres.

La tendance à s'éloigner des applications est maintenant évidente même dans les bons manuels. J'admets que plus d'abstraction peut se substituer valablement à trop d'applications. Il faudrait étudier cela sérieusement. Par exemple, les huit formulations du problème 16-10 que j'ai citées sont complémentaires l'une de l'autre par paire. Quatre suffisent, puisqu'il s'agit quatre fois de « de combien a précède-t-il b ? » et « de combien b suit-il a ? ». De plus, les quatre schémas restants sont très proches les uns des autres. En utilisant quelques structures logiques, il s'agit d'un seul et même problème. Bien sûr, l'enfant devrait apprendre à interpréter ces formulations comme des modèles d'une même structure logique, et cela se fait probablement mieux en insistant sur la structure logique que sur l'arithmétique.

Cela vaudrait vraiment la peine de rechercher de telles structures logiques dans l'enseignement de l'arithmétique. Je ne vois aucun signe que les novateurs aient tenté quoi que ce soit de ce genre. Normalement, ils limitent le domaine de la logique tellement étroitement que cela ne peut pas servir à l'enseignement de l'arithmétique ou des mathématiques. Un des sujets favoris est l'étude des relations. L'enfant apprend à les retenir comme des pedigrees. Il apprend peut-être la transitivité de la relation « plus âgé que ». Pour l'enseignement de l'arithmétique, c'est sans valeur. Cela n'a pas d'importance que Peter soit plus âgé que John ou que dans six ans, John soit plus âgé qu'il ne l'est maintenant. Là, on est confronté à une structure plus subtile « tant d'années de plus », et on se trouve face au principe logique que « a possède n années de plus que b » implique « b possède n années de moins que a ».

Bien sûr, l'enfant a toujours appris des principes pareils dans son instruction mathématique, mais là, cela intervient comme une activité au niveau le plus bas sans perception consciente ou au moins sans formulation explicite. Il faudrait exiger qu'à ce moment-là l'instruction ait pour objectif d'amener l'étudiant à un niveau supérieur. Des formulations comme « si Peter a six ans de plus que John, alors John a six ans de moins que Peter » appartiennent à l'instruction élémentaire, et c'est encore plus vrai des schémas comme « si ... a ... ans de plus que ... , alors ... a ... ans de moins que ... ». De plus, ce serait une des premières occasions de convaincre l'élève de remplacer les trois petits point par des lettres.

Cela rappelle l'algèbre. Là cependant, la situation est bien pire. Même au niveau le plus élémentaire, l'élève n'apprend pas à appliquer l'algèbre alors que nous nous sommes plaints qu'en arithmétique, il était maintenu trop longtemps ou même indéfiniment au niveau le plus bas. Nul doute que beaucoup pourrait être amélioré par une analyse soigneuse des situations concrètes, et cela signifie abandonner la tour d'ivoire du système clos.

J'ai cherché d'autres systèmes pour enseigner l'arithmétique. Ce que je propose n'est pas une idée neuve en soi. Elle a parfois été essayée mais souvent retardée jusqu'à la 6e - 8e année alors que cela pourrait être fait plus tôt avec des chances raisonnables de succès. L'arithmétique appliquée est atomisée dans l'instruction traditionnelle. Je ne voudrais pas plaider pour un sujet séparé appelé « arithmétique appliquée ». Je voudrais plutôt introduire des problèmes de type plus intégré, et des situations détaillées qui pourraient être conçues numériquement et interprétées graphiquement. Autrefois, on appelait cela de l'arithmétique commerciale. Ces problèmes sont passés de mode et de toute manière, ils ne sont pas attrayants. Un domaine où de telles situations sont naturelles, c'est la statistique descriptive. Des résultats étonnants peuvent être atteints dans ce domaine comme le montrent les bons manuels du sujet [9]. C'est rafraîchissant de lire de tels livres réalistes après les abstractions habituelles. La parabole du pain et des pierres s'applique toujours.

[9] Par ex., U. Pampallona et L. Ragusa Gilli, *Che cos'è la statistica*, Loescher, Torino, pas d'indication d'année.

Université Libre de Bruxelles
Centre de Documentation Pédagogique - CeDoP
CP 178 - avenue F.D. Roosevelt, 50 - 1050 Bruxelles
02/650 40 35

Prix de vente : 1,65 euros (65 BEF)