PROBLEMATHS
20 mars 2017

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

__**Solution du Problemath 10**__ Une légère variante de ce problème était proposée par un forain sur un des stands de la Schueberfouer de Luxembourg ville. Merci aux étudiants de la Haute Ecole d'Arlon, qui nous l'ont signalé.
Le bord du grand disque D est un cercle C de rayon 2. L'intersection de C avec un petit disque de rayon 1, si elle est non vide, est un arc A d'angle au centre $\alpha < \pi$. On va prouver que $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$.
Supposons, juste pour rire, que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Si a et b sont les extrémités de l'arc A, alors $|ab| = 4sin\frac{\alpha}{2}$ par de la trigonométrie élémentaire. Comme a et b sont couverts par un disque fermé de rayon 1, on a $|ab| \leq 2$, donc $sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$, ce qui est impossible puisque $\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$. Notons aussi que, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$, alors $|ab| = 4sin\frac{\pi}{6} = 2$, donc a et b sont diamétralement opposés dans le disque de rayon 1 et le centre de ce disque est nécessairement le milieu de $[a, b]$.
Ceci prouve qu'il faut au moins 6 disques de rayon 1 pour couvrir le cercle C, puisque chaque disque couvre au maximum un arc d'angle au centre $\frac{\pi}{3}$. De plus , si on veut n'utiliser que 6 disques, leurs centres sont nécessairement les milieux des côtés d'un hexagone régulier inscrit dans C. Ces 6 disques ne couvrent pas le centre o de D: en effet chacun des 6 centres est à distance $\sqrt{3} > 1$ de o. Il est facile de vérifier qu'en ajoutant un septième disque de rayon 1 centré en o, le disque D est entièrement couvert. La réponse à la question posée est donc 7.
__**Ont fourni une solution correcte**__: R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. BODART (BA2 maths), N. RADU (doctorant UCL), N. BOUGARD, M. CORNEZ, A. GREEN, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths) W. DE DONDER (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

__**Solution du Problemath 11**__ Ce problème a été utilisé pour tester les candidats lors d'un entretien d'embauche dans une firme high-tech en Israël.
Alice possède une stratégie lui permettant de ne jamais perdre. Pour le voir, imaginons que les 100 pièces soient colorées alternativement en rouge et bleu. Avant de jouer son premier coup, Alice calcule la somme R des valeurs des pièces rouges et la somme B des valeurs des bleues. On peut supposer, sans perte de généralité , que $R \leq B$. Alice va faire en sorte de prendre toutes les pièces bleues. C'est toujours possible car, puisque les couleurs des pièces alternent, si à un moment de la partie il reste un nombre pair de pièces, les pièces aux deux bouts sont de couleurs différentes. Or, chaque fois que c'est à Alice de jouer, il reste un nombre pair de pièces . Elle pourra donc chaque fois prendre une pièce bleue.
Cette stratégie s'applique plus généralement à toute rangée formée d'un nombre pair de pièces. Par contre, si ce nombre est impair, aucun des joueurs ne possède une stratégie lui permettant de ne jamais perdre. Par exemple, s'il n'y a que 3 pièces (une de 2 euros entourée de deux de 10 cents), Bob gagnera, quoi que fasse Alice. Mais si deux pièces de 2 euros entourent une pièce de 10 cents, Alice gagnera, quoi que fasse Bob.
__**Ont fourni une solution correcte**__: R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), P. VAN OVERSCHELDE (BA1 maths), C. KIERE (BA1 polytech), D. GALANT (BA1 maths UMons), N. RADU (doctorant UCL), Y. SUPRIN (prof de maths), W. DE DONDER (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe)

__**Solution du Problemath 12**__ On cherche les nombres réels $x > 0$ tels que $\sqrt[3]{3+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{x}} = n$ soit un entier > 0. En élevant les deux membres au cube, on obtient, après calculs, $n^3 = 6 + 3n\sqrt[3]{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}$ d'où on tire $(\frac{n^3-6}{3n})^3 = 9 - x$, c'est-à-dire $x = 9 - (\frac{n^2}{3} - \frac{2}{n})^3$. Si $n \geq 3$, alors $\frac{n^2}{3} - \frac{2}{n} \geq \frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$, donc $x \leq 9 - (\frac{7}{3})^3 = -\frac{100}{27} < 0$, une contradiction puisque $x > 0$. Par

conséquent, les seules valeurs possibles de n sont 1 et 2. Les valeurs correspondantes de x sont $\frac{368}{27}$ et $\frac{242}{27}$, et on vérifie facilement que ce sont bien des solutions du problème.
<u>**Ont fourni une solution correcte**</u>: R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. BODART (BA2 maths), N. RADU (doctorant UCL), M. CORNEZ, O. DECKERS, A. GREEN, C. LARIVIERE, Y. SUPRIN (profs de maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

<u>**Solution du Problemath 13**</u> Désignons par p_n la probabilité de gagner un billet gratuit si on est la n-ème personne dans la file. Trivialement, $p_n = 0$ pour $n = 1$ et pour tout $n > 366$ (car il y a forcément deux personnes ayant la même date d'anniversaire parmi les 366 premières personnes). Dans ce qui suit, on supposera donc que $2 \leq n \leq 366$. Si on occupe la n-ème position, on gagnera si et seulement si (1) les $n-1$ personnes devant soi ont des dates d'anniversaire différentes et (2) on a la même date d'anniversaire que l'une de ces $n-1$ personnes. Par conséquent, $p_n = \frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(n-2)}{365}\,\frac{n-1}{365}$, d'où on tire $\frac{p_n+1}{p_n} = \frac{(366-n)n}{365(n-1)}$. Il en résulte que $\frac{p_n+1}{p_n} > 1(\text{resp.} < 1)$ si et seulement si $n^2 - n - 365 < 0(\text{resp.} > 0)$. La seule racine positive du polynôme $n^2 - n - 365$ est $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1461}) = 19,6\ldots$ On en conclut que $p_1 < p_2 < \cdots < p_{19} < p_{20} > p_{21} > \cdots > p_{366}$. C'est donc la 20-ème position dans la file qui maximise la probabilité de gagner. En fait, $p_{20} = 0,0323\ldots$, une probabilité très faible ! Notons aussi que p_{54} est presque égal à $p_2 = \frac{1}{365} = 0,0027\ldots$, ce qui peut sembler paradoxal a priori.
<u>**Ont fourni une solution correcte**</u>: T. GLAVAS (élève de 3ème à la St Johns International School à Waterloo), R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame à Beauraing), C. KIERE (BA1 polytech), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. BODART (BA2 maths), N. RADU (doctorant UCL), O. DECKERS, P. GILLET, A. GREEN, T. HAMEL, Y. SUPRIN (profs de maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

Pour terminer en beauté, voici le palmarès final de tous ceux qui ont résolu au moins deux Problemaths en 2016-2017. Tous ces Problematheurs sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le <u>jeudi 27 avril à 12h30</u> dans le local 2.O8.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus de la Plaine de l'ULB, Boulevard du Triomphe).

- <u>Ont résolu 13 Problemaths</u> : D. GALANT (BA1 maths UMons), N. RADU (doctorant UCL)
- <u>Ont résolu 12 Problemaths</u> : R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ème à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing)
- <u>Ont résolu 11 Problemaths</u> : C. BODART (BA2 maths), A. GREEN, Y. SUPRIN (profs de maths)
- <u>Ont résolu 08 Problemaths</u> : C. KIERE (BA1 polytech), W. DE DONDER (ingénieur), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe)
- <u>Ont résolu 06 Problemaths</u> : M. CORNEZ, T. HAMEL (profs de maths), LADY BELMATH
- <u>Ont résolu 05 Problemaths</u> : O. DECKERS, S. MASSON, C. LAVRIVIÈRE (profs de maths)
- <u>Ont résolu 04 Problemaths</u> : C. LABIOUSE (BA3 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), E. GRUWÉ (MA1 polytech)
- <u>A résolu 03 Problemaths</u> : J. DAUWE (BA2 maths)
- <u>Ont résolu 02 Problemaths</u> : T. GLAVAS (élève de 3ème à la St Johns International School à Waterloo), C. SIMON (BA1 polytech), C. PILATTE (BA1 maths UMons), D. LEFEVRE (BA2 maths UMons), P. HAGOR (ingénieur), A. WAJNBERG (jounaliste scientifique).