PROBLEMATHS
13 octobre 2016

Problemath 4

Quelles sont toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition $f(xy) = f(x) + f(y)$ quels que soient $x, y > 0$?

Problemath 5

On lance une infinité de fois un dé standard non pipé et, après le k-ème jet, on calcule la somme S_k de tous les nombres qui sont apparus sur la face supérieure du dé après chacun de ces k jets. Ceci fournit une suite d'entiers $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$. Pour quel(s) entier(s) $n > 0$ la probabilité que n figure dans cette suite est-elle maximale?

Problemath 6

Etant donné un triangle abc dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on trace les 3 droites parallèles aux côtés et tangentes au cercle inscrit. On obtient ainsi 3 triangles plus petits à l'intérieur de abc. La somme des rayons des cercles inscrits à ces 3 triangles est égale au rayon du cercle inscrit à abc. Ce serait beau si c'était vrai, mais est-ce vrai?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 4 novembre à 14h. Les solutions reçues après cette date limite ne seront plus acceptées.

Solution du Problemath 1: Si on peut prouver que $a_n > 2b_n\ log_9\ b_n (*)$ pour tout $n > 0$, on aura en particulier $a_{100} > 2b_{100}\ log_9\ b_{100} > b_{100}$. Procédons par induction sur n. L'inégalité $(*)$ est vraie pour $n = 1$ car $a_1 = 9^9 = 387420489$ et $2b_1\ log_9\ b_1 = 2(9!\ log_9(9!)) < 2(9!\ log_9(9^9)) = 2(9!\ 9) = 6531840$. D'autre part, si $(*)$ est vraie pour un entier $n > 0$, elle l'est aussi pour $n+1$. En effet, $a_{n+1} = 9^{a_n} > 9^{2b_n\ log_9\ b_n} = (b_n)^{2b_n} = (b_n^{b_n})^2 > (b_n!)^2$ et il suffit donc de montrer que $(b_n!)^2 > 2b_{n+1}\ log_9\ b_{n+1} = 2(b_n!) log_9(b_n!)$, c'est-à-dire que $b_n! > 2log_9(b_n!)$, ce qui est le cas puisque $x > 2log_9\ x$ (autrement dit $9^x > x^2$) pour tout nombre réel $x > 0$.

Ont fourni une solution correcte: R. HAYA ENRIQUEZ (élève de 6ième à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), D. GALANT, C. PILATTE (BA1 maths UMons), C. BODART (BA2 maths), S. HOLOGNE (BA2 sciences industrielles Haute Ecole d'Arlon), N. RADU (doctorant UCL), A. GREEN (prof à la VUB).

Solution du Problemath 2: On dira qu'une couleur "réalise" une distance d s'il existe deux points de $\mathbb{R}^3$ à distance d ayant cette couleur. On va prouver qu'une des trois couleurs réalise toutes les distances. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe trois distances r, j, b telles que rouge ne réalise pas r, jaune ne réalise pas j et bleu ne réalise pas b. En permutant éventuellement les noms des couleurs, il n'est pas restrictif de supposer que $r \geq j \geq b > 0$. Il existe une sphère S de rayon r dont aucun point n'est rouge (c'est évident si aucun point de l'espace n'est rouge et, s'il existe un point rouge dans l'espace, la sphère de rayon r centrée en ce point convient, par définition de r). Tous les points de S sont donc jaunes ou bleus. Comme $r \geq b > 0$, S contient deux points à distance b. Si tous les points de S étaient bleus, alors bleu réaliserait b. Donc S contient au moins un point jaune J. Comme $r \geq j \geq b > 0$, il existe deux points P et Q de S tels que $|JP| = |JQ| = j$ et $|PQ| = b$. Si l'un des points P, Q est jaune, alors jaune réalise j; si P et Q sont tous les deux bleus, alors bleu réalise b. Dans les deux cas, on a une contradiction!

Ont fourni une solution correcte: D. GALANT, C. PILATTE (BA1 maths UMons), C. SIMON (BA1 polytech), C. BODART (BA2 maths), D. LEFEVRE(BA2 maths UMons), N. RADU (doctorant UCL), Y.SUPRIN (prof de math)

Solution du Problemath 3: Dans le triangle abc, $|ab| = 5$, $|ac| = 4$ et $|bc| = 3$. Comme $3^2 + 4^2 = 5^2$, abc est rectangle d'aire 6. Supposons d'abord que le segment coupant abc en deux morceaux d'aire 3 relie deux points $p \in [a, b]$ et $q \in [a, c]$. Posons $x = |aq|, y = |ap|$ et $z = |pq|$. L'aire du triangle apq vaut $\frac{1}{2}xy\ sin\alpha = 3$ (où α est l'angle de sommet a dans abc), donc $xy = 6/sin\alpha$. D'autre part, $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ cos\alpha = (x-y)^2 + 2xy(1-cos\alpha) = (x-y)^2 + 12(1-cos\alpha)/sin\alpha$. Le minimum de z^2 est donc atteint lorsque $x = y$ et, puisque $cos\alpha = \frac{4}{5}$ et $sin\alpha = \frac{3}{5}$, ce minimum vaut 4, de sorte que $z = 2$. Notons aussi que , lorsque $x = y$, on a $x^2 = 6/sin\alpha = 10$, donc $x = y = \sqrt{10}$. Des calculs analogues montrent que la longueur du plus petit segment coupant abc en deux morceaux de même aire vaut $\sqrt{6}$ s'il va de $[a, b]$ à $[b, c]$, et $\sqrt{12}$ s'il va de $[a, c]$ à $[b, c]$. La longueur minimum cherchée est donc 2.
Ont fourni une solution correcte: R. HAYA ENRIQUEZ(élève de 6ième à l'Institut Notre Dame du Sacré Coeur à Beauraing), O. GARCONNET (élève de terminale au Lycée St Joseph à Machecoul, France), U. KODHELI (BA1 maths), C. KIERE, C. SIMON (BA1 polytech), D. GALANT (BA1 maths UMons), C. BODART (BA2 maths), S. BOUKHRIS (BA2 polytech), D. LEFEVRE (BA2 maths UMons), E. GRUWE (MA1 polytech), N. RADU (doctorant UCL), M. CORNEZ, Y.SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. GREEN, G. VALETTE (profs à la VUB).

LES PENSÉES DU JOUR

"The only way to learn mathematics is to do mathematics". (Paul HALMOS, mathématicien américain, 1916-2006).

"Les chaussures sont un instrument pour marcher, les mathématiques sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin". (Jean-Marie SOURIAU, mathématicien français, 1922-2012).