PROBLEMATHS
12 novembre 2014

Problemath 7

Si deux segments $[a,b]$ et $[a',b']$ de longueurs constantes L et L' glissent sur deux droites gauches D et D', le tétraèdre $aba'b'$ garde un volume constant. Vrai ou faux ?

Problemath 8

Un mathématicien A choisit 2 000 nombres différents dans l'ensemble des entiers de 1 à 3 000. Un mathématicien B essaie alors de trouver, parmi ces 2 000 nombres, 1 000 entiers dont la parité alterne quand on les ordonne du plus petit au plus grand. Si B y arrive, il a gagné, sinon c'est A qui gagne. Lequel des deux mathématiciens est-il assuré de la victoire, quoi que fasse son adversaire ?

Problemath 9

Que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{3^n} \sin \frac{2\alpha}{3^n}$?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **vendredi 5 décembre à 14h** (date limite à respecter impérativement).

Solution du Problémath 4. Beaucoup de participants ont utilisé la trigonométrie ou la géométrie analytique, ce qui conduit à de longs calculs. Voici une solution permettant de les éviter.

Les triangles acq et bcp sont semblables, donc $\frac{|ac|}{|aq|} = \frac{|bc|}{|bp|} = k$. Soit α la similitude de centre a appliquant q sur c, obtenue en composant une rotation de 45° centrée en a avec une homothétie de rapport $\frac{|ac|}{|aq|} = k$ centrée en a. Soit β la similitude de centre b appliquant c sur p, obtenue en composant une rotation de 45° centrée en b avec une homothétie de rapport $\frac{|bp|}{|bc|} = \frac{1}{k}$ centrée en b. La composée $\beta \circ \alpha$ est une similitude d'angle $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ et de rapport $k \times \frac{1}{k} = 1$, c'est-à-dire une rotation de 90°, et cette rotation applique q sur p. Si on peut prouver que le point r est le centre de cette rotation, il en résultera que $\widehat{prq}$ est un angle droit (et aussi, en prime cadeau, que $|pr| = |rq|$).

Pour ce faire, considérons le milieu m du segment $[a,b]$. On a donc $\widehat{arm} = 75^\circ$. Posons $r' = \alpha(r)$. Pour tout point $x \neq a$, le triangle $ax\alpha(x)$ est semblable au triangle aqc (propriété des similitudes). On a donc $\widehat{arr'} = \widehat{aqc} = 105^\circ$. Comme $\widehat{arm} + \widehat{arr'} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, les points m, r, r' sont alignés. Les triangles arr' et brr' sont donc symétriques par rapport à la droite rr', de sorte que $\widehat{brr'} = 105^\circ$, $\widehat{rr'b} = 30^\circ$ et $\widehat{rbr'} = 45^\circ$. Il en résulte que $\beta(r') = r$, car les triangles $br'\beta(r')$ et bcp sont semblables puisque β est une similitude. On a donc $(\beta \circ \alpha)(r) = r$ et r est bien le centre de la rotation $\beta \circ \alpha$.

Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), E. GRUWE (BA2 polytech), A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), O. DECKERS (prof de maths), W. DE DONDER, A. GRUWE (ingénieurs), P. BARBIER (software engineer à Seattle) et DARK VADOR.

Solution du Problémath 5. Un entier $n > 0$ ayant k chiffres décimaux est stupéfiant si et seulement si n divise $m10^k + n$ pour tout entier $m > 0$. En prenant $m = 1$, on en déduit que, si

n est stupéfiant, alors $n \mid 10^k + n$, donc aussi $n \mid 10^k$, autrement dit $n = 2^a 5^b$ avec $0 \leq a \leq k$ et $0 \leq b \leq k$.

Comme n a k chiffres décimaux, $10^{k-1} \leq n < 10^k$, donc $2^{k-1}5^{k-1} \leq 2^a 5^b < 2^k 5^k$ $(*)$. Si $b \leq k-2$, alors $n = 2^a 5^b \leq 2^k 5^{k-2} = 4 \times 10^{k-2} < 10^{k-1}$, ce qui contredit l'inégalité $n \geq 10^{k-1}$. Donc $b = k-1$ ou k.

Si $b = k-1$, alors $2^{k-1} \leq 2^a$ par $(*)$, donc $a \geq k-1$, c'est-à-dire $a = k-1$ ou k. Alors $n = 2^{k-1}5^{k-1} = 10^{k-1}$ ou $n = 2^k 5^{k-1} = 2 \times 10^{k-1}$.

Si $b = k$, alors $(*)$ implique que $2^{k-1} \leq 2^a 5 < 2^{a+3}$ et $2^a < 2^k$. On a donc $2^{k-4} < 2^a < 2^k$, c'est-à-dire $a = k-3$, $k-2$ ou $k-1$. Alors $n = 5 \times 10^{k-1}$, $25 \times 10^{k-2}$ ou $125 \times 10^{k-3}$.

En conclusion, si n est stupéfiant, alors $n = u10^v$ où $u = 1, 2, 5, 25$ ou 125, et $v \geq 0$. On vérifie facilement que tout entier de cette forme est bien stupéfiant.

Ont fourni une solution correcte : D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), M. DELHELLE (élève de 6ème au Collège St Quirin de Huy), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), P. GILLET (BA2 régendat en maths), E. GRUWE (BA2 polytech) N. ROOBAERT, A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), O. DECKERS, S. MASSON (profs de maths), A. GRUWE (ingénieur), A. GREEN (VUB ?), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), LADY BELMATH et DARK VADOR.

Solution du Problémath 6. Il existe une stratégie permettant de couler le navire en un temps fini. En effet, l'ensemble de toutes les conditions initiales possibles du navire, c'est-à-dire tous les couples (position initiale, vitesse), est l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ de tous les couples d'entiers. Or $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments en attribuant à chacun d'eux un numéro $n \in \mathbb{N}$. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de partir de l'origine $(0,0)$ et de suivre une ligne polygonale infinie s'enroulant en spirale autour de l'origine : on obtient ainsi la suite de couples $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(0,2)$, $\ldots$, $(x_n, v_n), \ldots$ A tout instant $t = n$, on choisit le $n$ème couple (x_n, v_n) de cette suite et on lâche une bombe sur le point d'abscisse $x_n + nv_n$. Avec cette stratégie, si le navire est parti du point $x \in \mathbb{Z}$ avec une vitesse $v \in \mathbb{Z}$, étant donné que le couple (x, v) est forcément un des couples de la suite ci-dessus (disons, le $k$ème), lorsqu'on lâchera une bombe sur le point $x + kv$ à l'instant $t = k$, le navire s'y trouvera et sera coulé (sauf bien sûr s'il a déjà été coulé avant).

Comme l'a remarqué Cédric DE GROOTE, on peut généraliser cette stratégie au cas d'un navire ponctuel qui part d'un point à coordonnées rationnelles dans $\mathbb{R}^d$, avec une vitesse à composantes rationnelles (en effet, $\mathbb{Q}$ est dénombrable et aussi $\mathbb{Q}^{2d}$).

Ont fourni une solution correcte : A. JORISSEN (élève de 4ème latin-maths), D. GALANT (élève de 5ème à l'Athénée de La Louvière), C. BODART (élève de 6ème au Collège Ste Gertrude à Nivelles), P. BUSTILLO VAZQUEZ (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), M. MOGHADDAM-FAR (BA2 polytech), N. ROOBAERT, A. VANDENSCHRICK (BA3 maths), C. DE GROOTE (prépa. doctorat Univ. Stanford), F. THILMANY (prépa. doctorat Univ. San Diego), S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), P. BARBIER (software engineer à Seattle), A. GREEN (VUB ?), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), DARK VADOR.

La pensée du jour. *"La résolution de problèmes par des méthodes qui, à première vue, semblent n'avoir rien à voir avec le problème posé, est pour moi une des grandes joies que les mathématiques offrent au mathématicien professionnel".* (Pierre DELIGNE, mathématicien belge issu de l'ULB, Médaille Fields en 1978, Prix Crafoord en 1988, Prix Balzan en 2004, Prix Wolf en 2008, Prix Abel en 2013.)