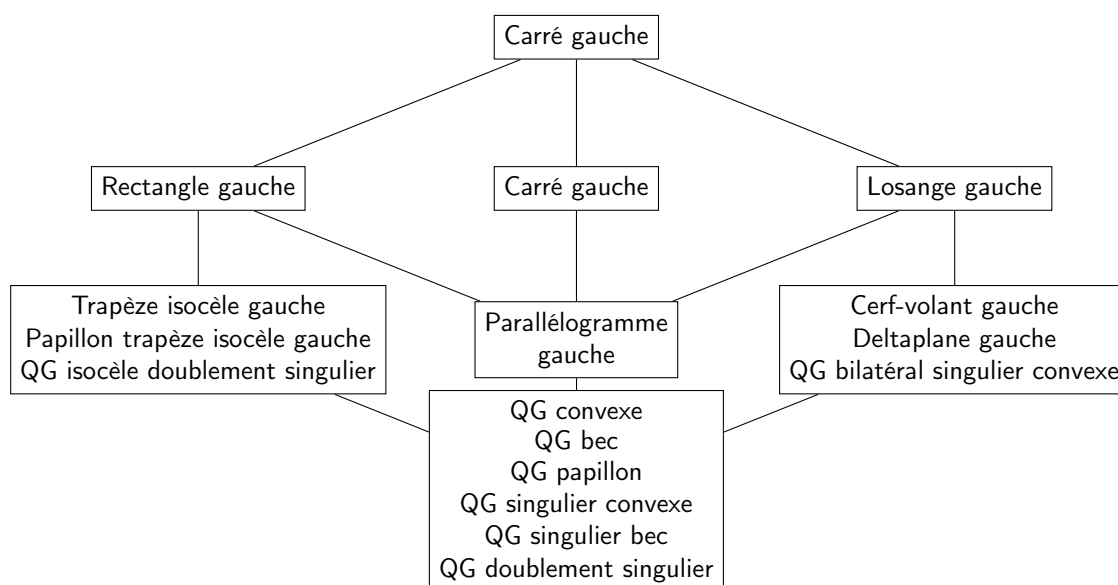




Quadrilatères gauches

un nouveau critère de classification

Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS,
Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS, Jacqueline SENGIER



24 mai 2014

Math-UREM

Version 1



Table des matières

Introduction	iii
1 Représentation plane des quadrilatères gauches (QG)	1
1.1 Forme de la projection	1
1.1.1 Raisonner à propos des projections	1
1.2 La projection privilégiée	3
2 Critère des segments diagonaux	5
2.1 Positions relatives des pieds par rapport aux segments diagonaux.	5
2.2 Réduction du nombre de cas.	5
2.3 Conclusion	6
2.4 Projection privilégiée des différents types de QG	7
2.4.1 Le cas $\in\in$	7
2.4.2 Le cas $\in\notin$	8
2.4.3 Le cas $\notin\notin$	9
2.4.4 Retour sur les définitions concernant un quadrilatère plan	10
2.4.5 Le cas $\equiv\in$	11
2.4.6 Le cas $\equiv\notin$	12
2.4.7 Le cas $\equiv\equiv$	13
3 Classification des QG selon notre deuxième approche	15
3.1 Groupe d'ordre 1	15
3.2 Groupes d'ordre 2	27
3.2.1 QG conservé par un automorphisme $\alpha = (1, 3)(2, 4)$ ou QG parallélogramme	27
3.2.2 QG conservés par un automorphisme $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ ou QG isocèle	29
3.2.3 QG conservés par un automorphisme $\alpha = (1)(3)(2, 4)$ ou QG bilatéral	36
3.3 Groupes d'ordre 4	41
3.3.1 Rappels et généralités	41
3.3.2 Sous groupe combinatoire du rectangle : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$	42
3.3.3 Sous groupe combinatoire du losange : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$	43
3.3.4 Sous groupe combinatoire cyclique d'ordre 4 : $\{I, (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 3)(2, 4)\}$	44
3.4 Groupe combinatoire d'ordre 8 : D_8	45
3.5 Synthèse	46
4 Groupe combinatoire d'ordre 8 : D_8	48
4.1 Les représentations des sous-groupes du groupe diédrique D_8	48
4.1.1 Représentation du groupe diédrique D_8 par des automorphismes	48
4.1.2 Représentation du groupe diédrique D_8 par des symboles	48
4.1.3 Représentation du groupe diédrique D_8 par des mots	49
4.1.4 Représentation du groupe diédrique D_8 par des dessins	49
4.2 Les seize QG représentés dans chaque sous-groupe	49
4.2.1 Par des types	49
4.2.2 Par des noms	50
4.2.3 Par des figures	50

Annexe A Une interprétation du critère d'appartenance pour les quadrilatères plans (QP)	51
A.1 Rappels et notations	51
A.2 Diagonales des QP	51
A.3 Les zones du plan déterminées par les droites $(1'2')$, $(1'3')$, $(2'3')$	53
A.4 Propriétés d'appartenance selon les zones	53
A.5 Définitions modifiées ou caractérisation	58
Annexe B Le cas des quasi-quadrilatères plans	59
Glossaire	61

Introduction

Dans l'article « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 » (Réf. [2]), en première approche, nous avons fait une classification des quadrilatères gauches (QG) en fonction des sous-groupes combinatoires de D_8 et selon les isométries correspondant à leurs transformations comme nous l'avons fait pour les quadrilatères plans (QP).

Du point de vue de cet article l'inspection physique de modèles (Réf. [2], sections 3.2.1 et 3.2.3) nous incite à croire qu'il convient de distinguer des formes différentes de QG ayant une même structure groupale. Il nous a semblé qu'une deuxième approche par l'introduction d'un nouveau critère affinerait notre classification, tout comme nous l'avons fait pour les QP en distinguant des QP convexe, bec ou papillon¹.

A deux dimensions, la deuxième approche s'est appuyée sur l'observation des diagonales et de leur intersection. Ici aussi nous nous intéressons aux diagonales des QG. Celles-ci, étant gauches, elles ne peuvent être ni parallèles ni sécantes mais leur perpendiculaire commune constitue un lien entre elles et pourrait jouer dans le cas d'un QG un rôle semblable à celui de l'intersection des droites diagonales d'un QP (voir annexe A).

Nous nous sommes donc intéressés au squelette de la droite des diagonales. Plus particulièrement, nous nous sommes posé la question de savoir si la position de la perpendiculaire commune aux droites diagonales pouvait influencer la forme du QG.

Pour répondre à cette question, nous devons établir des considérations préliminaires pour aboutir à un critère de classification supplémentaire.

1. Dans l'article « Le théorème de Varignon (1) » de Guy et Yolande Noël (Réf. [4]), les auteurs parlent de quadrilatère *croisé* au lieu de quadrilatère *papillon*. Le terme quadrilatère croisé se rencontre fréquemment. On trouve aussi l'expression quadrilatère *étoilé*.

Chapitre 1

Représentation plane des quadrilatères gauches (QG)

Soit un QG 1234. Rappelons quelques notations des éléments de son squelette. Nous notons p_{13} et p_{24} les pieds de la perpendiculaire commune aux droites diagonales, respectivement sur (13) et sur (24) et o le centre du QG situé au milieu du segment $[p_{13}, p_{24}]$.

1.1 Forme de la projection

En projetant un même QG sur un plan, nous nous apercevons rapidement que la forme de l'image dépend du choix du plan sur lequel on projette et de la direction de la projection.

Un même QG peut être projeté sur un QP papillon, un QP bec, un QP convexe, un QQP à sommet double (voir les figures 1.1 à 1.4); la notion de QQP est expliquée à la section 2.4.4

Cela ne doit pas trop nous surprendre car nous avons montré dans le dossier I qu'il existe une affinité qui transforme tout quadrilatère gauche 1234 en tout quadrilatère gauche $1'2'3'4'$ (Réf. [2], Section 1.5, Théorème 2). Du point de vue affiné, tous les quadrilatères gauches sont affinement équivalents.

Remarque : les projections obliques peuvent être envisagées.

1.1.1 Raisonner à propos des projections

Francis Buekenhout a proposé une nouvelle manière de raisonner à propos des projections de quadrilatères gauches.

A priori, on pense que la projection d'un QG est toujours un QP.

Comment faire pour ne pas avoir un QP. La projection pourrait avoir trois points alignés, deux sommets du QG pourraient avoir la même projection (point double). Il n'est pas possible d'avoir deux points doubles, car les droites diagonales seraient parallèles et le QG serait plan.

Pour que la projection ait trois sommets alignés, on projette parallèlement au plan déterminé par trois sommets du QG. Ceci peut se faire de quatre manières différentes, car il y a quatre façons de choisir trois sommets parmi les quatre et de déterminer ainsi un plan.

Pour que la projection ait un point double il faut

- faire une projection parallèlement à un côté du QG, ou
- faire une projection parallèlement à une diagonale du QG.

Si on veut éviter ces accidents, alors il faut dire quelque chose à propos de la projection. Interdire les projections mentionnées ci-dessus.

Que faut-il faire pour que la projection évolue d'un type vers un autre? Tentative :

Pour construire une situation évolutive partons d'un QG 1234 et de sa projection $1'2'3'4'$, avec le point p_0 projection de la droite $R = p_{13}p_{24}$.

- On peut fixer $1', 2', 3'$ et faire varier $4'$. Ceci fixe le plan de projection. Il n'y a plus de degré de liberté dans ce plan.
- On peut mettre le QG sur un tétraèdre pour avoir plus d'intuition.

- Si nous fixons deux points de la projection et que nous faisons varier le plan de la projection en le faisant tourner autour de la droite $(1'2')$, alors, suivant le choix de la projection, nous obtenons des types différents de QG.

Les figures 1.1 à 1.4 livrent quelques exemples de projections et nous constatons que nous pouvons même obtenir des figures planes qui ne sont pas des quadrilatères.

Le point p_0 est la projection de la perpendiculaire commune aux deux droites diagonales du QG.

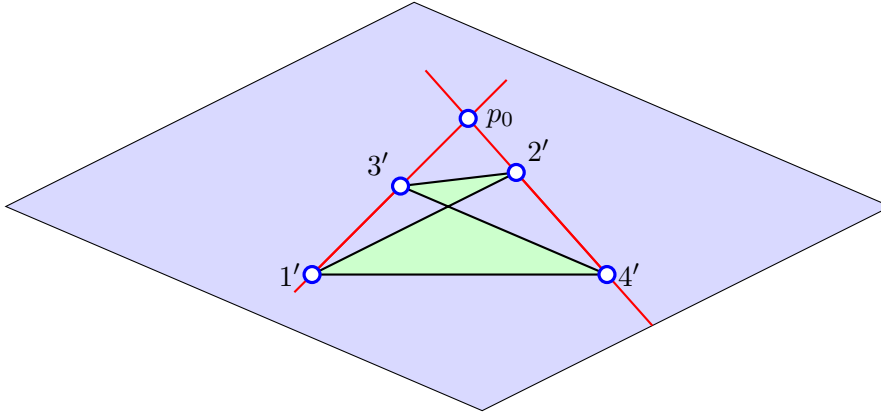


FIGURE 1.1 – QP Papillon

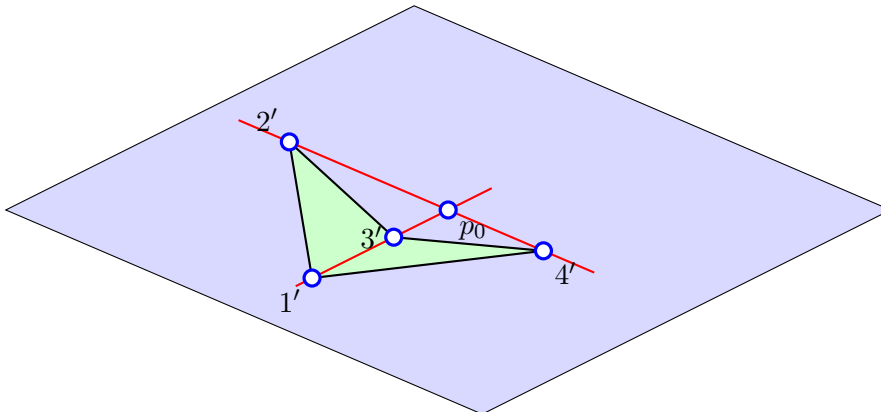


FIGURE 1.2 – QP Bec

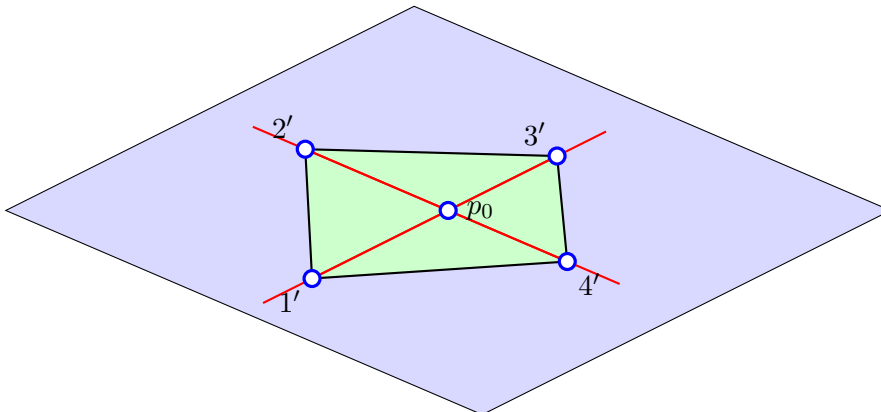


FIGURE 1.3 – QP convexe

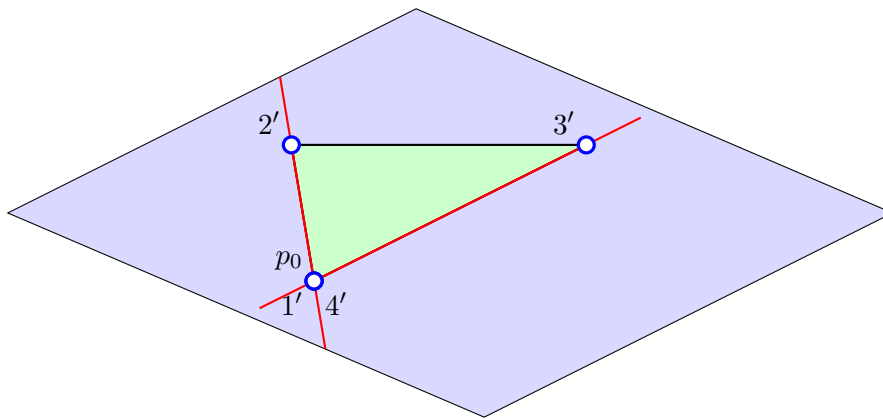


FIGURE 1.4 – QQP à sommet double

La notion de QQP figure dans la définition 10 de la section 2.4.4.

1.2 La projection privilégiée

Définition 1. *En vue de nommer les différents types de QG dans la section 3, nous faisons le choix d'une projection naturelle en raison du rôle joué par le squelette du QG (« Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 » Réf. [2] section 2.2). Au fond, nous enrichissons le squelette d'une projection privilégiée Π sur un quelconque plan ϕ parallèle à la feuille du squelette et parallèlement à la perpendiculaire commune aux droites diagonales (13) et (24) (pour simplifier, la droite $(p_{13}p_{24})$ sera appelée la droite rouge R). La projection privilégiée Π est donc une projection orthogonale.*

Physiquement nous voyons ϕ comme un plan horizontal, et les droites de projection comme des verticales. Le QG « tombe » sur ϕ (voir la Figure 1.5).

Ainsi Π est la projection orthogonale parallèle à la droite $(p_{13}p_{24})$ (dont les points p_{13} et p_{24} ont été définis au début de la section 1) sur un plan perpendiculaire à celle-ci. Le choix d'un de ces plans importe peu. En effet, il suffit de translater un plan sur l'autre selon un vecteur parallèle à la direction de la projection pour voir que les images obtenues sont isométriques. Observons que les deux pieds de la perpendiculaire se projettent sur un même point p_0 , le point d'intersection des projections des droites diagonales du QG.

Observons dès à présent une application de la projection privilégiée. Considérons une isométrie α du QG sans nous préoccuper de son action sur les sommets. Alors α conserve le squelette et donc la perpendiculaire commune et le centre o . En outre, toute droite verticale est transformée par α en droite verticale. Le plan ϕ est transformé par α en un plan horizontal. Si α est d'ordre deux, nous nous souvenons qu'elle ne peut pas être une symétrie centrée (Réf. [2], Section 2.2, Lemme 4). Elle est donc un demi-tour ou une symétrie bilatérale. Dans le cas du demi-tour, l'axe de α est soit la perpendiculaire commune, soit une droite horizontale perpendiculaire à celle-ci en o .

Résumons :

Lemme 1. *Si α est un demi-tour, α conserve le centre et la perpendiculaire commune aux diagonales du QG. Son axe est la perpendiculaire commune ou une perpendiculaire à celle-ci passant par le centre. Dans ce cas, aucun sommet du QG n'appartient à l'axe.*

Démonstration. Si le sommet 1 est sur l'axe, le sommet 3 l'est également et les points 1, 3, 2, 4 sont dans le plan 312. \square

L'existence de QG admettant les deux types de demi-tours que nous venons de décrire se trouve dans les sections 3.2.1 et 3.2.2.

Lemme 2. *Si α est une symétrie bilatérale d'axe Axe_α , alors au moins un sommet appartient à Axe_α .*

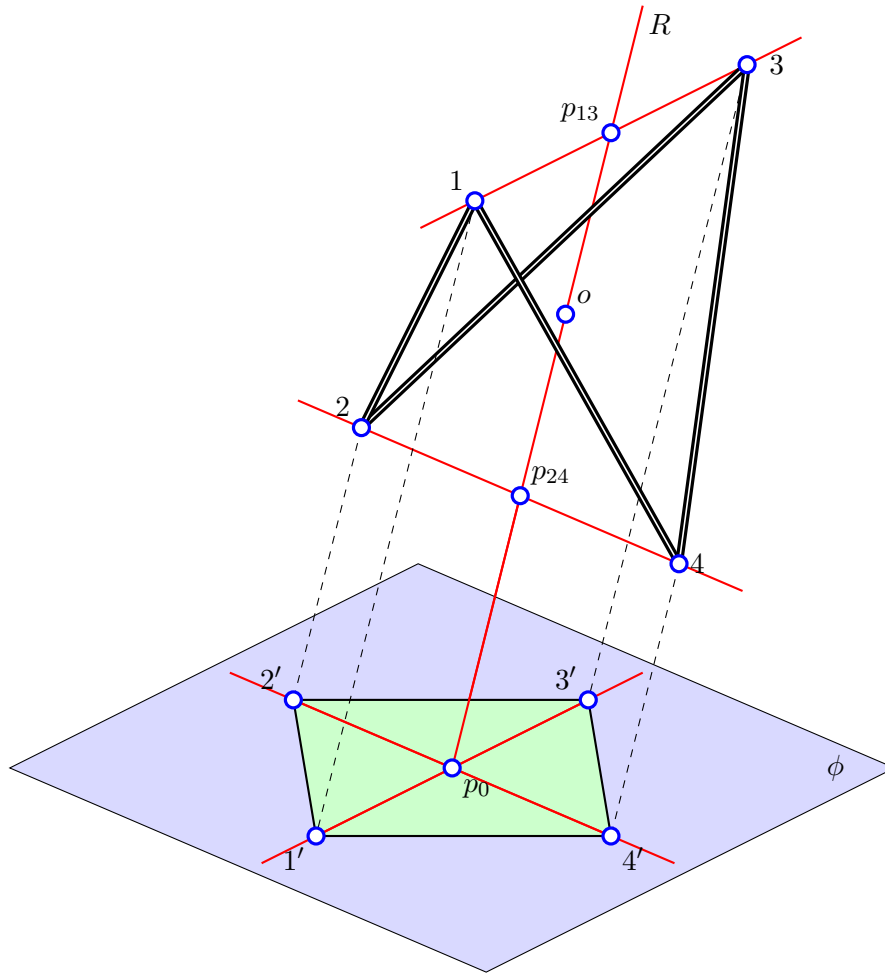


FIGURE 1.5 – La projection privilégiée

Démonstration. Sinon le QG est dans un plan. □

Examinons l'existence de QG admettant une symétrie bilatérale.

Supposons $1 \in \text{Axe}_\alpha$. De ce fait $3 \in \text{Axe}_\alpha$. Forcément $2, 4 \notin \text{Axe}_\alpha$. L'existence de tels quadrilatères est immédiate.

Reprenons et partons d'un plan Axe_α . Nous y donnons deux points distincts 1 et 3, un point 2 extérieur à Axe_α et au plan perpendiculaire à Axe_α par les points 1 et 3. Alors 4 est déterminé : c'est $\alpha(2)$. Le QG 1234 admet α comme automorphisme.

Nous examinons une autre piste qui reprendra le contact avec la projection privilégiée **II** en section 2.4.

Définition 2. Revêtement d'un QQP

Soit un QQP $1'2'3'4'$ situé dans un plan ϕ , deux plans ϕ' et ϕ'' strictement parallèles à ϕ et les droites P_1, P_2, P_3, P_4 perpendiculaires à ϕ respectivement par $1', 2', 3', 4'$. Un revêtement du QQP $1'2'3'4'$ est un QG 1234 où 1 et 3 sont les points de percée de P_1 et P_3 dans ϕ' et 2 et 4 les points de percée de P_2 et P_4 dans ϕ'' .

La définition du QQP se trouve à la section 2.4.4 : définition 10.

Chapitre 2

Critère des segments diagonaux

Définition 3. *Tout sommet s d'un QG possède un sommet opposé noté $\text{opp}(s)$ qui n'est pas adjacent à s .*

Les sommets 1 et 3 du QG sont opposés de même que les sommets 2 et 4.

La position de p_{13} par rapport aux sommets 1 et 3 et celle de p_{24} par rapport aux sommets 2 et 4 caractérisent la position de la perpendiculaire commune par rapport au QG. Les positions de p_{13} par rapport aux sommets 1 et 3 et celles de p_{24} par rapport aux sommets 2 et 4 jouent le même rôle et de ce fait nous ne traitons qu'un seul cas.

2.1 Positions relatives des pieds par rapport aux segments diagonaux.

La position de p_{13} par rapport aux sommets distincts 1 et 3 donne lieu aux cinq cas suivants pour chaque pied :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $p_{13} \in]-\infty, 1[$, | 6. $p_{24} \in]-\infty, 2[$, |
| 2. $p_{13} = 1$, | 7. $p_{24} = 2$, |
| 3. $p_{13} \in]1, 3[$, | 8. $p_{24} \in]2, 4[$, |
| 4. $p_{13} = 3$, | 9. $p_{24} = 4$, |
| 5. $p_{13} \in]3, +\infty[$, | 10. $p_{24} \in]4, +\infty[$. |

A priori, ceci permet d'envisager 25 cas de situations pour le couple (p_{13}, p_{24}) .

2.2 Réduction du nombre de cas.

Les sommets 1 et 3 jouent un rôle symétrique sur la diagonale (13). Pour cette raison, les cas 4 et 5 (resp. 9 et 10) se ramènent aux cas 2 et 1 (resp. 7 et 6). Chaque pied peut occuper trois positions relatives par rapport aux sommets de sa diagonale. Dès lors, il reste les neuf possibilités suivantes (identifiées ici par une minuscule) :

- a : $p_{13} \in]-\infty, 1[$ et $p_{24} \in]-\infty, 2[$
- b : $p_{13} \in]-\infty, 1[$ et $p_{24} = 2$
- c : $p_{13} \in]-\infty, 1[$ et $p_{24} \in]2, 4[$
- d : $p_{13} = 1$ et $p_{24} \in]-\infty, 2[$
- e : $p_{13} = 1$ et $p_{24} = 2$
- f : $p_{13} = 1$ et $p_{24} \in]2, 4[$
- g : $p_{13} \in]1, 3[$ et $p_{24} \in]-\infty, 2[$
- h : $p_{13} \in]1, 3[$ et $p_{24} = 2$
- i : $p_{13} \in]1, 3[$ et $p_{24} \in]2, 4[$

De plus, la symétrie du rôle combinatoire permet de permuter les deux droites diagonales. Pour fixer les idées, les droites (13) et (24) restent horizontales mais (24) se situe plus bas que (13). Ceci nous permet de réduire le nombre de cas à six puisque

- le cas d est identique au cas b,
- le cas g est identique au cas c,
- le cas h est identique au cas f.

2.3 Conclusion

Des 25 cas envisagés initialement, il en reste six à examiner à savoir les cas a, b, c, e, f et i. Ces six cas disjoints caractérisent les positions relatives des pieds de la perpendiculaire commune aux diagonales par rapport aux segments diagonaux du QG. L'appartenance d'un QG à un de ces cas définit un critère supplémentaire de classification. Nous l'appelons *critère des segments diagonaux*. Ce critère situe le QG par rapport à son squelette. Nous introduisons une notation afin de nommer chacun des six types. A cette fin, nous utilisons les symboles \in, \notin, \equiv .

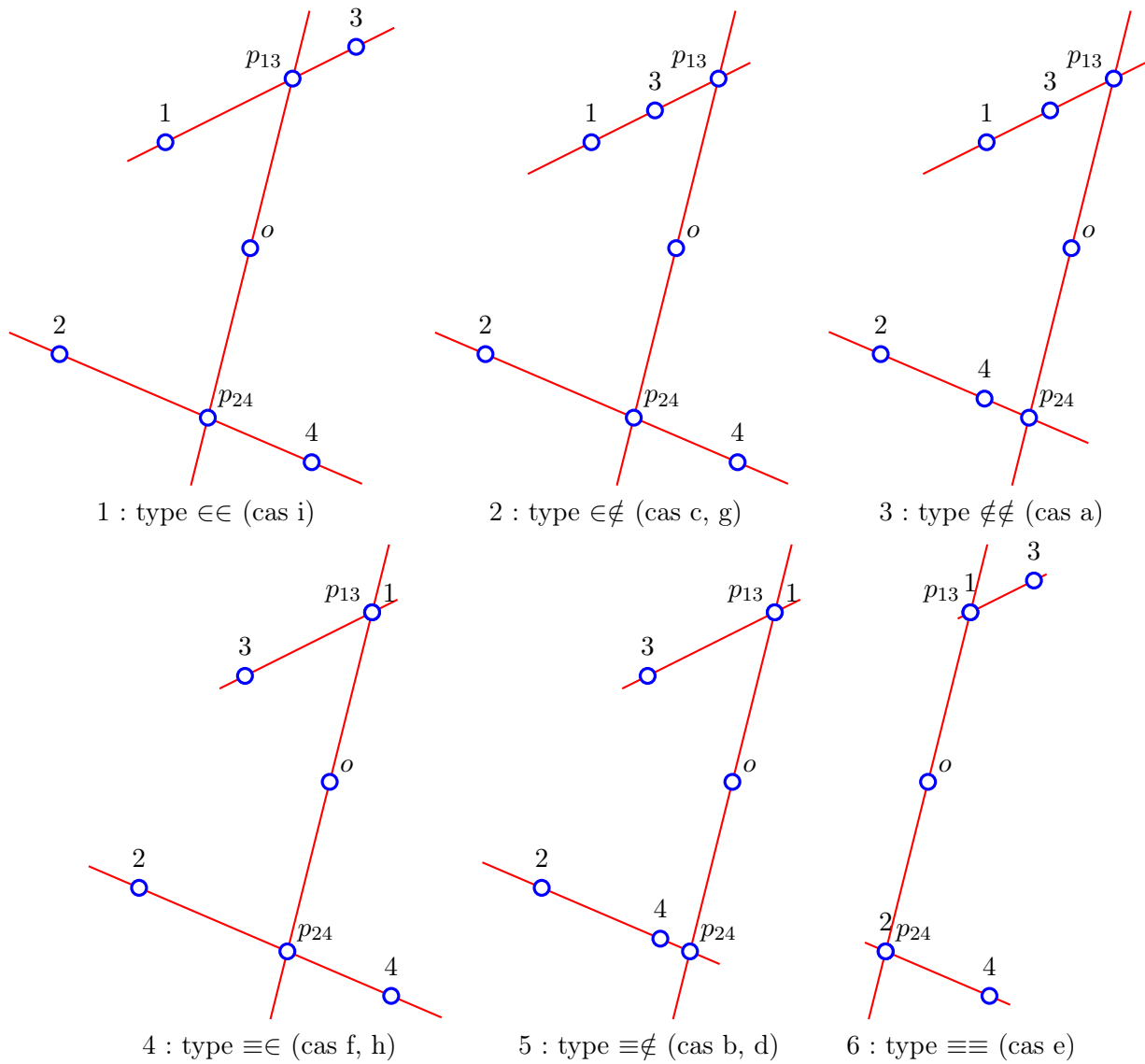


FIGURE 2.1 – Les six types de QG

Grâce à ce critère nous distinguons les six types suivants de QG (voir Figure 2.1) :

1. **Le type $\in\in$** : les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG sont à l'intérieur des segments diagonaux (cas i).
2. **Le type $\in\neq$** : un des pieds p_{13} ou p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG est à l'intérieur d'un segment diagonal et l'autre à l'extérieur du deuxième segment diagonal (cas c, g).
3. **Le type $\notin\neq$** : les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG sont à l'extérieur des segments diagonaux (cas a).
4. **Le type $\in\in$** : un des pieds p_{13} ou p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG est à l'extrémité d'un segment diagonal et l'autre à l'intérieur du deuxième segment diagonal (cas f,h).
5. **Le type $\in\neq$** : un des pieds p_{13} ou p_{24} est à l'extrémité d'un segment diagonal et l'autre à l'extérieur du deuxième segment diagonal (cas b, d).
6. **Le type $\equiv\equiv$** : les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG sont à une extrémité des segments diagonaux (cas e).

2.4 Projection privilégiée des différents types de QG

Soit Π la projection privilégiée décrite à la section 1.2. Appliquons-la aux six types de QG obtenus à la section 2.3.

Rappelons qu'une droite diagonale d'un QG est une droite joignant deux sommets opposés, par exemple 1 et 3 et est notée (13).

Rappelons qu'une diagonale d'un QG est un segment de droite fermé joignant deux sommets opposés, par exemple 1 et 3 et est notée [1, 3].

A présent, nous parcourons chacun des six types et nous examinons la projection privilégiée. Nous obtenons les projections suivantes :

2.4.1 Le cas $\in\in$

Nous effectuons un petit rappel avant d'examiner ce cas.

Définition 4. *Un quadrilatère plan est convexe ssi ses diagonales (les segments fermés) se coupent.*

Lemme 3. *Si le QG est de type $\in\in$ alors $\Pi(QG)$ est un QP convexe.*

Démonstration.

1. Première démonstration :

L'incidence et les segments sont conservés par projection. Donc les deux segments diagonaux du QP se coupent en p_0 , condition suffisante pour avoir un QP convexe.

2. Deuxième démonstration :

$p_0 = \Pi(p_{13}) = \Pi(p_{24}) = \Pi(o)$ (projection privilégiée, section 1.2)

$$p_{13} \in]1, 3[\Rightarrow \Pi(p_{13}) \in \Pi(]1, 3[) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi(]1, 3[) \Rightarrow p_0 \in]1', 3'[,$$

$$p_{24} \in]2, 4[\Rightarrow \Pi(p_{24}) \in \Pi(]2, 4[) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi(]2, 4[) \Rightarrow p_0 \in]2', 4'[,$$

donc $p_0 \in]1', 3'[\cap]2', 4'[,$

□

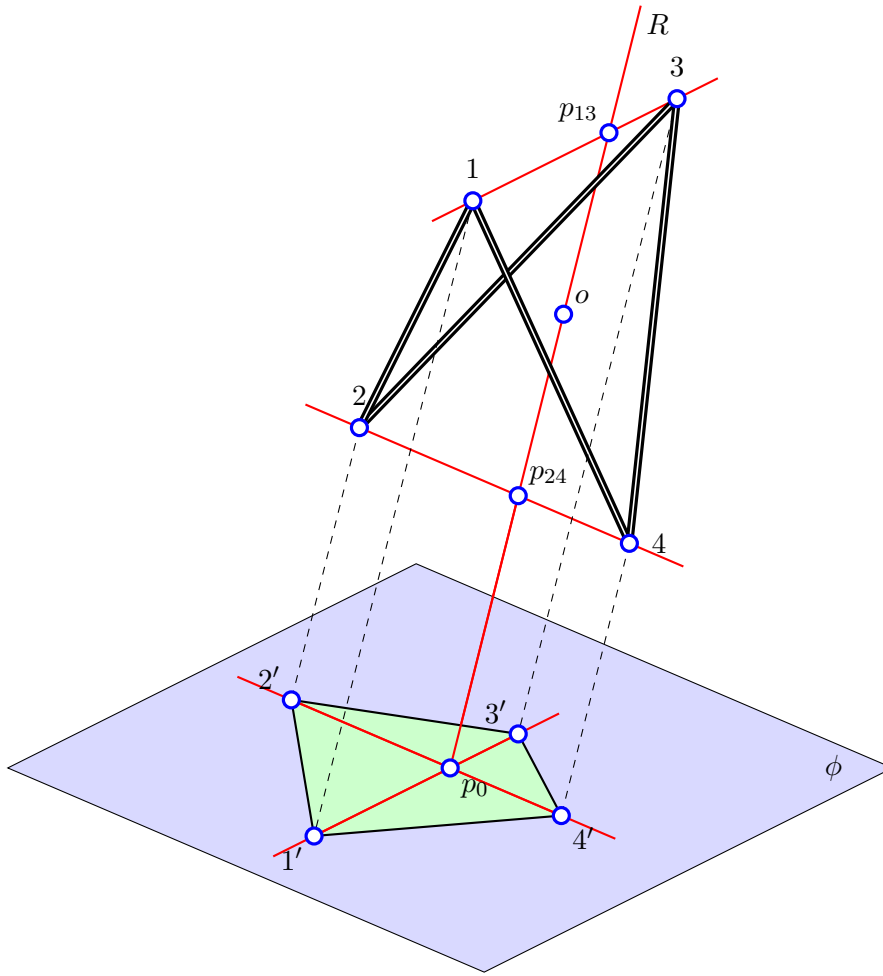


FIGURE 2.2 – $\Pi(QG)$ est un QP convexe

2.4.2 Le cas $\in \notin$

Nous effectuons un petit rappel avant d'examiner ce cas.

Définition 5. *Un quadrilatère plan est un bec ssi ses droites diagonales se coupent en un point appartenant à une des diagonales et pas à l'autre.*

Lemme 4. *Si le QP est du type $\in \notin$, alors $\Pi(QG)$ est un QP bec.*

Démonstration.

1. Première démonstration :

L'incidence, les droites et les segments ouverts (respectivement fermés) sont conservés par projection. Donc les deux droites diagonales du QP se coupent en p_0 , condition suffisante pour avoir un QP bec.

2. Deuxième démonstration :

$p_0 = \Pi(p_{13}) = \Pi(p_{24}) = \Pi(o)$ (projection privilégiée, section 1.2)

$$\begin{aligned} p_{13} \in (13) &\Rightarrow \Pi(p_{13}) \in \Pi((13)) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi((13)) \Rightarrow p_0 \in (1'3') \\ p_{13} \notin [1, 3] &\Rightarrow \Pi(p_{13}) \notin \Pi([1, 3]) \Rightarrow \Pi(o) \notin \Pi([1, 3]) \Rightarrow p_0 \notin [1', 3'] \\ p_{24} \in]2, 4[&\Rightarrow \Pi(p_{24}) \in \Pi(]2, 4[) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi(]2, 4[) \Rightarrow p_0 \in]2', 4'[\end{aligned}$$

donc $p_0 \in (1'3') \cap]2', 4'[$ et $p_0 \notin [1', 3']$.

□

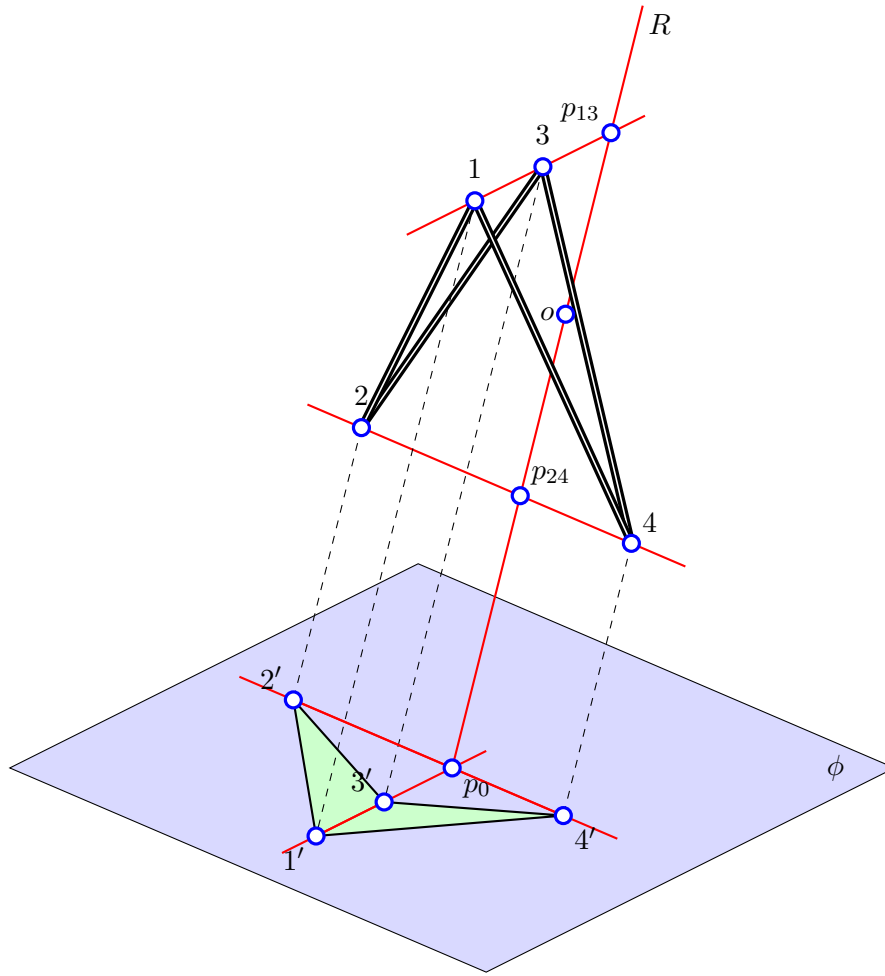


FIGURE 2.3 – $\Pi(QG)$ est un QP bec

2.4.3 Le cas $\notin \notin$

Nous effectuons un petit rappel avant d'examiner ce cas.

Définition 6. *Un quadrilatère plan est un papillon ssi ses droites diagonales sont parallèles ou se coupent en un point n'appartenant à aucune de ses diagonales.*

Lemme 5. *Si le QG est de type $\notin \notin$, alors $\Pi(QG)$ est un QP papillon dont les droites diagonales sont sécantes.*

Démonstration.

1. Première démonstration :

L'incidence, les droites et les segments sont conservés par projection. Donc les deux droites diagonales du QP se coupent en p_0 , condition suffisante pour avoir un QP papillon.

2. Deuxième démonstration (voir la note de bas de page p. 8).

$p_0 = \Pi(p_{13}) = \Pi(p_{24}) = \Pi(o)$ (projection privilégiée, section 1.2).

Les droites diagonales du QP $1'2'3'4'$ se coupent en p_0 . En effet

$$\begin{aligned} p_{13} \in (13) &\Rightarrow \Pi(p_{13}) \in \Pi((13)) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi((13)) \Rightarrow p_0 \in (1'3') \\ p_{24} \in (24) &\Rightarrow \Pi(p_{24}) \in \Pi((24)) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi((24)) \Rightarrow p_0 \in (2'4') \\ &\Rightarrow p_0 \in (1'3') \cap (2'4'). \end{aligned}$$

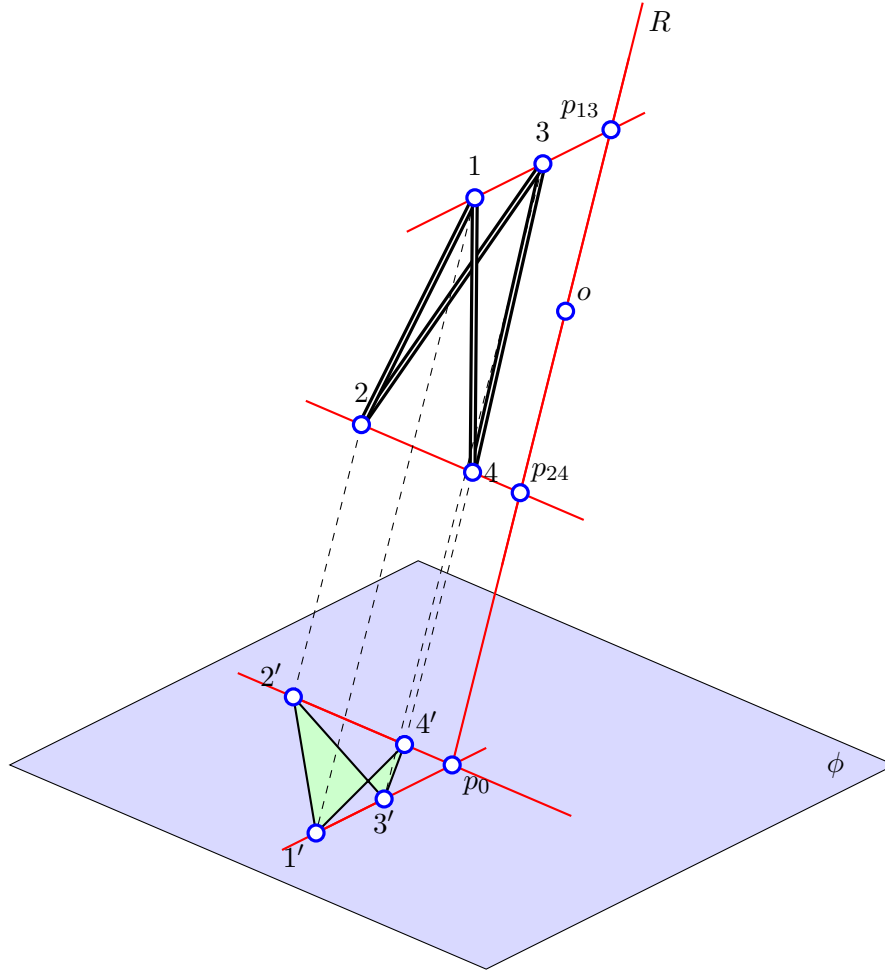


FIGURE 2.4 – $\Pi(QG)$ est un QP papillon dont les diagonales sont sécantes

Le point p_0 d'intersection des droites diagonales du QP $1'2'3'4'$ n'appartient pas aux diagonales de $1'2'3'4'$. En effet

$$\begin{aligned}
 p_{13} \notin [1, 3] &\Rightarrow \Pi(p_{13}) \notin \Pi([1, 3]) \Rightarrow \Pi(o) \notin \Pi([1, 3]) \Rightarrow p_0 \notin [1', 3'] \\
 p_{24} \notin [2, 4] &\Rightarrow \Pi(p_{24}) \notin \Pi([2, 4]) \Rightarrow \Pi(o) \notin \Pi([2, 4]) \Rightarrow p_0 \notin [2', 4']
 \end{aligned}$$

□

2.4.4 Retour sur les définitions concernant un quadrilatère plan

Nous généralisons la notion de quadrilatère combinatoire et nous introduisons la notion de Quasi Quadrilatère combinatoire. Celle-ci s'impose en raison de nos observations concernant les projections.

Définition 7. *Un quadrilatère combinatoire (QC) comprend quatre objets distincts nommés sommets (1, 2, 3, 4) et quatre objets distincts nommés côtés (A, B, C, D) unis par une relation d'incidence telle que tout sommet est incident à deux côtés, tout côté est incident à deux sommets, le sommet 1 est voisin ou adjacent des sommets 2 et 4, etc.*

Dans le travail [3], nous avons utilisé de manière implicite une hypothèse, à savoir, trois sommets d'un QP ne peuvent être alignés.

Nous souhaitons bien évidemment que la projection privilégiée d'un QG soit un QP. Ce n'est pas vraiment le cas. Nous verrons dans les sections 2.4.5 à 2.4.7 qu'il y a exactement deux exceptions :

- Deux sommets peuvent avoir la même projection.
- Trois sommets peuvent être alignés.

Ceci nous amène à reconsidérer les définitions initiales en acceptant la notion de quasi-quadrilatère.

Définition 8. *Un quasi-quadrilatère combinatoire (QQC) est un quadruple d'objets non nécessairement distincts nommés sommets (1, 2, 3, 4) et un quadruple d'objets non nécessairement distincts nommés côtés (A, B, C, D) unis par une relation d'incidence telle que tout sommet est incident à deux côtés, tout côté est incident à deux sommets, le sommet 1 est voisin des sommets 2 et 4, etc.*

Quelles sont donc les différences entre un QC et un QQC? Dans le cas d'un QQC nous n'exigeons pas que les sommets 1, 2, 3, 4 soient distincts, et de même pour les côtés.

On note que les quadrilatères combinatoires (QC) sont un cas particulier des QQC.

Dans le travail [3], nous ne trouvons pas de définition de quadrilatère plan (QP). Voici une telle définition :

Définition 9. *Un QP est un QC dont les sommets sont des points distincts du plan, les côtés sont des segments fermés dont les extrémités sont des sommets et l'incidence d'un sommet s et d'un côté C est le fait que s soit une extrémité de C . En outre trois sommets ne peuvent être alignés.*

Définition 10. *Un quasi-quadrilatère plan (QQP) est un QQC dont les sommets sont des points du plan, les côtés sont des segments fermés dont les extrémités sont des sommets et l'incidence d'un sommet s et d'un côté C est le fait que s soit une extrémité de C .*

Notons que tout quadrilatère plan (QP) est un cas particulier de QQP.

En raison de la projection privilégiée Π d'un QG, nous verrons que nous sommes confrontés à deux types de quasi-quadrilatères plans non QP :

(a) Deux sommets confondus adjacents. C'est un QQP à *sommet double*.

Observons que deux sommets opposés ne peuvent avoir la même projection, car vu le choix de la projection, une diagonale ne peut pas être perpendiculaire au plan de projection.

(b) Trois sommets alignés : ce cas correspond à deux côtés confondus, si un côté est représenté par une droite. C'est un QQP à *trois sommets alignés*.

Trois des sommets forment un triangle et le quatrième sommet est un point aligné avec deux sommets non consécutifs parmi ces trois.

Ces deux situations simples vont donner lieu à une analyse plus détaillée.

Remarque : Dans tout cas où le type du QG comprend le signe \equiv , trois des sommets du quadrilatère projeté sont alignés et réciproquement. Il s'agit d'un QQP non QP.

2.4.5 Le cas $\equiv\in$

Définition 11. *Un quasi-quadrilatère plan (QQP) est dit convexe quand ses diagonales (segments fermés) se coupent en un point situé strictement à l'intérieur d'au moins l'une d'elles.*

Lemme 6. *Si le QQP est du type $\equiv\in$, alors $\Pi(QG)$ est un QQP convexe et n'est pas un QP.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} 1 = p_{13} &\Rightarrow \Pi(p_{13}) = \Pi(o) = \Pi(p_{24}) = p_0 \Rightarrow 1' = p_0 \\ p_{24} \in]2, 4[&\Rightarrow \Pi(p_{24}) \in \Pi(]2, 4[) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi(]2, 4[) \Rightarrow p_0 \in]2', 4'[\\ &\Rightarrow p_0 \in]1', 3'[\cap]2', 4'[; \text{ le QQP est convexe, voir définition 11.} \\ p_0 \in]2', 4'[&\Rightarrow 1' \in]2', 4'[: 1', 2', 4' \text{ sont trois sommets alignés,} \\ &\text{ donc le QQP n'est pas un QP (définition 9).} \end{aligned}$$

□

Lemme 7. *Tout QQP convexe est soit un QP convexe, soit un QQP non QP, et qui possède trois sommets alignés.*

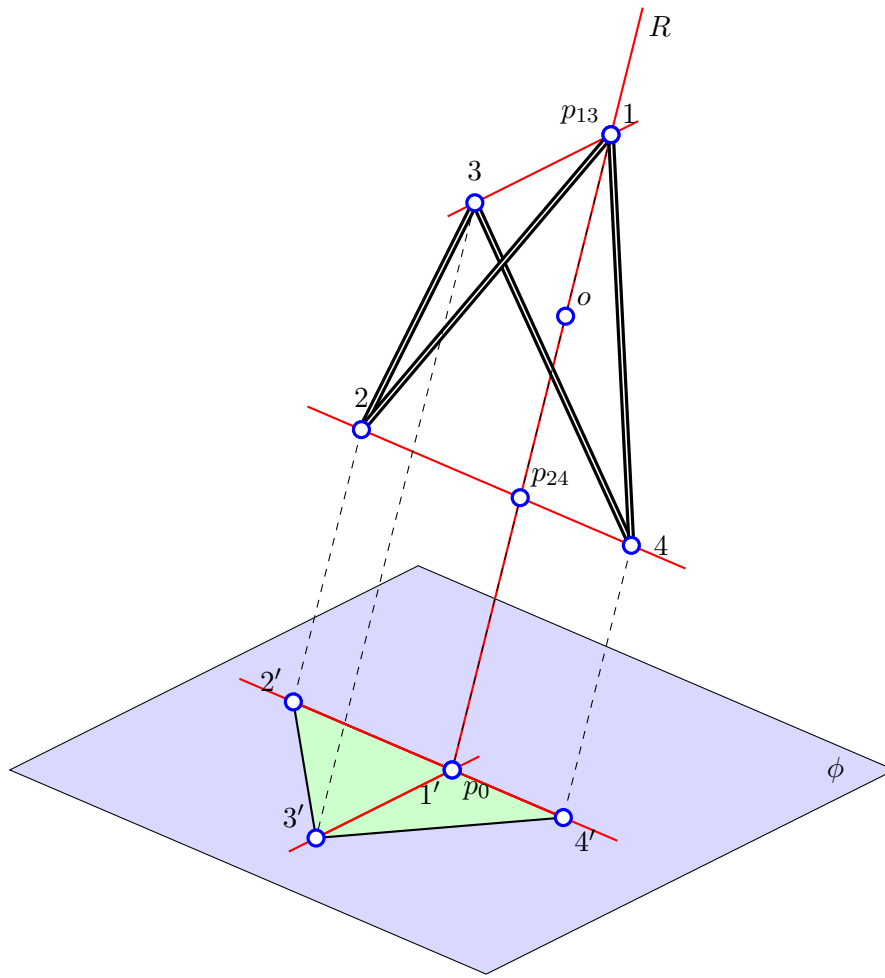


FIGURE 2.5 – $\Pi(QG)$ est un QQP convexe et n'est pas un QP

Démonstration.

1. Première démonstration :

L'incidence et les segments sont conservés par projection. Dès lors le point p_0 est confondu avec la projection d'un sommet et est situé à l'intérieur d'une diagonale. Il y a donc trois sommets qui se projettent sur une même droite. La projection privilégiée $\Pi(QG)$ est un QQP convexe et n'est pas un QP.

2. Ce lemme résulte des définitions précédentes.

Abordons d'abord la convexité : la définition d'un QQP convexe (voir définition 11) est compatible avec la définition d'un QP convexe (définition 4)

La définition du QQP (définition 10) avec les conditions supplémentaires –les sommets sont des points distincts du plan et trois sommets ne peuvent être alignés – est la définition d'un QP (définition 9)

Si trois sommets d'un QG sont alignés, alors sa projection privilégiée $\Pi(QG)$ est un QQP non QP (lemme 6).

□

2.4.6 Le cas $\equiv \notin$

Définition 12. *Un quasi-quadrilatère plan (QQP) est dit bec quand ses droites diagonales se coupent en un point de l'une des diagonales et à l'extérieur de l'autre diagonale (segments fermés).*

Voir figure 2.6.

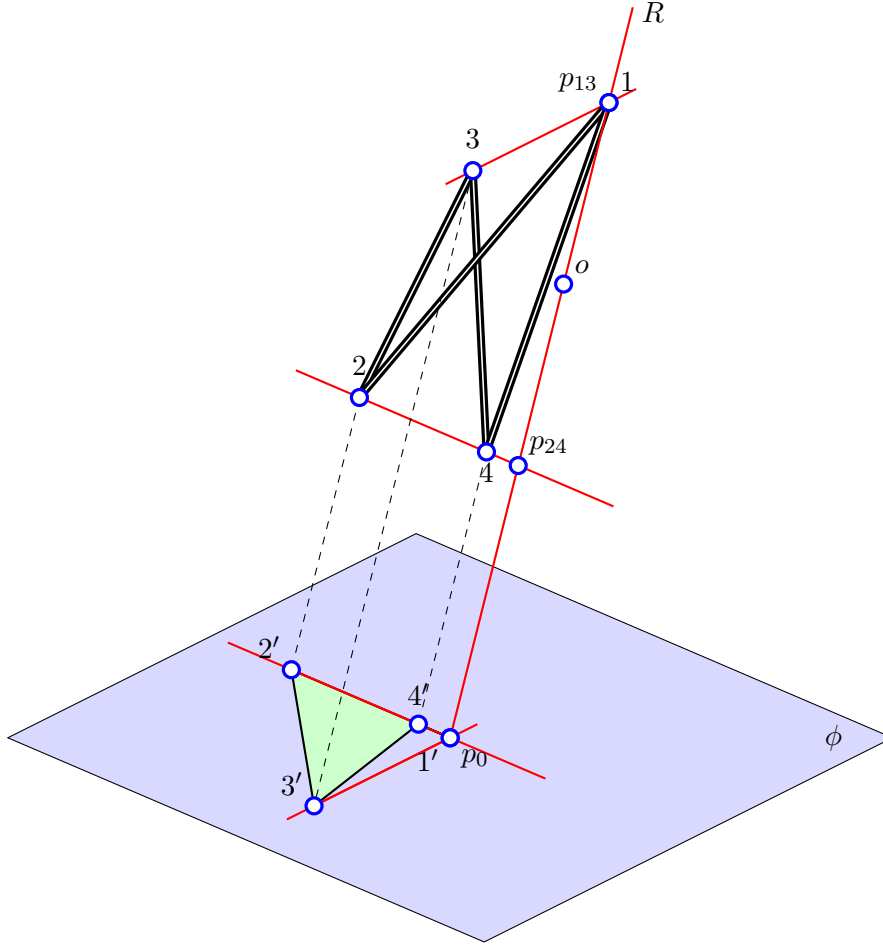


FIGURE 2.6 – $\Pi(QG)$ est un QQP bec et n'est pas un QP

Lemme 8. *Si le QG est de type $\equiv \notin$, alors $\Pi(QG)$ est un QQP bec et n'est pas un QP.*

Démonstration.

1. Première démonstration :

La conservation de l'incidence, des segments et des droites permettent d'affirmer que p_0 est confondu avec un sommet extrémité d'une diagonale et est à l'extérieur de l'autre diagonale.

2. Deuxième démonstration.

$$\begin{aligned}
 1 = p_{13} &\Rightarrow \Pi(1) = \Pi(p_{13}) = \Pi(o) = \Pi(p_{24}) = 1' = p_0 \\
 p_{24} \notin [2, 4] &\Rightarrow \Pi(p_{24}) \notin \Pi([2, 4]) \Rightarrow \Pi(o) \notin \Pi([2, 4]) \Rightarrow p_0 \notin [2', 4'] \text{ et } 1' \notin [2', 4'] \\
 p_{24} \in (24) &\Rightarrow \Pi(p_{24}) \in \Pi((24)) \Rightarrow \Pi(o) \in \Pi((24)) \Rightarrow p_0 \in (2'4') \text{ et } 1' \in (2'4') \\
 & p_0 \in [1', 3'] \cap (2'4') \\
 & 1' \in [1', 3'] \cap (2'4')
 \end{aligned}$$

Les points $1', 2', 4'$ sont alignés et $1'2'3'4'$ est un QQP et pas un QP.

La définition 12 est respectée. En effet, p_0 point d'intersection des diagonales de $1'2'3'4'$ appartient à la diagonale $[1', 3']$ et n'appartient pas à la diagonale $[2', 4']$.

□

2.4.7 Le cas $\equiv \equiv$

Définition 13. *Un quasi-quadrilatère plan (QQP) est dit à sommet double quand un sommet est confondu avec l'un des trois autres sommets.*

Remarque : en dépit de la tentation qui consiste à dire que ce QQP est convexe nous l'avons exclu précédemment (voir Définition 11 du QQP convexe).

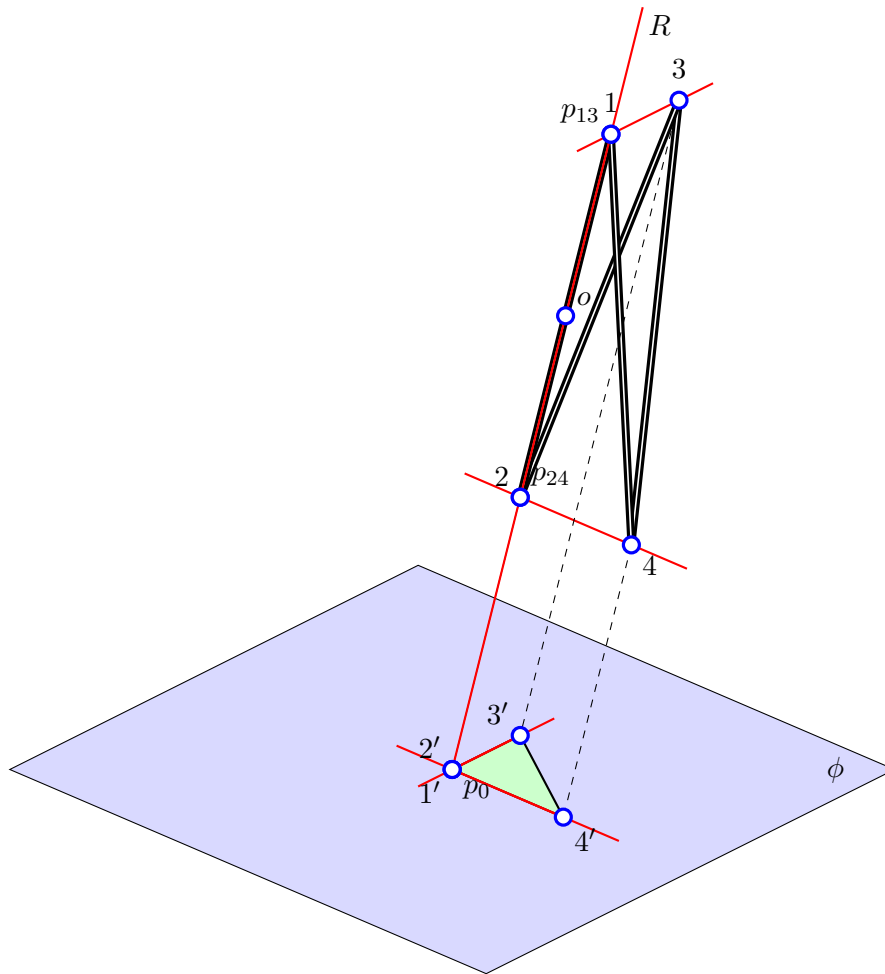


FIGURE 2.7 – $\Pi(QG)$ est un QQP à sommet double et n'est pas un QP

Lemme 9. *Si le QG est du type $\equiv \equiv$, alors $\Pi(QG)$ est un QQP à sommet double et n'est pas un QP.*

Démonstration.

1. Première démonstration :

L'incidence et les segments sont conservés par projection. Dès lors le point p_0 est confondu avec la projection de deux sommets. Ceci correspond à la définition 13.

2. Deuxième démonstration

$$\begin{aligned} \Pi(p_{13}) &= \Pi(o) = \Pi(p_{24}) = p_0 \\ 1 = p_{13} &\Rightarrow \Pi(1) = \Pi(p_{13}) \Rightarrow 1' = p_0 \\ 2 = p_{24} &\Rightarrow \Pi(2) = \Pi(p_{24}) \Rightarrow 2' = p_0 \\ &\Rightarrow 1' = 2' \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Classification des QG selon notre deuxième approche

Dans cette section, nous reprenons les différents QG obtenus dans le dossier I à partir des sous-groupes de D_8 (« Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 » Réf. [2]). Cette première approche de la classification est affinée ici par une deuxième approche basée sur le critère des segments diagonaux dont nous venons de faire la classification en six types. Rappelons que $\mathbf{\Pi}$ est la projection privilégiée.

3.1 Groupe d'ordre 1

Pour simplifier, la droite $(p_{13}p_{24})$ sera appelée la droite rouge R . Pour tout sommet s du QG nous considérons sa distance à la droite R : $\text{dist}(s, R)$ et nous procédons de même pour sa projection s' .

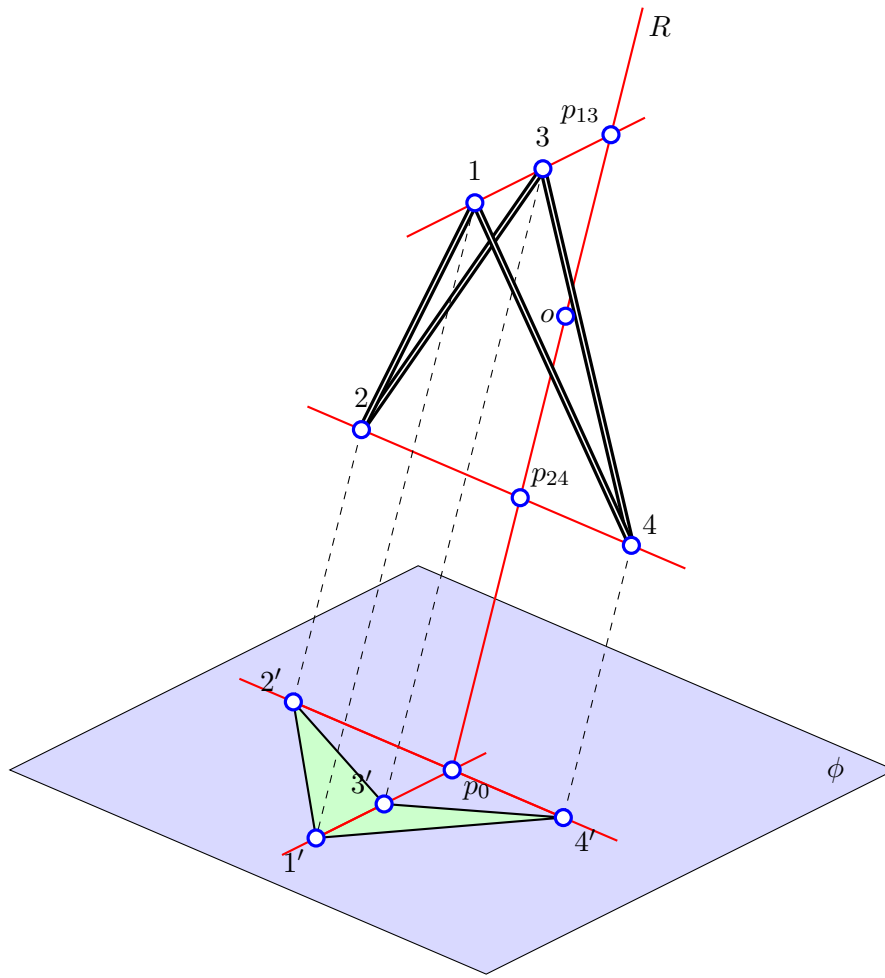


FIGURE 3.1 – QP à distances distinctes

Lemme 10. (*QQP à distances distinctes*)

Si les quatre distances des sommets $1', 2', 3', 4'$ du QQP au point p_0 sont distinctes, Aut $QQP = 1$.

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 11. *Nous obtenons*

1. $dist(1, R) = dist(1', p_0)$,
2. $dist(2, R) = dist(2', p_0)$,
3. $dist(3, R) = dist(3', p_0)$,
4. $dist(4, R) = dist(4', p_0)$

Démonstration. Immédiat par projection. □

Lemme 12. Si les quatre distances des sommets $1', 2', 3', 4'$ du QQP au point p_0 sont distinctes, Aut $QG = I$.

Démonstration. Immédiat. □

Le critère des segments diagonaux nous conduit à distinguer les six types de QG suivants :

- QG de type $\in\in$ dont la projection par Π est un QP convexe,
- QG de type $\in\neq$ dont la projection par Π est un QP bec,
- QG de type $\neq\neq$ dont la projection par Π est un QP papillon,
- QG de type $\equiv\in$ dont la projection par Π est un quasi-quadrilatère plan convexe,
- QG de type $\equiv\neq$ dont la projection par Π est un QQP bec,

— *Le QG de type $\equiv\equiv$ dont la projection par $\mathbf{\Pi}$ est un QQP à sommet double.*
Ces QG seront décrits dans les pages suivantes.

QG de type $\in\in$ dont la projection par Π est un QP convexe.

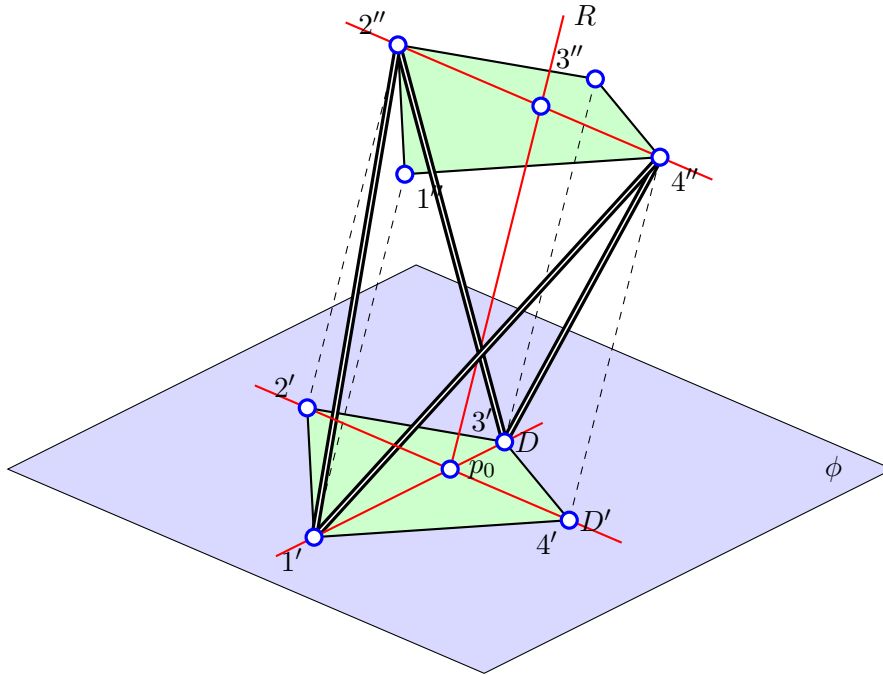


FIGURE 3.2 – QG convexe

Lemme 13. *Il existe un QP $1'2'3'4'$ convexe dont les distances des sommets à p_0 sont distinctes.*

Démonstration. Construisons deux droites D et D' sécantes en p_0 et choisissons quatre longueurs non nulles et distinctes l_1, l_2, l_3 et l_4 .

Plaçons les points $1'$ et $3'$ en reportant les longueurs l_1 et l_3 de part et d'autre de p_0 sur la droite D . Plaçons les points $2'$ et $4'$ en reportant les longueurs l_2 et l_4 de part et d'autre de p_0 sur la droite D' . La figure $1'2'3'4'$ est un QP convexe (voir section 2.4.1, définition 4) et les distances de ses sommets à p_0 sont distinctes. □

Théorème 1. *Il existe un QG de type $\in\in$ dont le groupe d'automorphismes est l'identité.*

Démonstration. Soit un QP $1'2'3'4'$ convexe dont les distances des sommets à p_0 sont distinctes. Nous savons par le lemme 13 qu'un tel QP existe.

Translatons $1'2'3'4'$ perpendiculairement à son plan pour obtenir un QP $1''2''3''4''$ dans un plan strictement parallèle à celui de $1'2'3'4'$. Les droites $(1'3')$ et $(2''4'')$ sont gauches. Elles sont les droites diagonales du QG $1'2''3'4''$ dont la projection privilégiée Π est le QP $1'2'3'4'$.

Nous savons par le lemme 12 que $\text{Aut QG} = I$.

Il reste à prouver que ce QG est de type $\in\in$.

Comme le point p_0 est situé à l'intérieur de chaque segment diagonal du QP et puisque l'incidence est conservée par la projection, la droite R coupe chaque droite diagonal du QG en des points intérieurs au segment diagonal. □

Un tel QG est appelé *QG convexe*.

QG de type $\in \notin$ dont la projection par Π est un QP bec.

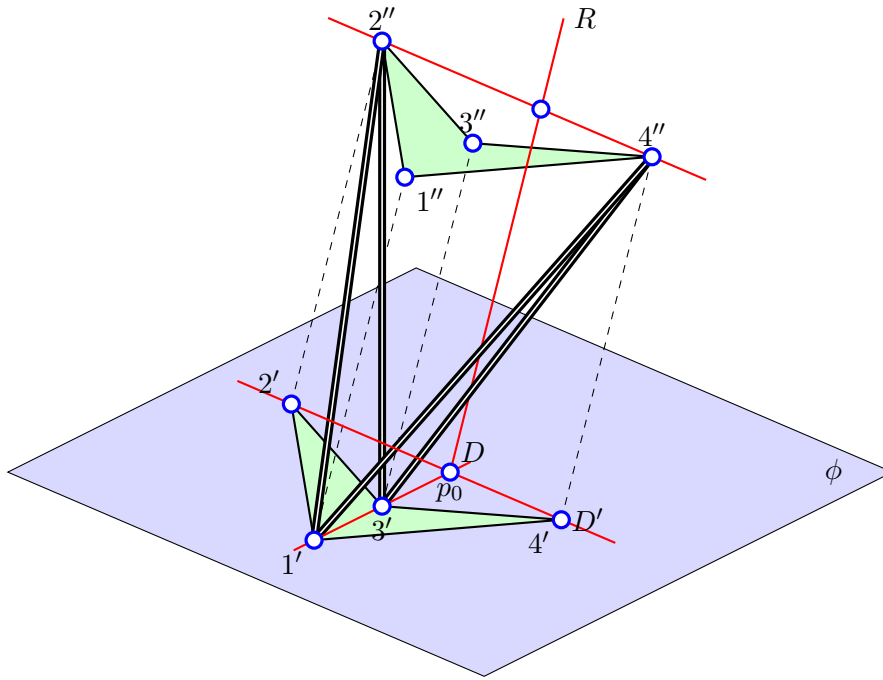


FIGURE 3.3 – QG bec

Lemme 14. *Il existe un QP $1'2'3'4'$ bec dont les distances des sommets à p_0 sont distinctes.*

Démonstration. Construisons deux droites D et D' sécantes en p_0 et choisissons quatre longueurs non nulles et distinctes l_1, l_2, l_3 et l_4 .

Plaçons les points $1'$ et $3'$ en reportant les longueurs l_1 et l_3 d'un même côté de p_0 sur la droite D . Plaçons les points $2'$ et $4'$ en reportant les longueurs l_2 et l_4 de part et d'autre de p_0 sur la droite D' .

La figure $1'2'3'4'$ est un QP bec (voir section 2.4.2 définition 5) et les distances de ses sommets à p_0 sont distinctes. \square

Théorème 2. *Il existe un QG de type $\in \notin$ dont le groupe d'automorphismes est l'identité.*

Démonstration. Soit un QP $1'2'3'4'$ bec dont les distances des sommets à p_0 sont distinctes. Nous savons par le lemme 13 qu'un tel QP existe.

Translatons $1'2'3'4'$ perpendiculairement à son plan pour obtenir un QP $1''2''3''4''$ dans un plan strictement parallèle à celui de $1'2'3'4'$. Les droites $(1'3')$ et $(2''4'')$ sont gauches. Elles sont les droites diagonales du QG $1'2''3'4''$ dont la projection privilégiée Π est le QP $1'2'3'4'$.

Nous savons par le lemme 12 que $\text{Aut QG} = I$.

Il reste à prouver que ce QG est de type $\in \notin$.

Comme le point p_0 est situé à l'intérieur d'un segment diagonal du QP et à l'extérieur de l'autre et puisque l'incidence est conservée par la projection, la droite R coupe chaque droite diagonale du QG en un points intérieur à un segment diagonal et l'autre en dehors du segment diagonal. \square

Un tel QG est appelé QG bec.

QG de type \notin dont la projection par Π est un QP papillon.

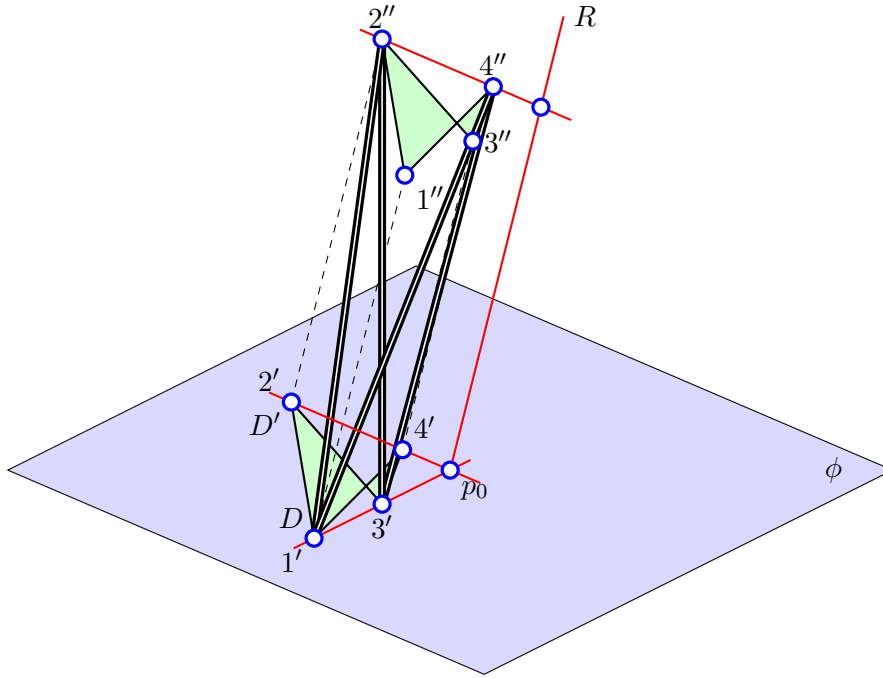


FIGURE 3.4 – QG papillon

Lemme 15. *Il existe un QP $1'2'3'4'$ papillon dont les distances des sommets à p_0 sont distinctes.*

Démonstration. Construisons deux droites D et D' sécantes en p_0 et choisissons quatre longueurs non nulles et distinctes l_1, l_2, l_3 et l_4 .

Plaçons les points $1'$ et $3'$ en reportant les longueurs l_1 et l_3 d'un même côté de p_0 sur la droite D . Plaçons les points $2'$ et $4'$ en reportant les longueurs l_2 et l_4 d'un même côté de p_0 sur la droite D' .

La figure $1'2'3'4'$ est un QP papillon (voir section 2.4.3 définition 6) et les distances de ses sommets à p_0 sont distinctes. \square

Théorème 3. *Il existe un QG de type \notin dont le groupe d'automorphismes est l'identité.*

Démonstration. Soit un QP $1'2'3'4'$ papillon dont les distances des sommets à p_0 sont distinctes. Nous savons par le lemme 15 qu'un tel QP existe.

Translatons $1'2'3'4'$ perpendiculairement à son plan pour obtenir un QP $1''2''3''4''$ dans un plan strictement parallèle à celui de $1'2'3'4'$. Les droites $(1'3')$ et $(2''4'')$ sont gauches. Elles sont les droites diagonales du QG $1'2''3'4''$ dont la projection privilégiée Π est le QP $1'2'3'4'$.

Nous savons par le lemme 12 que $\text{Aut QG} = I$.

Il reste à prouver que ce QG est de type \notin .

Comme le point p_0 est situé à l'extérieur de chaque segment diagonal du QP et puisque l'incidence est conservée par la projection, la droite R coupe chaque droite diagonale du QG en des points extérieurs au segment diagonal. \square

Un tel QG est appelé QG papillon.

QG de type $\equiv\in$ dont la projection par Π est un quasi-quadrilatère plan convexe.

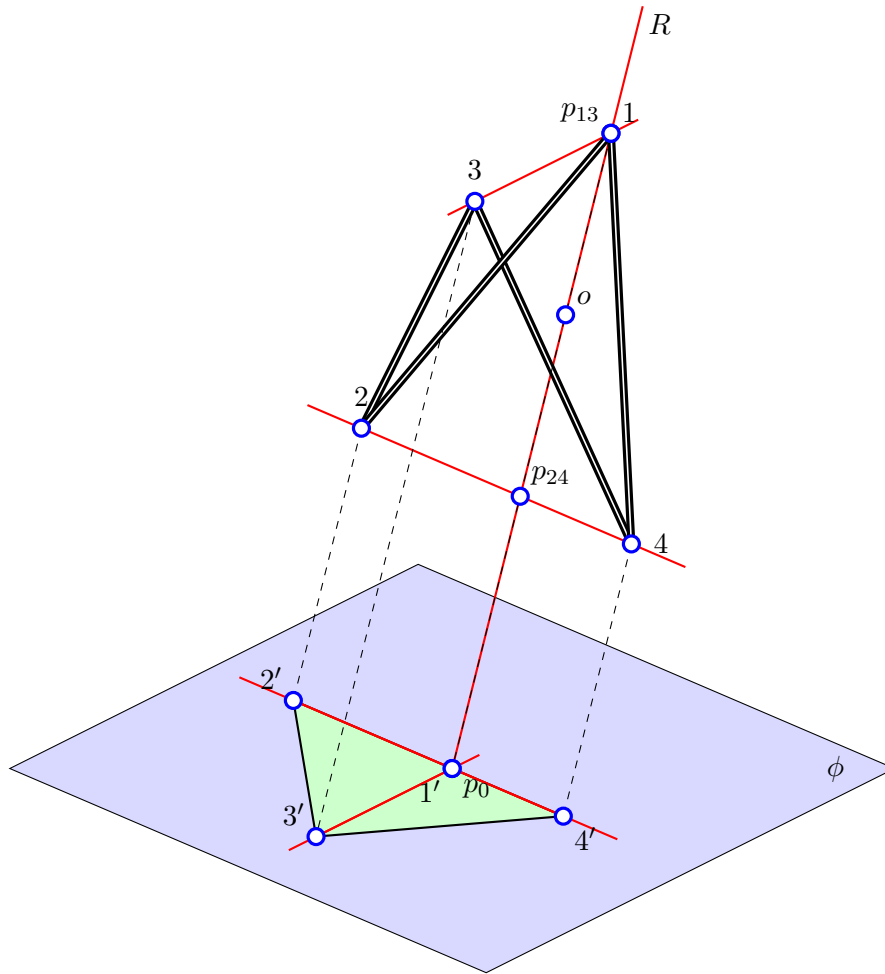


FIGURE 3.5 – QG singulier convexe

Lemme 16. *Il existe un QG de type $\equiv\in$ dont les côtés sont de longueurs distinctes.*

Démonstration. La construction suivante prouve cette existence.

Construisons un triangle $2'3'4'$ dont les côtés $[2', 3']$ et $[3', 4']$ sont de longueurs distinctes. Plaçons $1'$ dans le segment $[2', 4']$ de façon telle que les longueurs des segments $[1', 2']$, $[2', 3']$, $[3', 4']$ et $[4', 1']$ soient distinctes.

Nous obtenons un QQP convexe non QP $1'2'3'4'$ (voir section 2.4.5 définition 11) dont l'intersection p_0 des diagonales est confondue avec le sommet $1'$.

Choisissons deux points distincts p_{13} et p_{24} sur la droite R perpendiculaire en p_0 au plan du QQP.

Construisons un revêtement de ce QQP comme suit :

les points 1 et 3 sont obtenus par translation de $1'$ et $3'$ selon $\overrightarrow{p_0 p_{13}}$
 les points 2 et 4 sont obtenus par translation de $2'$ et $4'$ selon $\overrightarrow{p_0 p_{24}}$.

— **La figure 1234 est un QG**

En effet, la projection du plan 124 est la droite $(2'4')$ et le point $3' \notin (2'4')$. Il s'ensuit que le point 3 est en-dehors du plan 124.

— **Les côtés du QG 1234 ont des longueurs distinctes**

En effet, les quatre côtés du QG sont les diagonales de rectangles formés chacun par deux côtés parallèles à R , tous de longueur $|p_{13}p_{24}|$ et deux côtés parallèles translatsés d'un côté du QQP (tous de longueurs distinctes) selon $\overrightarrow{p_0 p_{13}}$ et $\overrightarrow{p_0 p_{24}}$ et les diagonales de ces rectangles ont des longueurs distinctes.

— **Le QG est de type $\equiv\epsilon$**

En effet, on a $p_0 = 1' \Rightarrow p_{13} = 1$ et $p_{24} \in]2, 4[$.

□

Théorème 4. *Il existe un QG de type $\equiv\epsilon$ dont le groupe d'automorphismes est l'identité.*

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme 16.

□

Un tel QG est appelé *QG singulier convexe*.

QG de type $\equiv \notin$ dont la projection par Π est un QQP bec.

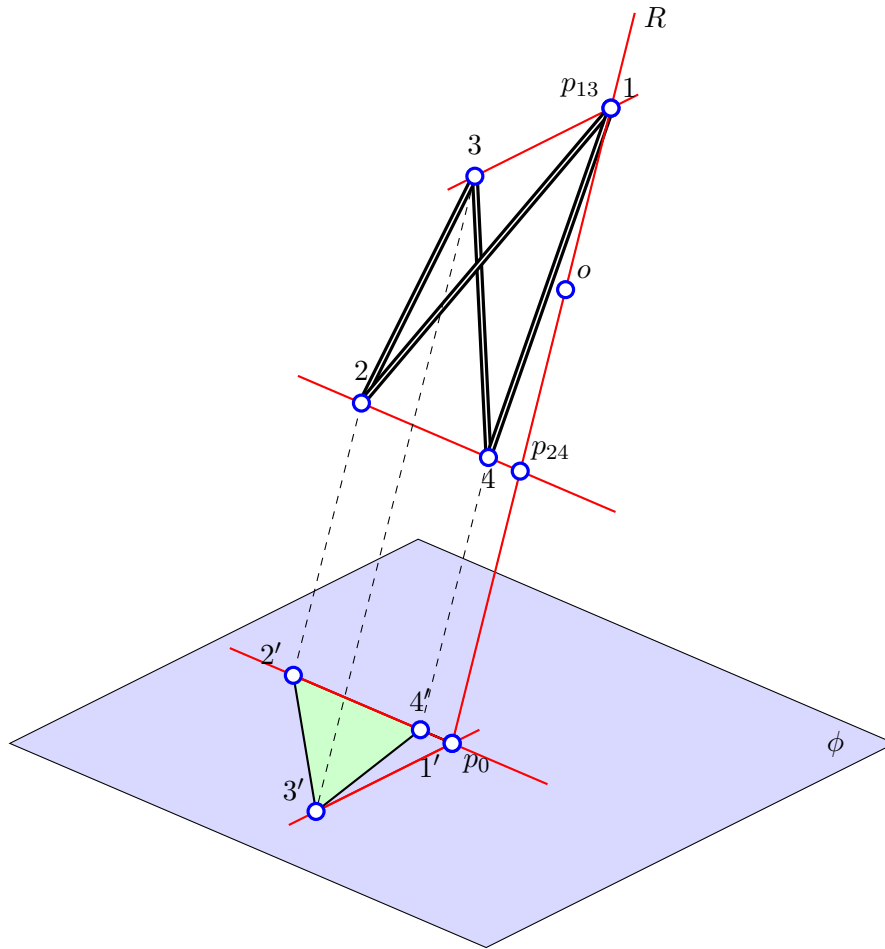


FIGURE 3.6 – QG singulier bec

Lemme 17. *Il existe un QG de type $\equiv \notin$ dont les côtés sont de longueurs distinctes.*

Démonstration. La construction suivante prouve cette existence.

Construisons un triangle $1'2'3'$ dont les côtés $[1', 2']$ et $[2', 3']$ sont de longueurs distinctes.

Plaçons le point $4'$ dans le segment $]1', 2'[$ de façon telle que les longueurs des segments $]1', 2'[$, $[2', 3']$, $[3', 4']$ et $[4', 1']$ soient distinctes.

Nous obtenons un QQP bec non QP $1'2'3'4'$ (voir section 2.4.6 définition 12) dont l'intersection p_0 des diagonales est confondue avec le sommet $1'$.

Choisissons deux points distincts p_{13} et p_{24} sur la droite R perpendiculaire en p_0 au plan ϕ du QQP.

Construisons un revêtement de ce QQP comme suit :

Les points 1 et 3 sont obtenus par translation de $1'$ et $3'$ selon le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_{13}}$
 les points 2 et 4 sont obtenus par translation de $2'$ et $4'$ selon le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_{24}}$.

— **La figure 1234 est un QG**

En effet, la projection du plan 124 est la droite $(2'4')$ et le point $3' \notin (2'4')$. Il s'ensuit que le point 3 est en-dehors du plan 124.

— **Les côtés du QG 1234 ont des longueurs distinctes**

En effet, les quatre côtés du QG sont les diagonales de rectangles formés chacun par deux côtés parallèles à R , tous de longueur $|p_{13}p_{24}|$ et deux côtés parallèles translatés d'un côté du QQP (tous de longueurs distinctes) selon $\overrightarrow{p_0 p_{13}}$ et $\overrightarrow{p_0 p_{24}}$ et les diagonales de ces rectangles ont des longueurs distinctes.

— **Le QG est de type $\equiv \notin$**

En effet, on a $p_0 = 1' \Rightarrow p_{13} = 1$ et $p_{24} \notin [2, 4]$.

□

Théorème 5. *Il existe un QG de type $\equiv \notin$ dont le groupe d'automorphismes est l'identité.*

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme 17.

□

Un tel QG est appelé *QG singulier bec*.

Le QG de type $\equiv\equiv$ dont la projection par Π est un QQP à sommet double.

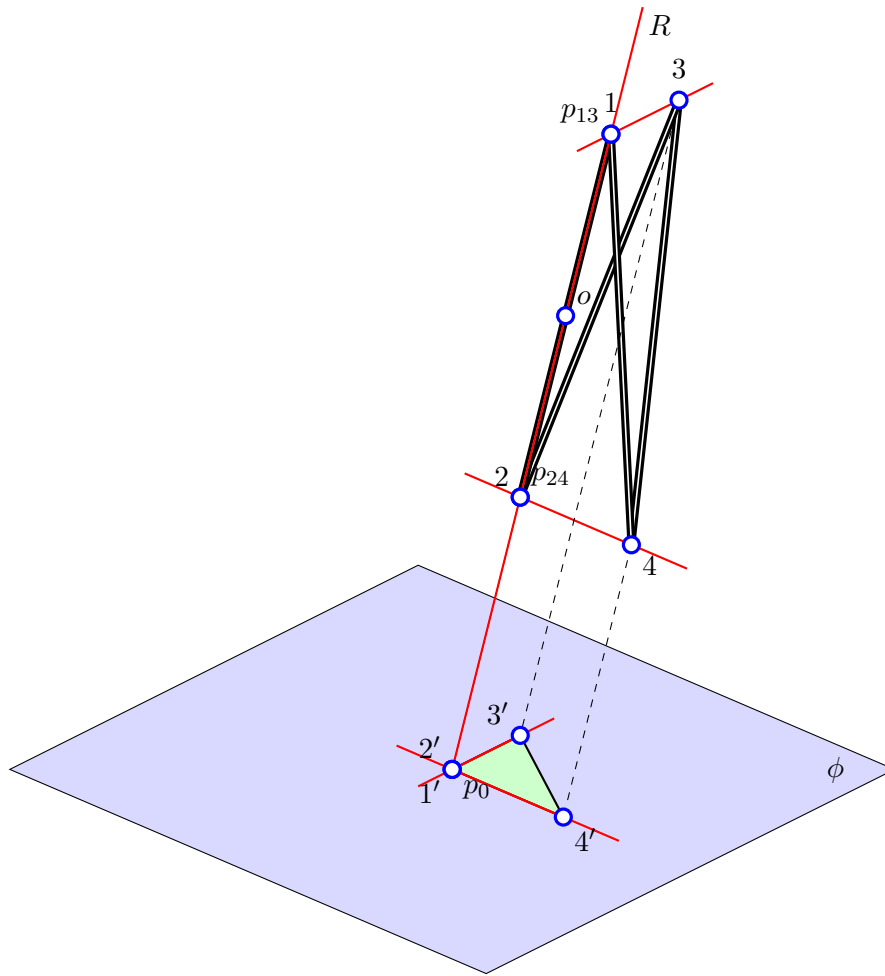


FIGURE 3.7 – QG doublement singulier

Lemme 18. *Il existe un QG de type $\equiv\equiv$ dont les côtés sont de longueurs distinctes.*

Démonstration. La construction suivante prouve cette existence.

Construisons un triangle scalène $2'3'4'$ et plaçons le point $1'$ en $2'$.

Nous obtenons un QQP à sommet double non QP $1'2'3'4'$ (voir section 2.4.7 définition 13) dont l'intersection p_0 des diagonales est confondue avec les sommets $1'$ et $2'$.

Choisissons deux points distincts p_{13} et p_{24} sur la droite R perpendiculaire au plan ϕ du QQP par p_0 .

Construisons un revêtement de ce QQP comme suit :

Les points 1 et 3 sont obtenus par translation de $1'$ et $3'$ selon le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_{13}}$
 les points 2 et 4 sont obtenus par translation de $2'$ et $4'$ selon le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_{24}}$.

— **La figure 1234 est un QG**

En effet, la projection du plan 124 sur ϕ est la droite $(2'4')$ et le point $3' \notin$ à la droite $(2'4')$. Il s'ensuit que le point 3 est en-dehors du plan 124.

— **Les côtés du QG 1234 ont des longueurs distinctes**

En effet, les quatre côtés du QG sont les diagonales de rectangles formés chacun par deux côtés parallèles à R , tous de longueur $|p_{13}p_{24}|$ et deux côtés parallèles translatsés d'un côté du QQP (tous de longueurs distinctes) selon $\overrightarrow{p_0 p_{13}}$ et $\overrightarrow{p_0 p_{24}}$. Les longueurs des côtés du QQP étant distinctes, celles des diagonales de ces rectangles le sont aussi.

— **Le QG est de type $\equiv\equiv$**

Evident, puisque $p_{13} = 1$ et $p_{24} = 2$.

□

Théorème 6. *Il existe un QG de type $\equiv\equiv$ dont le groupe d'automorphismes est l'identité.*

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme 18.

□

Un tel QG est appelé *QG doublement singulier*.

3.2 Groupes d'ordre 2

Dans cette situation, nous disposons forcément d'un automorphisme α d'ordre 2. Nous distinguons les trois types combinatoires :

- $(1, 2)(3, 4)$,
- $(1, 3)(2, 4)$,
- $(1)(3)(2, 4)$.

Rappelons qu' α est en même temps une isométrie de l'espace conservant le QG. A priori, les isométries de l'espace d'ordre 2 sont de trois types possibles : symétrie centrée, symétrie par rapport à une droite, rotation d'un demi-tour, symétrie bilatérale. Rappelons à partir du dossier I (réf. [2]) les résultats suivants :

L'isométrie α est un demi-tour qui possède un axe vertical, forcément la perpendiculaire commune aux diagonales ou un axe horizontal (voir Section 1.2 Lemme 1) ou une symétrie bilatérale (voir Section 1.2 Lemme 2).

Les trois énoncés qui suivent sont des rappels du dossier *Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8* .

Quadrilatères conservés par un automorphisme $\alpha = (1, 2)(3, 4)$.

Lemme 19. *Si un tel quadrilatère gauche existe, alors α est une rotation spatiale d'un demi-tour dont l'axe est la droite passant par les milieux des côtés $[1, 2]$ et $[3, 4]$.*

Démonstration. Voir le dossier *Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8* , section 3.2.1, lemme 14 [2]. □

Quadrilatères conservé par l'automorphisme $\alpha = (1, 3)(2, 4)$:

Lemme 20. *Si un tel quadrilatère existe, alors α est une rotation spatiale d'un demi-tour dont l'axe est la droite R perpendiculaire commune aux deux droites diagonales $(1, 3)$ et $(2, 4)$.*

Démonstration. Voir le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.2.2, lemme 16 (Réf.[2]). □

Quadrilatères conservés par un automorphisme $\alpha = (1)(3)(2, 4)$:

Lemme 21. *Si un tel quadrilatère existe, alors α est une symétrie bilatérale dont l'axe est le plan médiateur de $[2, 4]$. Notons que ce plan passe par les sommets 1 et 3*

Démonstration. Voir le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.2.3, lemme 17 (Réf. [2]). □

3.2.1 QG conservé par un automorphisme $\alpha = (1, 3)(2, 4)$ ou QG parallélogramme

Notons que le QG ne peut avoir un sommet (par exemple 1) sur l'axe. En effet dans ce cas le sommet opposé ($\text{opp}(1) = 3$) serait également sur l'axe. Le QG serait donc contenu dans le plan passant par la perpendiculaire commune aux diagonales et les sommets 2 et 4, en contradiction avec nos hypothèses.

Lors de la première approche, ces QG ont été nommés *QG parallélogramme*.

Elimination des cas impossibles

Lemme 22. *Tout QG parallélogramme est de type $\in\in$.*

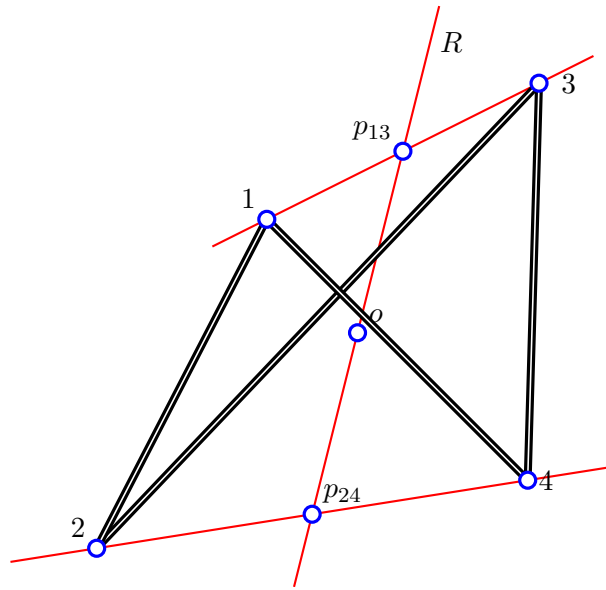


FIGURE 3.8 – QG de type $\in\in$

Démonstration. Comme le demi-tour α conserve les segments diagonaux et la perpendiculaire commune aux droites diagonales, les pieds p_{13} et p_{24} sont les milieux respectivement de $[1, 3]$ et $[2, 4]$. Le QG est donc de type $\in\in$. □

La deuxième approche n’apporte pas de nouveau quadrilatère gauche.

Construction d’un QG parallélogramme

Partons de la droite R verticale et de ses points p_{13}, o, p_{24} tels que $dist(p_{13}, o) = dist(p_{24}, o) \neq 0$.

On se donne une droite U perpendiculaire à R en p_{13} , future droite 13 notée (13).

On se donne une droite V perpendiculaire à R en p_{24} future droite 24 notée (24).

Exigeons que U et V ne soient pas parallèles.

Partons d’un point 1 sur U distinct de p_{13} . Soit 3 le symétrique de 1 sur U par rapport à p_{13} .

Partons d’un point 2 sur V distinct de p_{24} . Soit 4 le symétrique de 2 sur V par rapport à p_{24} .

Nous obtenons un QG 1234 pour lequel α , demi-tour d’axe R est une isométrie.

L’existence du QG conservé par l’automorphisme α est donc établie. De plus, si nous souhaitons que le QG n’admette aucune autre symétrie, il suffit de choisir le sommet 2 tel que $dist(2, p_{24}) \neq dist(1, p_{13})$ et tel que la droite (13) ne soit pas dans le plan médiateur du segment $[2, 4]$. En conséquence, il existe un QG parallélogramme dont le groupe d’automorphismes est $\{I, \alpha\}$.

Forme de la projection privilégiée

Soit un QG parallélogramme 1234 conservé par un automorphisme α et $1'2'3'4'$ sa projection privilégiée sur le plan ϕ

Lemme 23. *La figure plane $1'2'3'4'$ est conservée par un automorphisme $(1', 3')(2', 4')$ du plan ϕ*

Démonstration. L’image du QG 1234 par α est le QG 3412. Comme ces deux QG sont confondus, leurs projections privilégiées $1'2'3'4'$ et $3'4'1'2'$ le sont aussi. La figure $1'2'3'4'$ est donc conservée par un automorphisme $(1', 3')(2', 4')$ du plan ϕ . □

Lemme 24. *Si le QG est un parallélogramme gauche, $\Pi(QG)$ est un parallélogramme plan.*

Démonstration. Nous savons par le lemme 3 , section 2.4 et le lemme 23, section 3.2.1 que la projection de QG est un QP convexe conservé par un automorphisme $(1', 3')(2', 4')$ de ϕ . Notre classification des QP (Réf. [3]) nous apprend que dans ce cas le QP est un parallélogramme. \square

Conclusion

Théorème 7. *Il y a un seul type de QG conservé par un automorphisme $(1, 3)(2, 4)$, le parallélogramme gauche. Ce nom s'accorde avec celui de la projection privilégiée du QG.*

Démonstration. Conséquence du lemme 24. \square

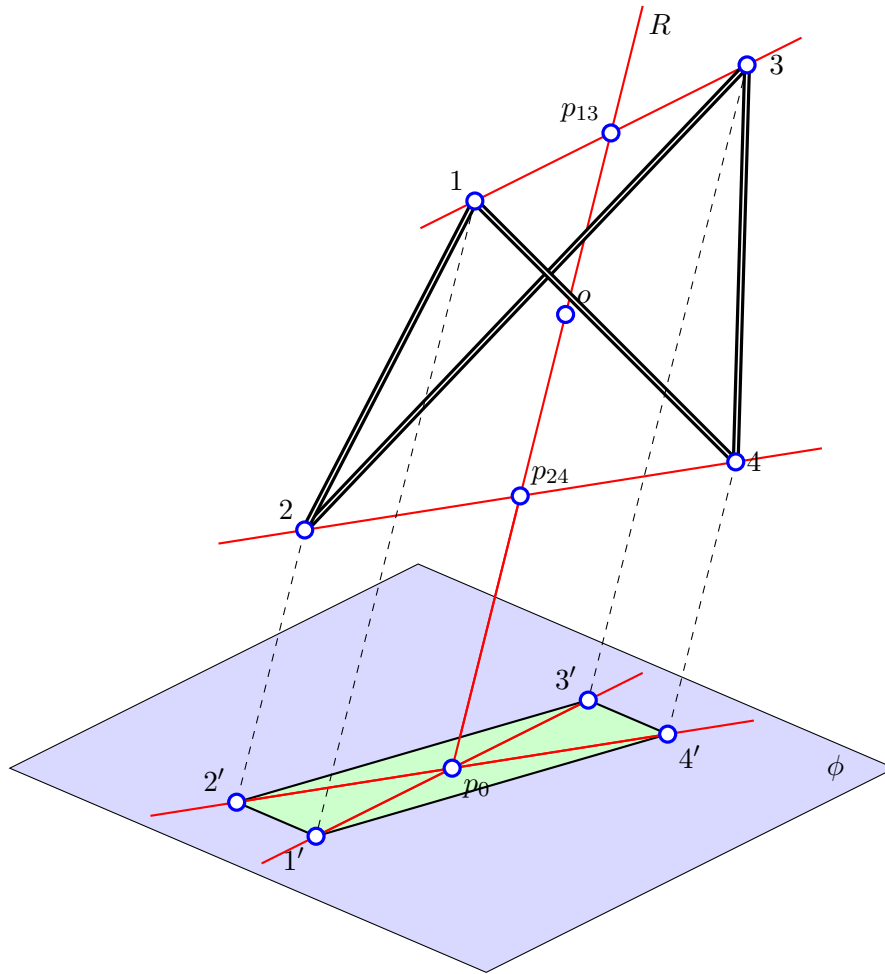


FIGURE 3.9 – Parallélogramme gauche

Remarque : le parallélogramme gauche admet une isométrie α qui est un demi-tour dont l'axe est la droite R . Le parallélogramme plan admet une isométrie α qui est une symétrie centrée de centre p_0 .

3.2.2 QG conservés par un automorphisme $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ ou QG isocèle

Rappel

Voir le dossier *Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8* , section 3.2.1, lemme 14 [2]. que l'automorphisme α est un demi-tour dont l'axe est la droite A passant par les milieux des côtés $[1, 2]$ et $[3, 4]$ et que α échange les diagonales $[1, 3]$ et $[2, 4]$. Il en résulte que α permute les pieds p_{13} et p_{24} puisque α conserve la perpendiculaire commune aux diagonales. L'axe A est donc perpendiculaire à R (perpendiculaire commune) en o . Lors de la première approche, ces QG ont été nommés *QG isocèles*.

Nous reprenons cette terminologie. L'isométrie des côtés $[1, 4]$ et $[2, 3]$ permutés par α était ce choix. En deuxième approche, nous affinons cette classification en nous appuyant sur les six types décrits à la section 2.3.

Elimination des cas impossibles

Lemme 25. *Tout QG isocèle est de l'un des types $\in\in$, $\notin\notin$ ou $\equiv\equiv$*

Démonstration. Puisque α permute les pieds p_{13} et p_{24} , ceux-ci doivent avoir la même incidence par rapport aux segments diagonaux $[1, 3]$ et $[2, 4]$. Comme dans chacun des trois autres types, leur incidence est différente, ceux-ci sont à éliminer. Seuls les types $\in\in$, $\notin\notin$ et $\equiv\equiv$ sont à envisager pour un QG isocèle. \square

Existence et construction des trois types de quadrilatère gauche isocèle

Partons de la droite R verticale et de ses points p_{13}, o, p_{24} tels que

$$\text{dist}(p_{13}, o) = \text{dist}(p_{24}, o) \neq 0.$$

On se donne une droite A perpendiculaire à R en o . La droite A est l'axe du demi-tour α .

Partons d'une droite U perpendiculaire à R en p_{13} non-parallèle à A et d'un point 1 sur U .

Partons d'un point 3 de U autre que les points p_{13} et 1 et non-symétrique de 1 par rapport à p_{13} .

Soit 4 le point $\alpha(3)$ et 2 le point $\alpha(1)$.

Alors le QG 1234 admet l'isométrie α .

Du fait que $\text{dist}(1, p_{13}) \neq \text{dist}(3, p_{13})$, une isométrie hypothétique β autre que α ne peut transformer le sommet 1 en les sommets 3, 4, 2, donc β fixe 1. Alors β fixe 2, 3, 4 et $\beta = I$.

On distingue les trois types requis selon la position de 1 et 3 par rapport à p_{13} .

a) Si $p_{13} \in]1, 3[$ alors le QG est du type $\in\in$

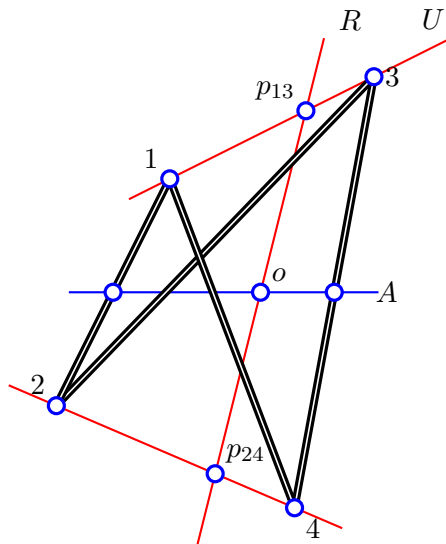


FIGURE 3.10 – QG de type $\in\in$

b) Si $p_{13} \notin [1, 3]$ alors le QG est du type $\notin \notin$

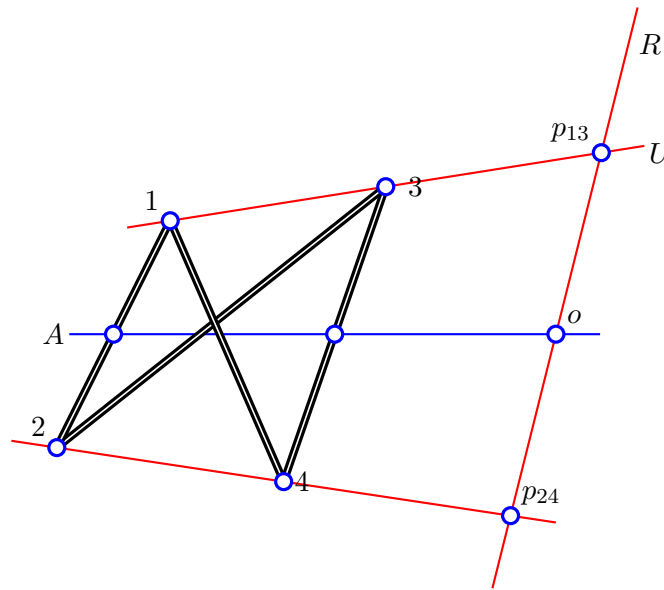


FIGURE 3.11 – QG de type $\notin \notin$

c) Si $p_{13} = 1$ (ou 3) alors le QG est du type $\equiv \equiv$

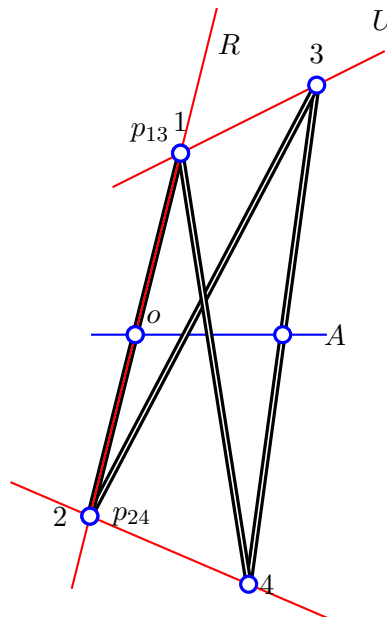


FIGURE 3.12 – QG de type $\equiv \equiv$

De plus, pour chaque type, il est possible de faire un choix $d(1, p_{13}) \neq d(3, p_{13})$. Ceci implique que parmi les QG isocèles dont le groupe d'automorphismes est $\{1, \alpha\}$, il en existe de chaque type autorisé. En outre : les QG isocèles des types $\notin \notin$ ou $\equiv \equiv$ ne peuvent pas être conservés par d'autres automorphismes que I et α parce que dans ces cas on a d'office $d(1, p_{13}) \neq d(3, p_{13})$.

Forme de la projection privilégiée

Soit un QG isocèle 1234 conservé par un automorphisme $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ et $1'2'3'4'$ sa projection privilégiée sur le plan ϕ .

Lemme 26. *La figure plane $1'2'3'4'$ est conservée par un automorphisme $(1', 2') (3', 4')$ du plan ϕ .*

Démonstration. L'image du QG 1234 par α est le QG 2143. Comme ces deux QG sont confondus, leurs projections privilégiées $1'2'3'4'$ et $2'1'4'3'$ le sont aussi. La figure $1'2'3'4'$ est donc conservée par un automorphisme $(1', 2') (3', 4')$ du plan ϕ . \square

Définition 14. *Nous disons d'un quasi-quadrilatère plan qu'il est isocèle s'il possède deux côtés opposés isométriques.*

Lemme 27.

- a) *La projection privilégiée d'un QG isocèle de type $\in\in$ est un trapèze isocèle (convexe) plan.*
- b) *La projection privilégiée d'un QG isocèle de type $\notin\notin$ est un papillon trapèze isocèle plan à côtés parallèles.*
- c) *La projection privilégiée d'un QG isocèle de type $\equiv\equiv$ est un quasi-quadrilatère plan isocèle à point double*

Démonstration.

- a) Nous savons par le lemme 3 , section 2.4 et le lemme 26, section 3.2.2 que la projection est un QP convexe conservé par un automorphisme $(1', 2')(3', 4')$ de ϕ . Notre classification des QP (Réf. [2]) nous apprend que dans ce cas le QP est un trapèze isocèle.
- b) Nous savons par le lemme 5, section 2.4 et le lemme 26 , section 3.2.2 que la projection est un QP papillon conservé par un automorphisme $(1', 2') (3', 4')$ de ϕ . Notre classification des QP (Réf. [2]) nous apprend que dans ce cas le QP est soit un papillon trapèze isocèle à côtés parallèles soit un papillon parallélogramme. Il ne peut s'agir d'un papillon parallélogramme sinon les diagonales du QG seraient parallèles. La projection est donc un papillon trapèze isocèle à côtés parallèles.
- c) Nous savons par le lemme 9, section 2.4 qu'il s'agit d'un quasi-quadrilatère à point double, projections confondues d'une extrémité de chaque diagonale. Supposons, sans perte de généralité, que $1' = 2'$. Les segments diagonaux du QG sont de même longueur puisque conservés par un automorphisme $(1, 2)(3, 4)$. Il en est de même de leurs projections puisque les diagonales du QG sont parallèles au plan ϕ . Dès lors la projection privilégiée du QG est un quasi-quadrilatère dont les côtés $[2', 3'] = [1', 3']$ et $[1', 4'] = [2', 4']$ sont égaux, il s'agit d'un quasi-quadrilatère plan isocèle de sommet $1' = 2'$.

\square

Conclusion

Il y a trois types de quadrilatères gauches isocèles, les voici illustrés et nommés. Le choix du nom est lié à la projection privilégiée du quadrilatère gauche :

Le QG isocèle de type $\in\in$ que nous nommons *QG trapèze isocèle* ou *trapèze isocèle gauche*.

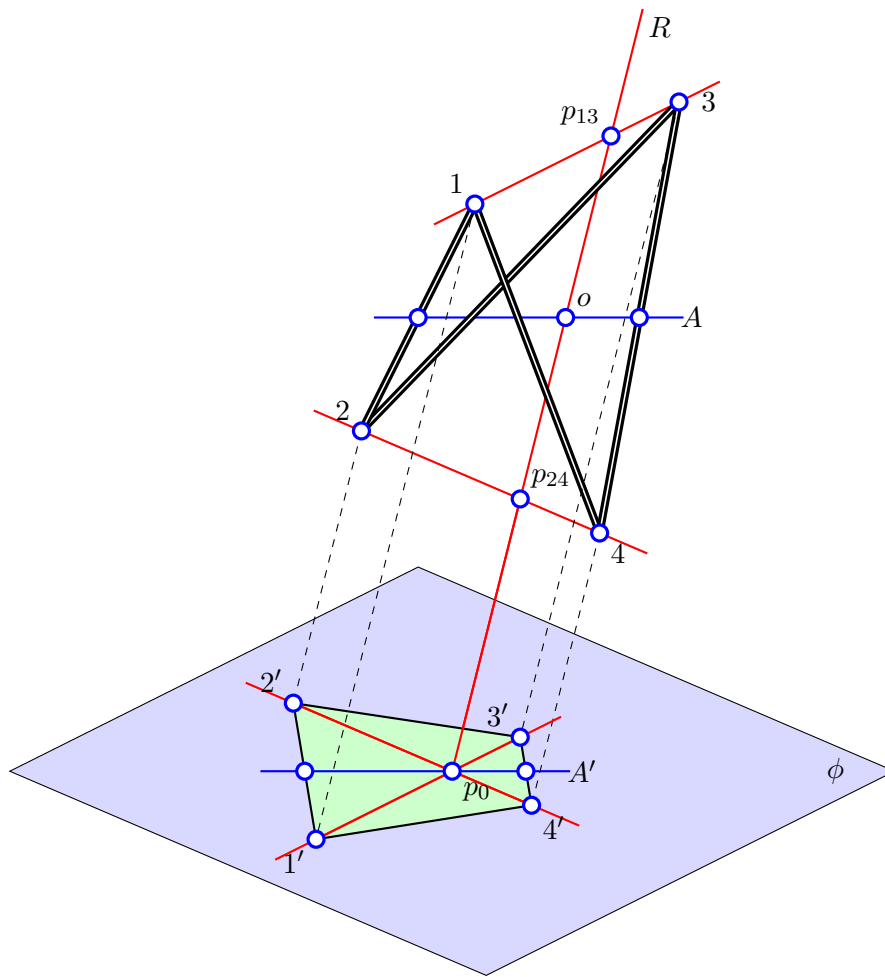


FIGURE 3.13 – *Trapèze isocèle gauche*

Le QG isocèle de type $\notin \notin$ que nous nommons *QG papillon trapèze isocèle* ou *Papillon trapèze isocèle gauche*

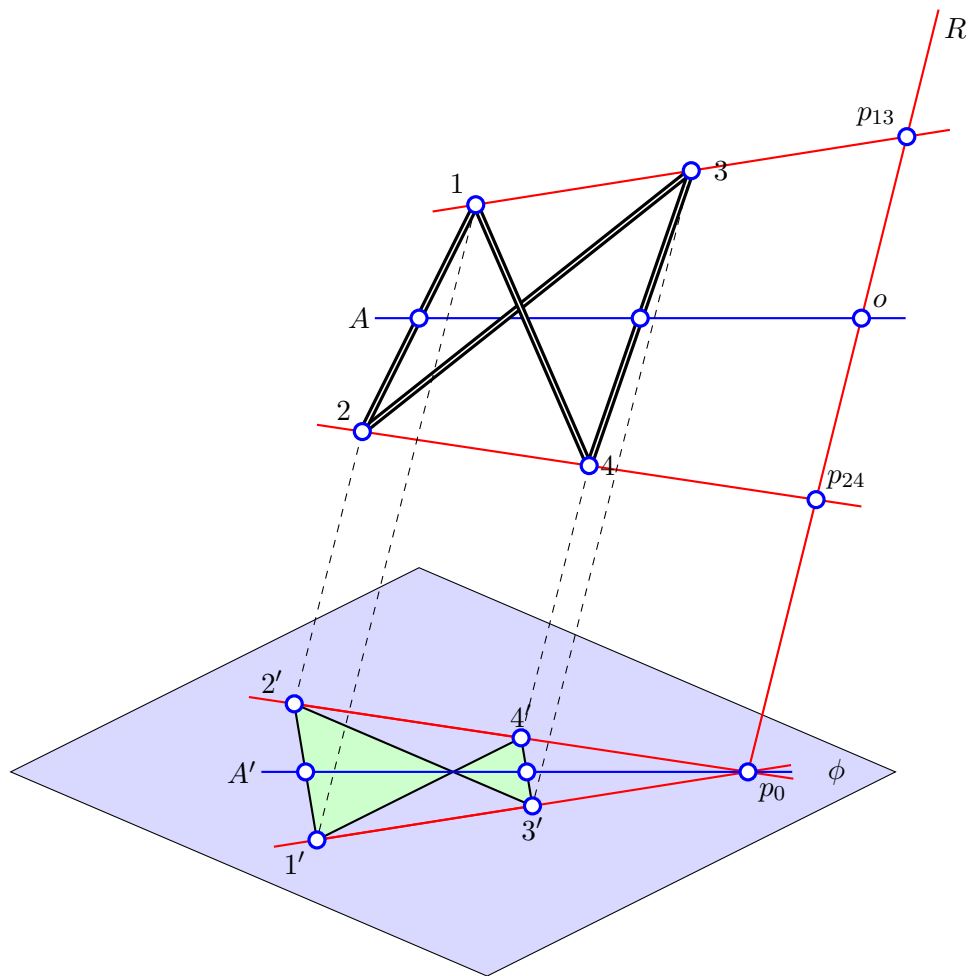


FIGURE 3.14 – *QG papillon trapèze isocèle*

Le QG isocèle de type $\equiv \equiv$ que nous nommons *QG isocèle doublement singulier*.

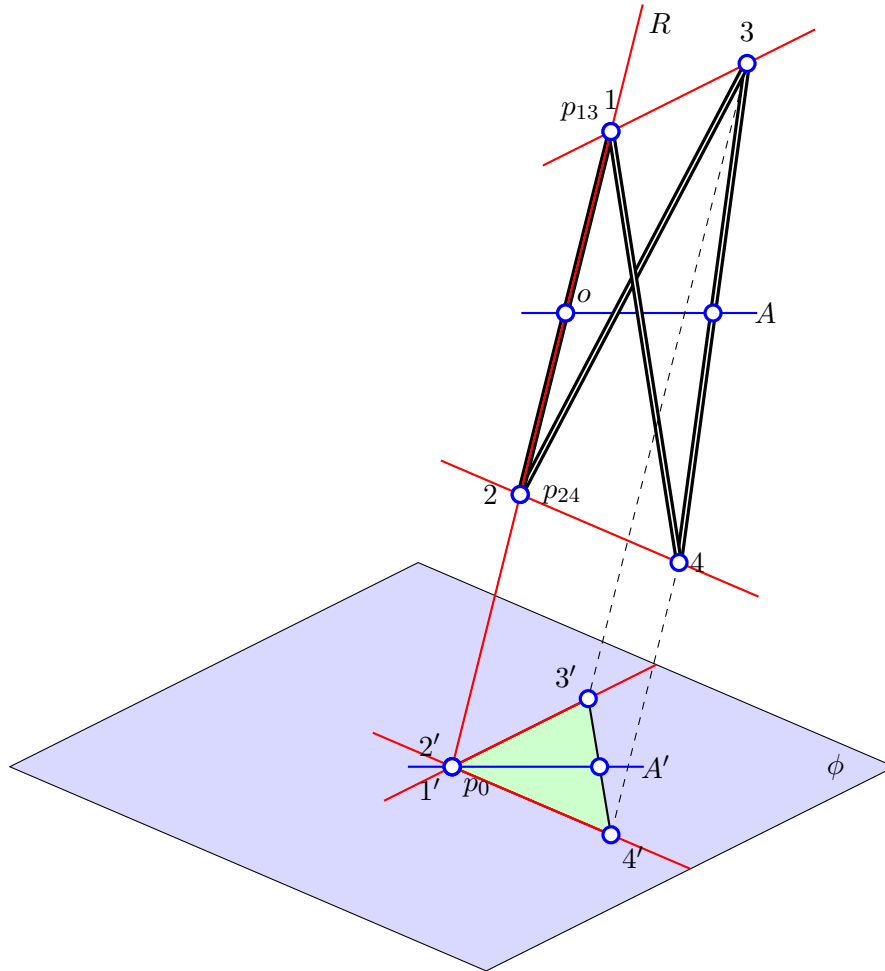


FIGURE 3.15 – *QG isocèle doublement singulier*

3.2.3 QG conservés par un automorphisme $\alpha = (1)(3)(2, 4)$ ou QG bilatéral

Rappel

Nous savons par le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.2.3, lemme 17 (Réf. [2]) que l'isométrie correspondant à α est une symétrie bilatérale dont l'axe est un plan μ passant par 1 et 3 et médiateur de $[2, 4]$. L'isométrie α conserve les segments diagonaux et la perpendiculaire commune aux diagonales. Lors de la première approche, cette famille de QG a été nommée *quadrilatère gauche bilatéral*. En deuxième approche, nous affinons cette classification en nous appuyant sur les 6 types décrits à la section 2.3.

Élimination des cas impossibles

Lemme 28. *Le pied p_{24} , est le milieu de $[2, 4]$*

Démonstration. Toute perpendiculaire à $[2, 4]$ est parallèle au plan μ médiateur de $[2, 4]$. La droite diagonale 13 est dans ce plan μ puisque 1 et 3 appartiennent à l'axe plan de α . La perpendiculaire commune aux droites diagonales est dans le plan μ puisqu'elle passe par un point de la droite diagonale 13. Il en résulte que le pied p_{24} , est le milieu de $[2, 4]$ \square

Corollaire 1. *Tout QG bilatéral est de l'un des types $\in\in$, $\in\neq$ ou $\equiv\in$.*

Démonstration. Puisque p_{24} est le milieu de $[2, 4]$ il faut éliminer tout cas où la caractéristique \in n'apparaît pas. Les QG de type $\neq\neq$, $\equiv\equiv$ ou $\equiv\neq$ ne sont jamais un QG bilatéral. Il reste trois types possibles pour un QG bilatéral, les types $\in\in$, $\in\neq$ et $\equiv\in$. \square

Existence des trois types de quadrilatère gauche bilatéral

On se donne un plan μ^1 , deux de ses points 1 et 3 et un point 2 extérieur à μ . Si le point 4 est le symétrique de 2 par rapport au plan μ , le QG 1234 est un quadrilatère gauche bilatéral.

Nous retrouvons les trois cas possibles selon la position choisie pour le point 2.

Soit π_1 le plan perpendiculaire à la diagonale (13) par 1 et π_3 le plan perpendiculaire à 13 par 3.

- a) si 2 est strictement entre π_1 et π_3 alors le QG est de type $\in\in$.
- b) si 2 n'est ni entre π_1 et π_3 ni dans l'un de ces deux plans alors le QG est de type $\in\neq$.
- c) si 2 appartient à π_1 ou à π_3 alors le QG est de type $\equiv\in$.

Définition 15. *Nous disons d'un quasi-quadrilatère plan qu'il est bilatéral s'il possède deux paires de côtés consécutifs isométriques.*

Forme de la projection privilégiée

Soit un quadrilatère bilatéral gauche 1234 conservé par un automorphisme α et $1'2'3'4'$ sa projection privilégiée sur le plan ϕ_1 .

Lemme 29. *La figure plane $1'2'3'4'$ est conservée par un automorphisme $(1')(3')(2', 4')$ du plan ϕ .*

Démonstration. L'image du QG 1234 par α est le QG 1432. Comme ces deux QG sont confondus, leurs projections privilégiées $1'2'3'4'$ et $1'4'3'2'$ le sont aussi. La figure $1'2'3'4'$ est donc conservée par un automorphisme $(1')(3')(2', 4')$ du plan ϕ . \square

Lemme 30.

- a) *La projection privilégiée d'un quadrilatère gauche bilatéral de type $\in\in$ est un cerf-volant plan.*
- b) *La projection privilégiée d'un quadrilatère gauche bilatéral de type $\in\neq$ est un deltaplane plan.*

1. Remarque : dans le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », ce plan s'appelait Axe σ , Réf. [2]

c) La projection privilégiée d'un quadrilatère gauche bilatéral de type $\equiv\epsilon$ est un quasi-quadrilatère plan convexe bilatéral dont le quatrième point est au milieu d'une diagonale.

Démonstration.

- a) Nous savons par la section 2.4 et le lemme 29 que la projection est un QP convexe conservé par un automorphisme $(1')(3')(2', 4')$ de ϕ . Notre classification des QP (Réf. [3]) nous apprend que dans ce cas ce QP est un cerf-volant (voir figure 3.16).
- b) Nous savons par la section 2.4 et le lemme 29 que la projection est un QP bec conservé par un automorphisme $(1')(3')(2', 4')$ du plan ϕ . Notre classification des QP (Réf. [3]) nous apprend que dans ce cas ce QP est un deltaplane (voir figure 3.17).
- c) Nous savons par le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », Réf. [2], que μ est le plan médiateur de $[2, 4]$ et passe par 1 et 3. Il s'ensuit que $2'$ et $4'$ sont distincts et que la droite $(1'3')$ est la médiatrice de $[2', 4']$. Dès lors les points $1'$ et $3'$ sont chacun équidistants des points $2'$ et $4'$. Comme le QG est supposé de type $\equiv\epsilon$, un des points 1 ou 3 (nous supposons qu'il s'agit de 3) est confondu avec p_{13} . Le point $3'$ est alors au milieu de $[2', 4']$ et la figure $1'2'4'$ est un triangle isocèle de sommet $1'$.
Dès lors la figure $1'2'3'4'$ est un QQP convexe bilatéral (voir figure 3.18).

□

Conclusion

Il y a trois types de QG bilatéraux.

Le choix du nom du QG est lié à sa projection privilégiée. Les voici illustrés et nommés :

Un QG bilatéral du type $\in\in$: nous le nommons QG *cerf-volant* ou *Cerf-volant gauche*

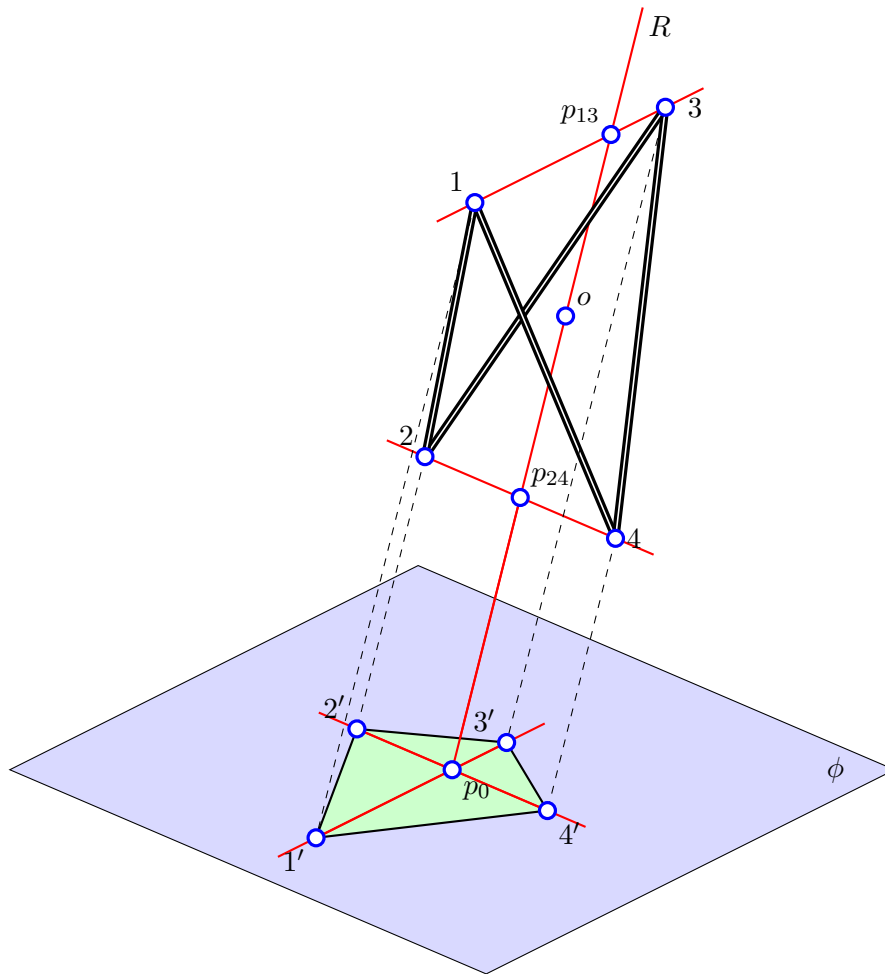


FIGURE 3.16 – QG *cerf-volant* ou *Cerf-volant gauche*

Un QG bilatéral du type $\in \notin$: nous le nommons *QG deltaplane* ou *Deltaplane gauche*

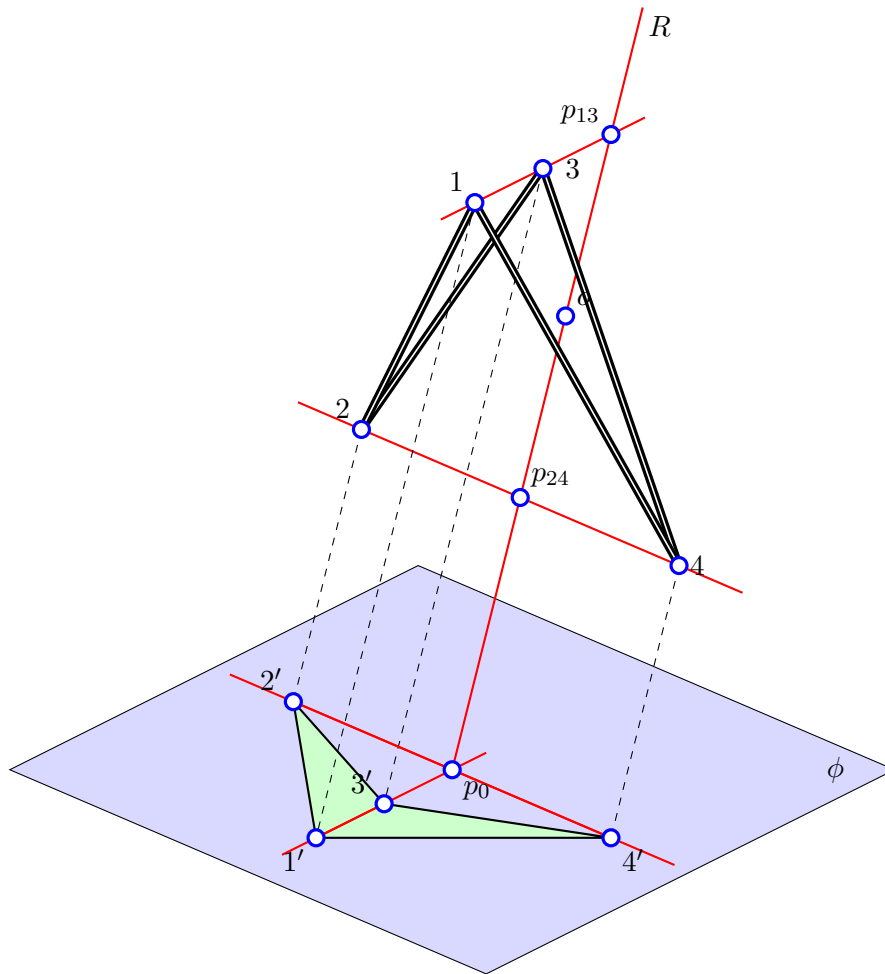


FIGURE 3.17 – QG deltaplane ou Deltaplane gauche

Un QG bilatéral du type $\equiv \epsilon$: nous le nommons *QG bilatéral singulier convexe*

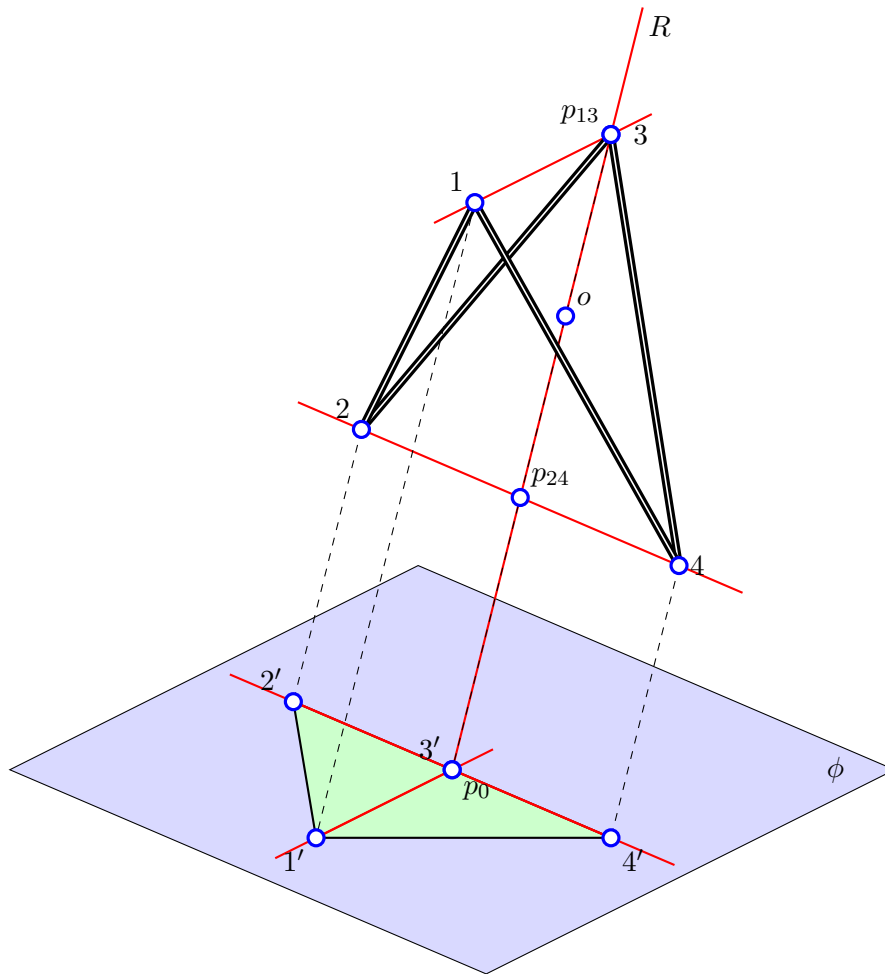




FIGURE 3.18 – *QG bilatéral singulier convexe*

3.3 Groupes d'ordre 4

3.3.1 Rappels et généralités

Le groupe diédrique d'ordre 8 du quadrilatère combinatoire, possède trois sous-groupes² d'ordre 4 que voici (Réf. [2], section 3.3) :

- Le groupe combinatoire du rectangle $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ ou  : $\{I, (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3)(2, 4)\}$
- Le groupe combinatoire du losange $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ ou  : $\{I, (1)(3)(2, 4), (1, 3)(2)(4), (1, 3)(2, 4)\}$
- Le groupe combinatoire cyclique d'ordre 4 : $\{I, (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 3)(2, 4)\}$

Chacun de ces groupes peut être représenté comme groupe d'isométries d'un QG de sommets 1, 2, 3, 4.

Nous détaillons ces trois groupes par la suite.

Lemme 31. *Un QG défini en première approche par un des sous-groupes d'ordre 4 est un QG parallélogramme.*

Démonstration. Les trois sous-groupes contiennent le sous-groupe $\{I, (1, 3)(2, 4)\}$. Les quadrilatères obtenus sont donc des QG parallélogrammes particuliers. \square

Lemme 32. *Un QG défini en première approche par un des sous-groupes d'ordre 4 est nécessairement du type $\in \in$.*

Démonstration. Nous savons par la section 3.2.1 que les QG parallélogrammes sont tous du type $\in \in$. \square

Théorème 8. *Le critère des segments diagonaux ne nous apporte pas de nouveau QG*

Démonstration. Ce théorème découle immédiatement des lemmes 31 et 32. \square

2. Les trois sous-groupes sont le groupe cyclique d'ordre quatre et les deux sous-groupes notés $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou \mathbb{Z}_2^2 . En cristallographie, on utilise C_2 .


Le groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ est unique à isométrie près. Le signe « + » signifie qu'il s'agit d'un groupe de rotations.

Le groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ est unique à isométrie près. Le signe « - » désigne le groupe du losange.

3.3.2 Sous groupe combinatoire du rectangle : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+ = \{I, (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3)(2, 4)\}$$

Nous savons par le dossier I (Réf. [2], section 3.3.1) que les isométries correspondant à ces automorphismes, hormis l'identité I , sont trois rotations spatiales d'un demi tour dont les axes sont deux à deux perpendiculaires en un même point. Ce triple de droites perpendiculaires deux à deux avec l'identité détermine le groupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$. Nous l'avons appelé groupe du trièdre rectangle et il a été désigné par

le symbole  (Voir le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.1, lemme 19, section 3.3.1, lemme 19, Réf. [2].)

Forme de la projection privilégiée.

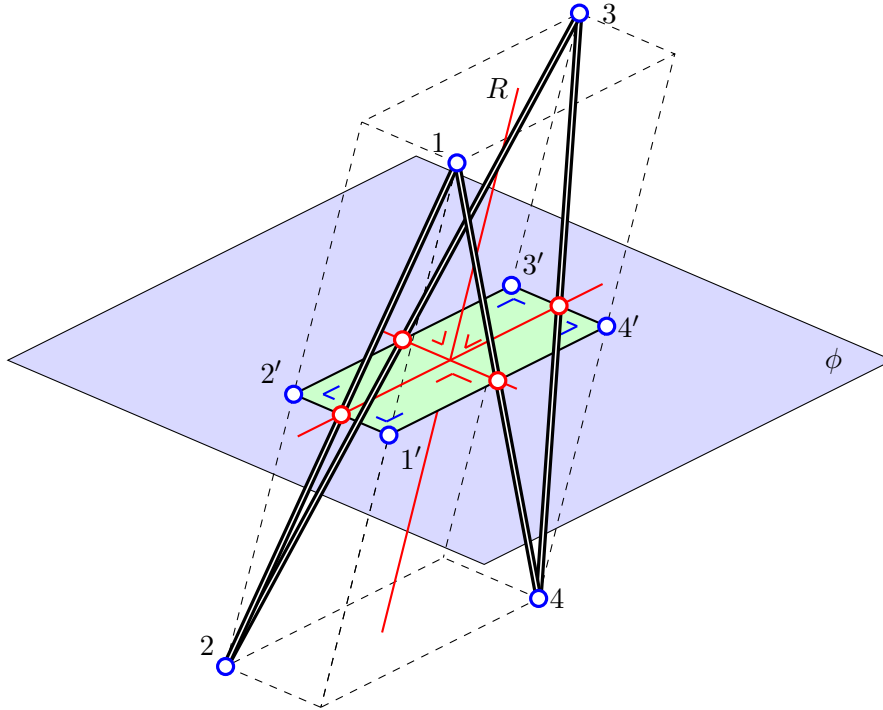


FIGURE 3.19 – *Rectangle gauche* ou *QG Rectangle*

Nous savons par les lemmes de la section 3.2.1 que la projection privilégiée d'un QG parallélogramme est un QP parallélogramme. Si le QG parallélogramme possède les éléments du groupe combinatoire $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^+$ alors la projection privilégiée est un QP parallélogramme conservé dans ϕ par les éléments du groupe combinatoire $\{I, (1', 2')(3', 4'), (1', 4')(2', 3'), (1', 3')(2', 4')\}$. Notre classification des QP nous renseigne que ce QP est un rectangle. Ainsi le QG est un QG rectangle.

Cette analyse confirme l'aspect photo résumé par le théorème 7 du dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.1, Réf. [2].

3.3.3 Sous groupe combinatoire du losange : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$

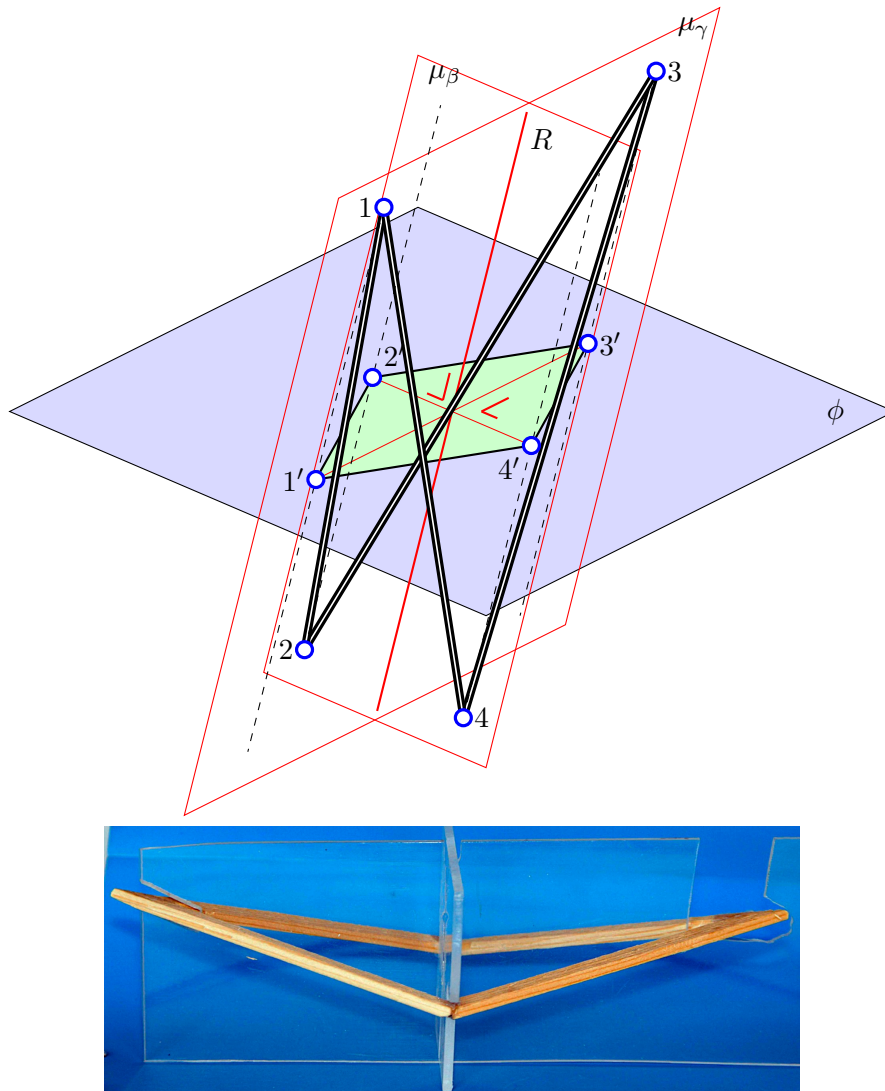


FIGURE 3.20 – Losange gauche ou QG losange

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^- \text{ ou } \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \{I, (1)(3)(2,4), (1,3)(2)(4), (1,3)(2,4)\}$$

Nous savons par le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.2 (Réf. [2]) que les isométries correspondant à ces automorphismes, hormis l'identité I , sont deux symétries bilatérales β et γ d'axes μ_β et μ_γ avec $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$ et une rotation spatiale α d'axe R (la perpendiculaire commune aux diagonales du QG) avec $\mu_\beta \cap \mu_\gamma = R$.

Nous l'appelons groupe du losange $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$.

Forme de la projection privilégiée.

Nous savons par les lemmes de la section 3.2.1 que la projection privilégiée d'un QG parallélogramme est un QP parallélogramme. Si le QG parallélogramme possède les éléments du groupe combinatoire $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^-$ alors la projection privilégiée est un QP parallélogramme conservé dans ϕ par les éléments

du groupe combinatoire $\{I, (1')(3')(2', 4'), (1', 3')(2')(4'), (1', 3')(2', 4')\}$. Notre classification des QP nous renseigne que ce QP est un losange. Ainsi le QG est un QG losange.

3.3.4 Sous groupe combinatoire cyclique d'ordre 4 : $\{I, (1, 2, 3, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 3)(2, 4)\}$

Nous savons par le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.3, (Réf. [2]) que les isométries (1234) et (1432) sont des anti-rotations d'ordre 4 fixant le centre o du QG. Ces deux anti-rotations jouent le même rôle dans la transformation et de ce fait nous traitons un seul cas.

Un tel QG a été nommé carré gauche en première approche. La deuxième approche ne nous fournit aucune différenciation, comme le prouve le lemme 32 de la section 3.3.

Remarquons que le choix de ce nom est renforcé par le fait que la projection Π d'un tel QG est un carré plan. Ceci est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 33. *Soit un QG 1234 conservé par un automorphisme $(1, 2, 3, 4)$ et $1'2'3'4'$ sa projection privilégiée sur le plan ϕ . La figure plane $1'2'3'4'$ est conservée par un automorphisme $(1', 2', 3', 4')$ du plan ϕ .*

Démonstration. L'image du QG 1234 par l'automorphisme $(1, 2, 3, 4)$ est le QG 2341. Comme ces deux QG sont confondus, leurs projections privilégiées $1'2'3'4'$ et $2'3'4'1'$ le sont aussi. La figure $1'2'3'4'$ est donc conservée par un automorphisme $(1', 2', 3', 4')$. \square

Une conséquence du lemme 33 et des lemmes 23 et 24 de la section 3.2 est que la projection privilégiée de 1234 est un parallélogramme conservé par chacun des automorphismes $I, (1', 2', 3', 4'), (1', 4', 3', 2'), (1', 3')(2', 4')$, de ϕ . Notre classification des QP nous renseigne que ce QP est un carré. Ainsi le QG est un QG carré ou carré gauche.

3.4 Groupe combinatoire d'ordre 8 : D_8

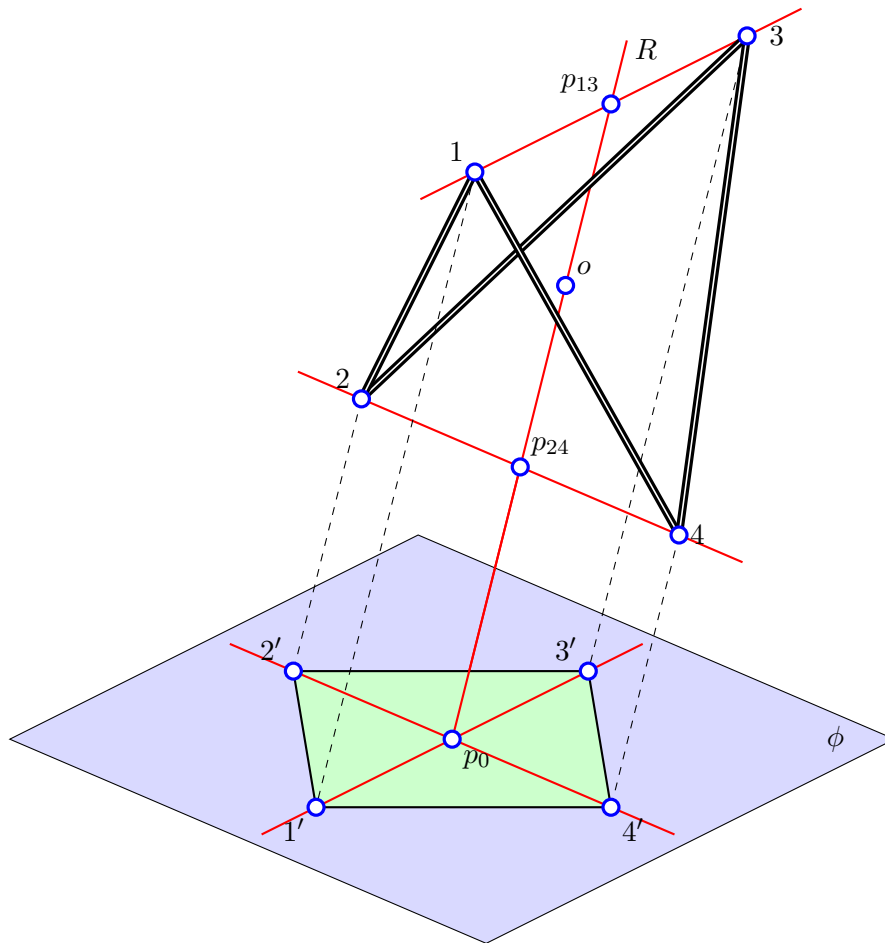


FIGURE 3.21 – QG carré

Nous savons par le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.4.1 (Réf. [2]) que le groupe D_8 est celui du carré gauche. La première approche ne nous a pas fourni de nouveau QG par rapport au groupe cyclique d'ordre quatre, il en est forcément de même pour la deuxième. Le QG obtenu est celui décrit à la section 3.3.4, le QG carré.

3.5 Synthèse

Nous avons à présent seize classes de QG.

Chaque classe est déterminée par deux critères :

- la nature de ses automorphismes,
- le critère des segments diagonaux (section 2.3).

Théorème 9. *Tout QG figure dans l'un des seize classes qui suit :*

Six quadrilatères gauches quelconques conservés par I :

1. le QG convexe du type $\in\in$,
2. le QG bec du type $\in\neq$,
3. le QG papillon du type $\neq\neq$,
4. le QG singulier convexe du type $\equiv\in$,
5. le QG singulier bec du type $\equiv\neq$,
6. le QG doublement singulier du type $\equiv\equiv$.

Trois quadrilatères gauches isocèles conservés par I et par $(1,2)(3,4)$:

7. le QG trapèze isocèle *ou* trapèze isocèle gauche du type $\in\in$,
8. le QG papillon trapèze isocèle *ou* papillon trapèze isocèle gauche du type $\neq\neq$,
9. le QG isocèle doublement singulier du type $\equiv\equiv$.

Trois quadrilatères gauches bilatéraux conservés par I et par $(1)(3)(2,4)$:

10. le QG cerf volant *ou* cerf-volant gauche du type $\in\in$,
11. le QG deltaplane *ou* deltaplane gauche du type $\in\neq$,
12. le QG bilatéral singulier convexe du type $\equiv\in$.

Un QG parallélogramme conservé par I et $(1,3)(2,4)$:

13. le parallélogramme gauche *de type* $\in\in$.

Un QG rectangle conservé par I et $(1,3)(2,4)$, $(1,2)(3,4)$ et $(1,4)(2,3)$:

14. le rectangle gauche *de type* $\in\in$.

Un QG losange conservé par I , $(1,3)(2,4)$, $(1)(3)(2,4)$ et $(2)(4)(1,3)$:

15. le losange gauche *de type* $\in\in$.

Un QG carré conservé par I , $(1,2,3,4)$, $(1,4,3,2)$ et $(1,3)(2,4)$:

16. le carré gauche *de type* $\in\in$

Rappelons que le groupe du QG carré est D_8 .

Un tableau récapitulatif de ces seize classes figure à la page suivante. Pour chacune des seize classes de QG, notées :

- Le premier indice correspond à l'ordre du groupe minimal des automorphismes nécessaires à la définir,
- Le deuxième indice correspond à son type,
- L'exposant + signifie qu'il s'agit d'un groupe de rotation(s),
- L'exposant – signifie qu'il s'agit d'un groupe comprenant une ou plusieurs symétries bilatérales

Remarques :

- Le sous-groupe de D_8 : $\{I, (1,3)(2,4), (1,2,3,4), (1,4,3,2)\}$ n'est le groupe d'automorphismes d'aucun QG mais il suffit à définir le carré gauche. Le groupe d'automorphismes du carré est D_8 .
- Un quadrilatère de classe A est déclaré cas particulier d'un quadrilatère de classe B s'ils sont de même type et le groupe des automorphismes de la classe B est sous-groupe de celui de A. Par exemple, un rectangle gauche est un trapèze isocèle gauche mais n'est pas un deltaplane gauche. Les permutations indiquées sont nécessaires à définir le quadrilatère mais leur liste n'est pas nécessairement exhaustive.
- Ces inclusions sont mises en évidence au chapitre 4.

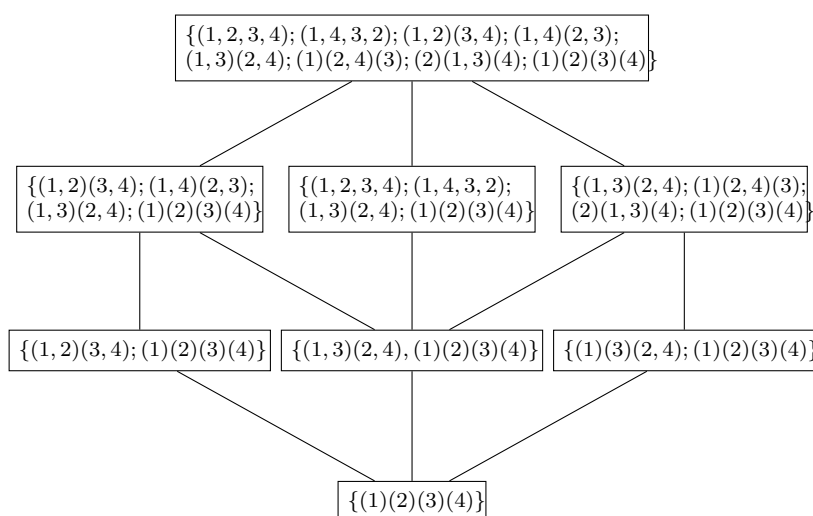
Classes	Type	$C_{*,1}$	$C_{*,2}$	$C_{*,3}$	$C_{*,4}$	$C_{*,5}$	$C_{*,6}$
$C_{1,*}$	$\{I\}$	$\in \in$ $C_{1,1}$ QG convexe	$\in \notin$ $C_{1,2}$ QG bec	$\notin \notin$ $C_{1,3}$ QG papillon	$\in \in$ $C_{1,4}$ QG singulier convexe	$\in \notin$ $C_{1,5}$ QG singulier	$\in \in \in$ $C_{1,6}$ QG doublement singulier
$C_{2,*}$	$\{I, (1,2)(3,4)\}$	$C_{2,1}$ Trapèze isocèle gauche	$C_{2,2}$ Deltaplane gauche	$C_{2,3}$ Papillon trapèze isocèle gauche	$C_{2,4}$ QG bilatéral singulier convexe		$C_{2,6}$ QG isocèle doublement singulier
$C_{2,*}$	$\{I, (1)(3)(2,4)\}$	$C_{2,1}$ Cerf-volant gauche					
$C_{2,*}$	$\{I, (1,3)(2,4)\}$	$C_{2,1}$ Parallélogramme gauche					
$C_{4,*}^+$	$\{I, (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)\}$	$C_{4,1}^+$ Rectangle gauche					
$C_{4,*}^+$	$\{I, (1,3)(2,4), (1)(3)(2,4), (2)(4)(1,3)\}$	$C_{4,1}^-$ Losange gauche					
$C_{8,*}$	$\{I, (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1)(3)(2,4), (2)(4)(1,3), (1,2,3,4), (1,4,3,2)\}$	$C_{8,1}$ Carré gauche					

Chapitre 4

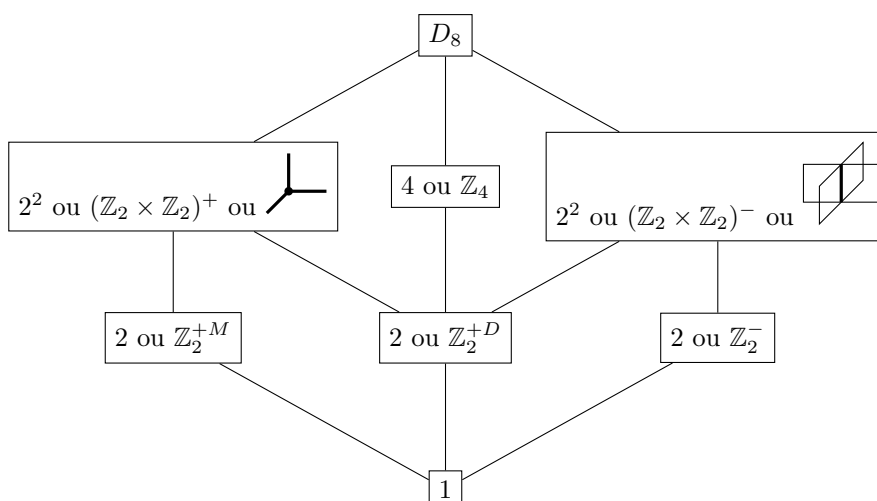
Groupe combinatoire d'ordre 8 : D_8

4.1 Les représentations des sous-groupes du groupe diédrique D_8

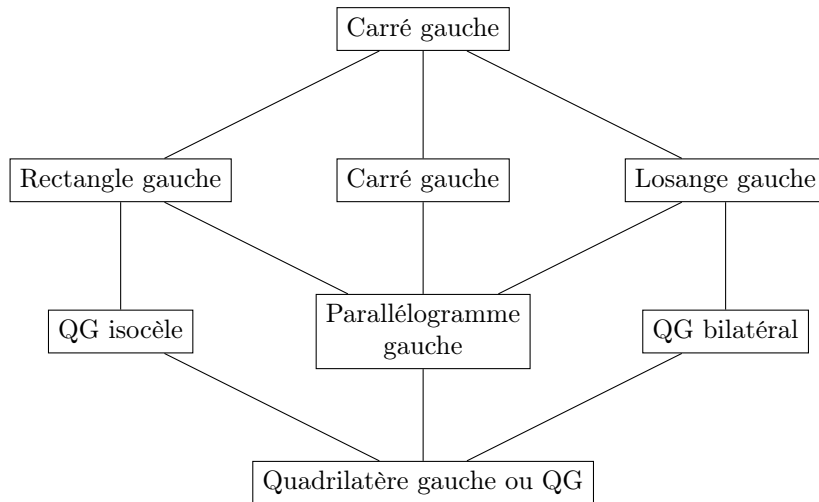
4.1.1 Représentation du groupe diédrique D_8 par des automorphismes



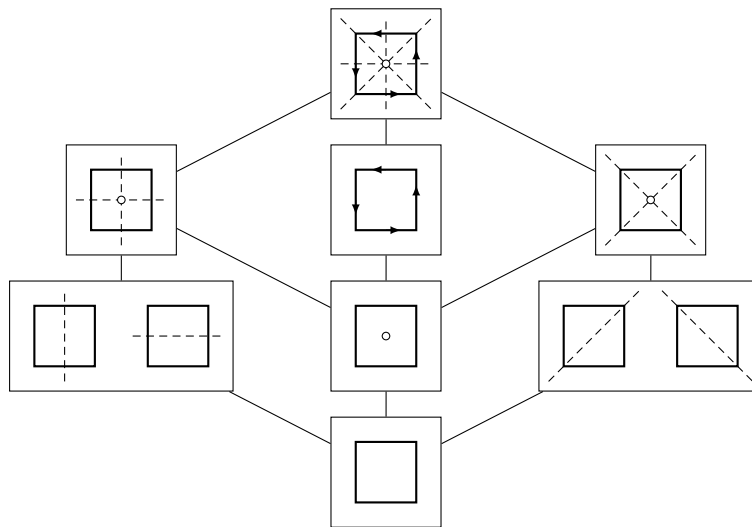
4.1.2 Représentation du groupe diédrique D_8 par des symboles



4.1.3 Représentation du groupe diédrique D_8 par des mots

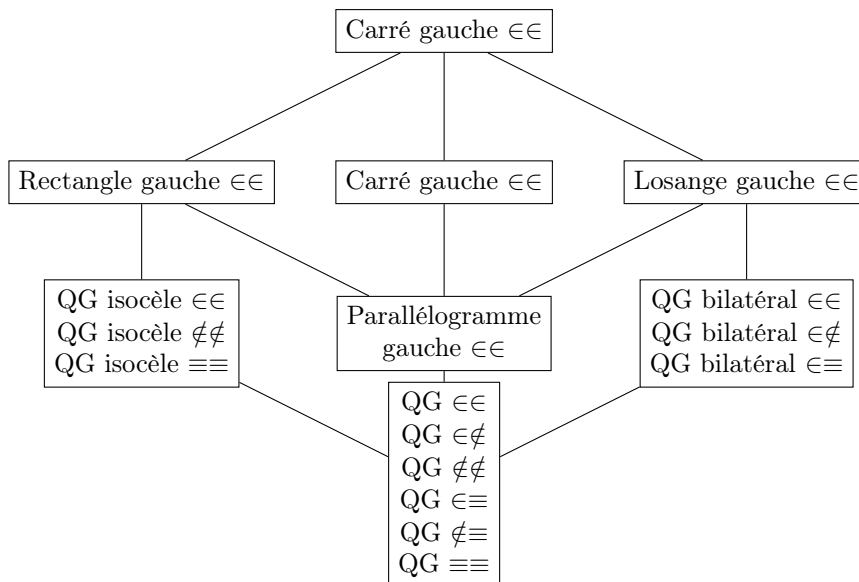


4.1.4 Représentation du groupe diédrique D_8 par des dessins

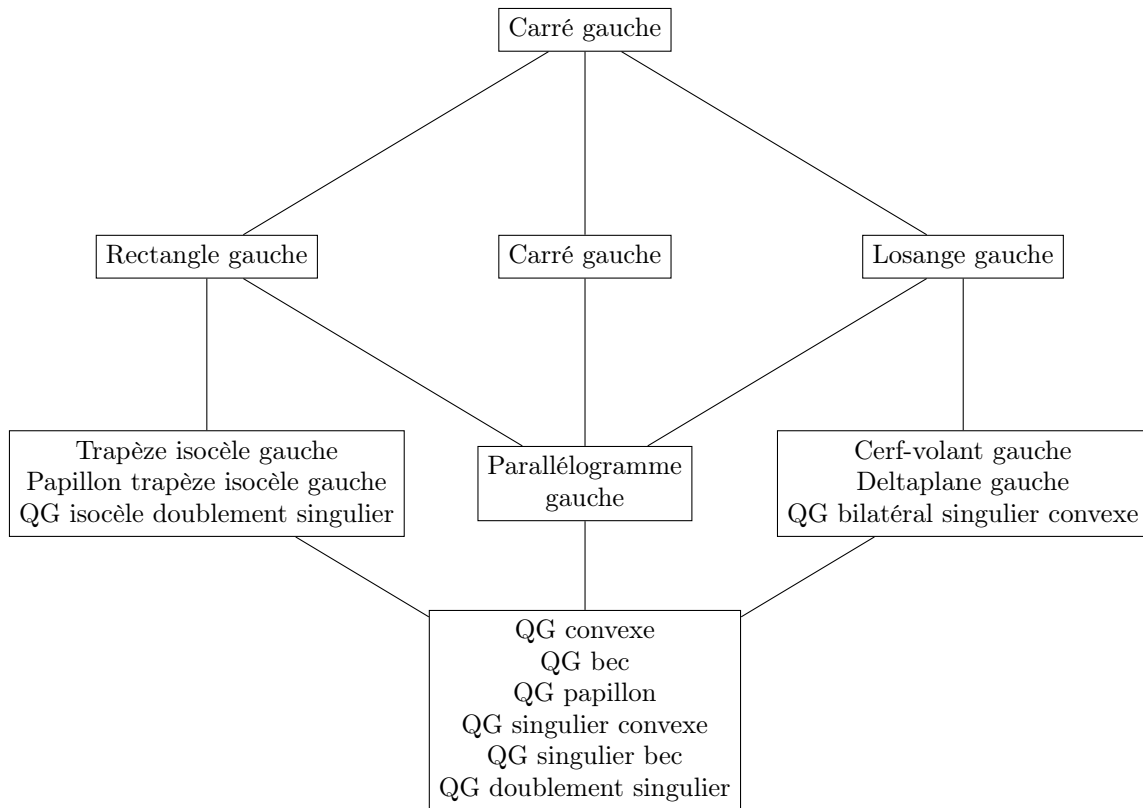


4.2 Les seize QG représentés dans chaque sous-groupe

4.2.1 Par des types

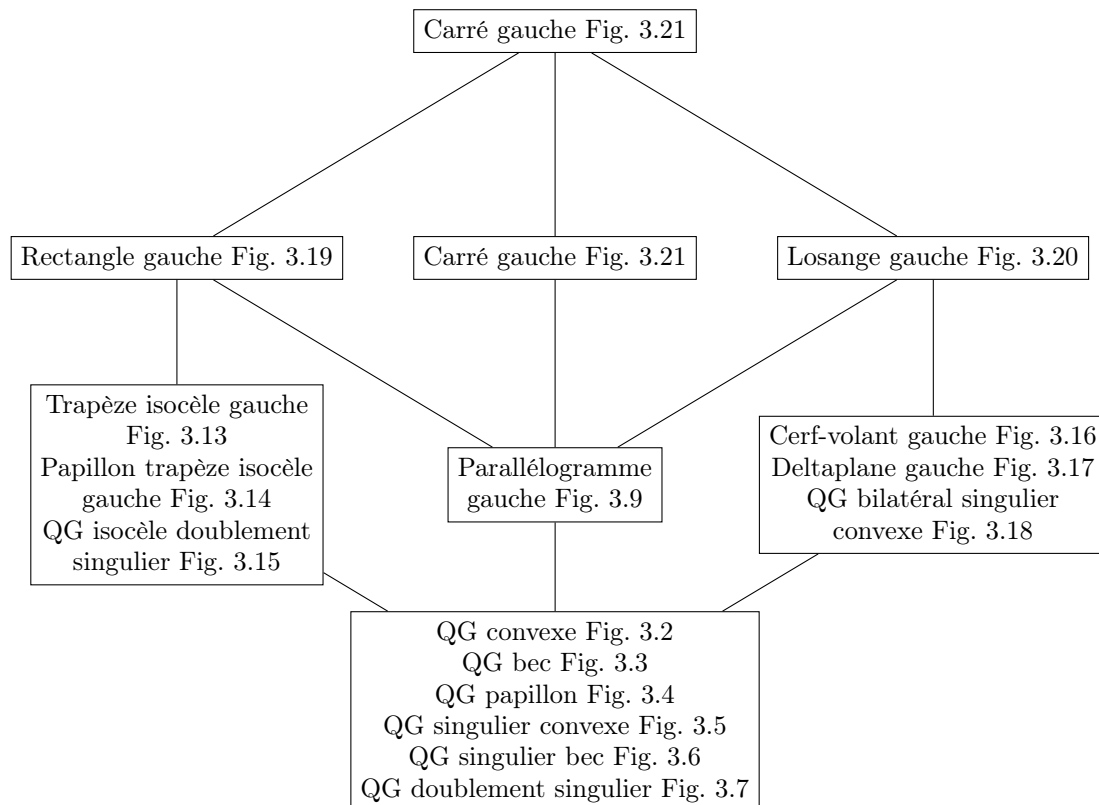


4.2.2 Par des noms



4.2.3 Par des figures

Dans le tableau ci-dessous nous reprenons les numéros des figures correspondantes des QG. Les numéros sont des liens vers les figures citées.



Annexe A

Une interprétation du critère d'appartenance pour les quadrilatères plans (QP)

A.1 Rappels et notations

Etant donné un quadrilatère plan $1'2'3'4'$ nous désignons :

- par diagonale un segment diagonal noté $[1'3']$ ou $[2'4']$,
- par droite diagonale, la droite-support d'une diagonale notée $(1'3')$ ou $(2'4')$,
- par p_0 , le point d'intersection des droites diagonales.

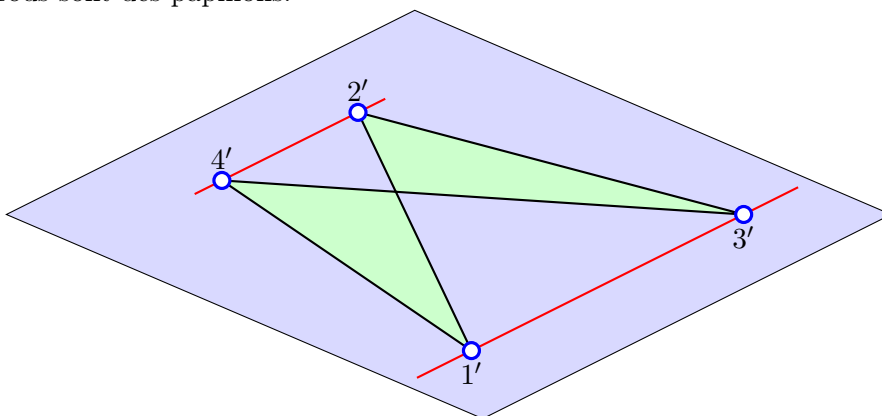
Définitions extraites de l'article « Classification objective des quadrilatères », § 5.4.1, 5.4.2.1 et 5.4.2.2 (Réf. [3]) :

- Un quadrilatère plan est convexe si et seulement si ses diagonales ont un point commun.
- Un quadrilatère plan est papillon si et seulement si deux côtés opposés ont un point commun.
- Un quadrilatère plan est bec si et seulement s'il n'est ni convexe, ni papillon.

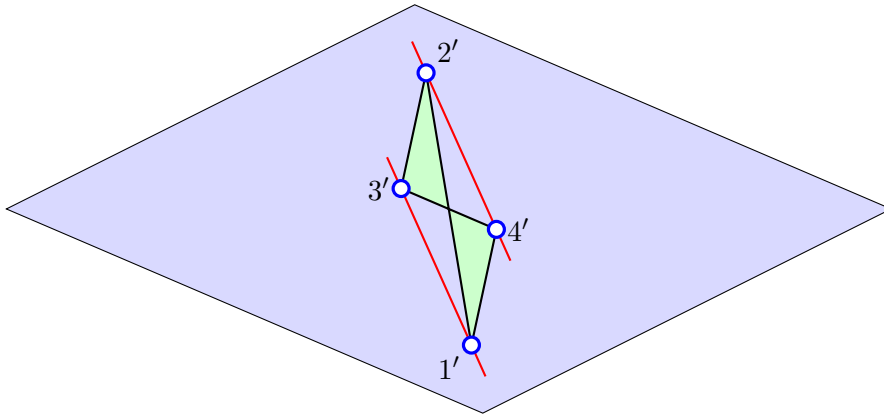
A.2 Diagonales des QP

— QP à diagonales parallèles

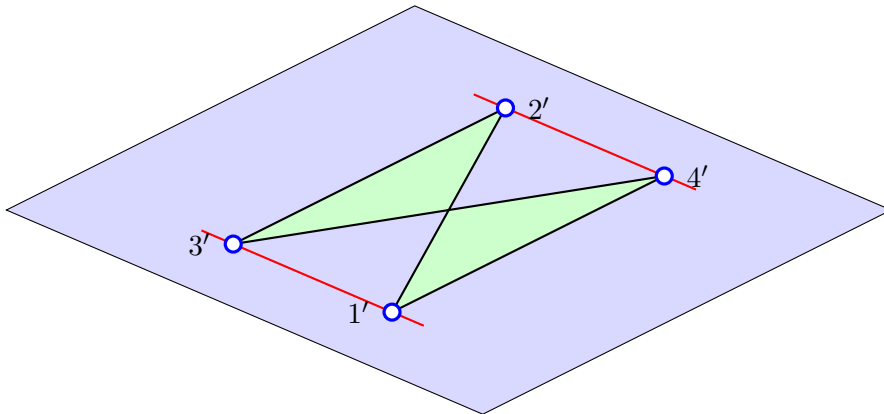
Certains QP ont des diagonales parallèles ; il s'agit des papillons trapèzes isocèles à diagonales parallèles et de leurs cas particuliers les papillons parallélogrammes et les papillons rectangles. Tous sont des papillons.



QP *papillon* à diagonales parallèles (cas général)



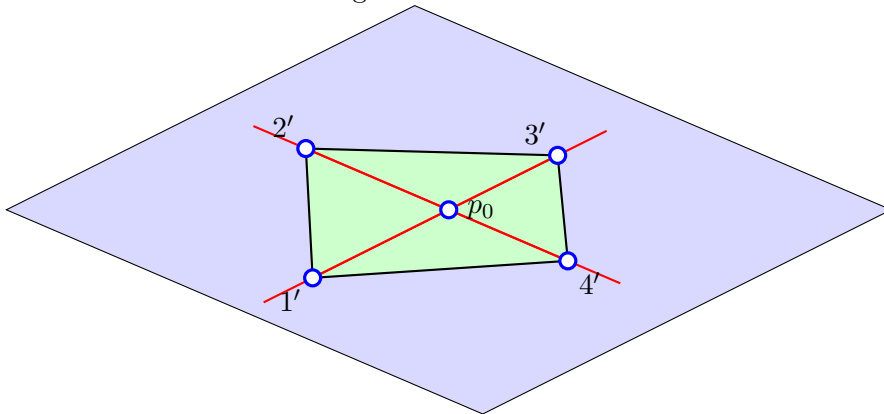
QP *papillon parallélogramme* à diagonales parallèles



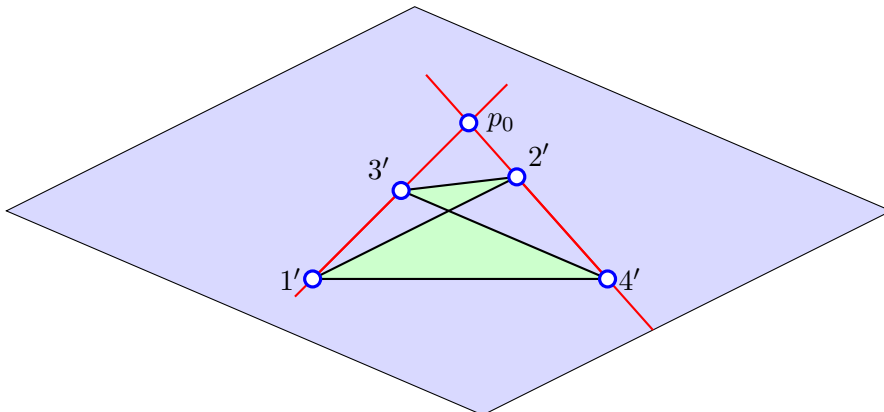
QP *papillon rectangle* à diagonales parallèles

— QP à droites diagonales sécantes

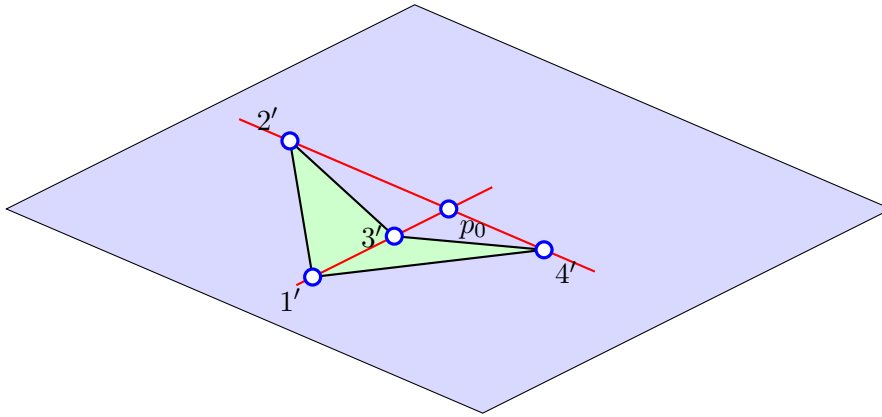
Certains ont des droites diagonales sécantes. Dans ce cas nous nous intéressons au point p_0 d'intersection des droites diagonales.



QP *convexe* dont les diagonales se coupent en p_0



QP *papillon* dont les diagonales se coupent en p_0

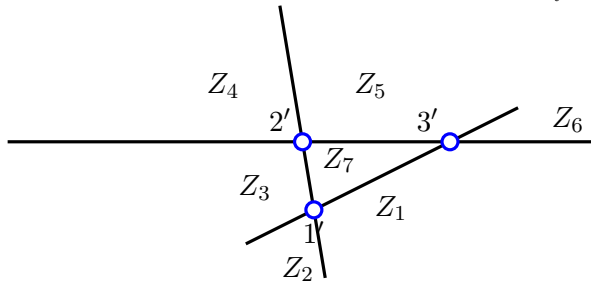


QP *bec* dont les diagonales se coupent en p_0

Quand le quadrilatère plan est plongé dans E^3 , il pourrait être considéré comme un cas limite de QG. Alors, ce point p_0 pourrait être considéré comme pieds confondus de la perpendiculaire commune aux droites diagonales. Que devient alors, dans le cas d'un quadrilatère plan, le critère d'appartenance aux segments diagonaux d'un QG ? Il s'agit, pour un QP, de situer le point p_0 par rapport aux diagonales du quadrilatère plan. Nous noterons \in quand p_0 appartient à une diagonale et \notin quand p_0 n'appartient pas à une diagonale.

A.3 Les zones du plan déterminées par les droites $(1'2')$, $(1'3')$, $(2'3')$

Soit un quadrilatère plan $1'2'3'4'$ dont les droites diagonales sont sécantes. Les sommets $1'$, $2'$ et $3'$ forment un triangle dont les droites-supports des côtés déterminent 7 zones (ouvertes) où placer le sommet $4'$. Sur le dessin suivant une zone est notée Z_i où $i = 1 \dots 7$.

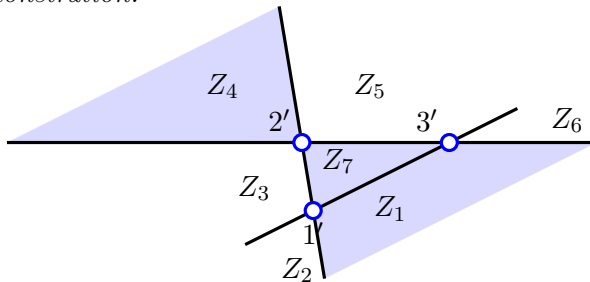


Les sept zones du plan déterminées par les points $1', 2', 3'$.

A.4 Propriétés d'appartenance selon les zones

Lemme 34. Une droite passant par le point $2'$ coupe le segment $[1'3']$ si et seulement si tous ses points sont dans les zones Z_1 , Z_4 et Z_7 .

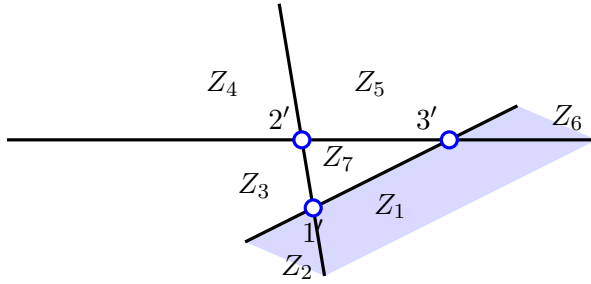
Démonstration.



Un point p appartient au segment $[1'3']$ si et seulement si le segment $[2'p]$ est inclus dans le triangle $1'2'3'$. La droite $(2'p)$ passe dans le secteur angulaire de l'angle $1'2'3'$ correspondant aux zones Z_1 et Z_7 et dans le secteur Z_4 de l'angle opposé par le sommet. \square

Lemme 35. Le point p_0 appartient au segment $[2'4']$ si et seulement si le point $4'$ est dans une des zones Z_1 , Z_2 ou Z_6 .

Démonstration.

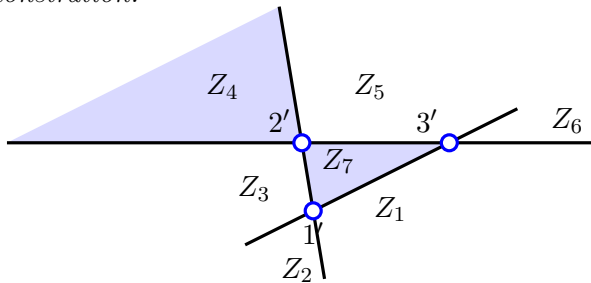


Si $4'$ appartient à une des zones Z_1, Z_2 ou Z_6 , les points $2'$ et $4'$ ne sont pas dans le même demi-plan déterminé par la droite $(1'3')$. Il en résulte que p_0 est situé entre les points $2'$ et $4'$.

Si $4'$ n'appartient à aucune des zones Z_1, Z_2 ou Z_6 , les points $4'$ et $2'$ sont dans le même demi-plan déterminé par $(1'3')$. Il en résulte que la droite $(1'3')$ ne coupe pas le segment $[2'4']$. \square

Lemme 36. *Le point p_0 appartient au segment $[1'3']$ et n'appartient pas au segment $[2'4']$ si et seulement si $4'$ est dans les zones Z_4 ou Z_7 .*

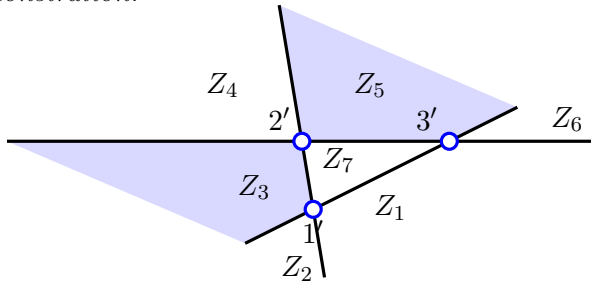
Démonstration.



Conséquence des lemmes 34 et 35. \square

Lemme 37. *Le point p_0 n'appartient ni à $[1'3']$, ni à $[2'4']$ si et seulement si le point $4'$ est dans les zones Z_3 ou Z_5 .*

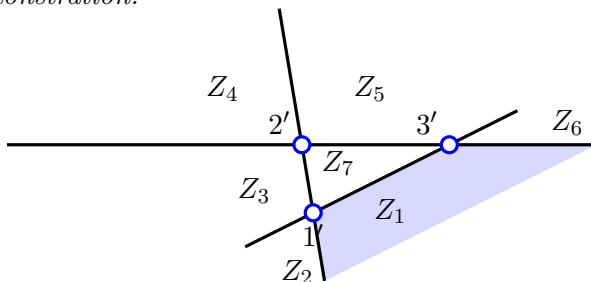
Démonstration.



Conséquence des lemmes 34 et 35. \square

Lemme 38. *Le point p_0 appartient au segment $[1'3']$ et au segment $[2'4']$ si et seulement si le point $4'$ est dans la zone Z_1 .*

Démonstration.



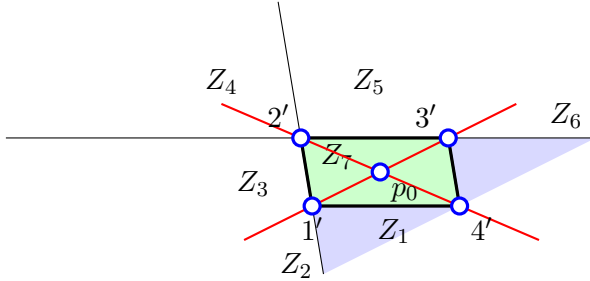
Conséquence des lemmes 34 et 35. \square

Conclusions : Pour un quadrilatère plan dont les diagonales sont sécantes :

- Le point $4'$ appartient à la zone Z_1 si et seulement si le type est $\in\in$.
- Le point $4'$ appartient aux zones Z_3 ou Z_5 si et seulement si le type est $\notin\notin$.
- Le point $4'$ appartient aux zones Z_2, Z_4, Z_6 ou Z_7 si et seulement si le type est $\in\notin$ ou $\notin\in$ (ces deux derniers types sont équivalents étant donné le rôle symétrique des sommets $1'$ et $3'$).

Examinons ces trois types.

type $\in\in$: $p_0 \in [1'3']$ et $p_0 \in [2'4']$



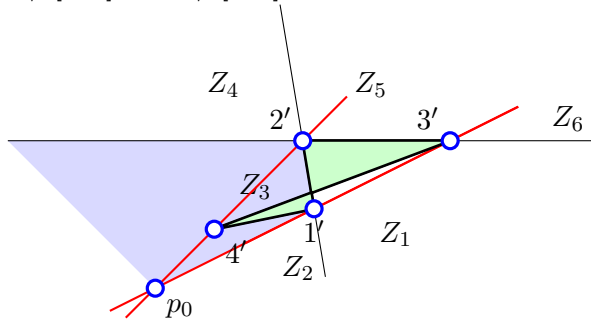
Le point $4'$ appartient à la zone Z_1 .

Théorème 10. *Tout QP dont les diagonales sont sécantes et du type $\in\in$ est convexe, et réciproquement.*

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la définition (Voir section 2.4.1 définition 4) de quadrilatère convexe et du lemme 38. □

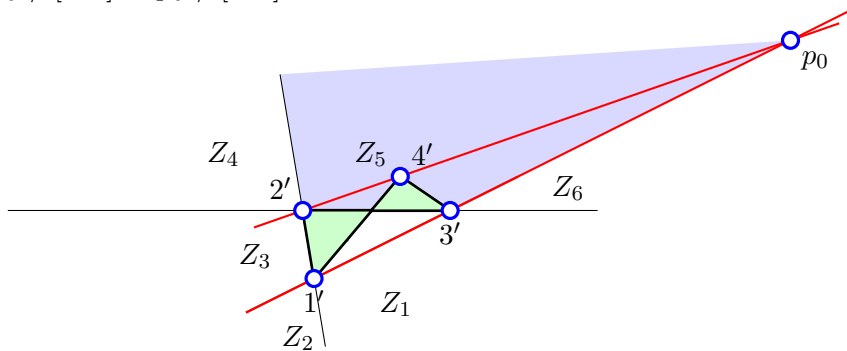
type $\notin\notin$:

(i) : $p_0 \notin [1'3']$ et $p_0 \notin [2'4']$



Le sommet $4'$ appartient à la zone Z_3 .

(ii) : $p_0 \notin [1'3']$ et $p_0 \notin [2'4']$



Le sommet $4'$ appartient à la zone Z_5 .

Théorème 11. *Tout QP à droites diagonales sécantes et de type $\notin\notin$ est un papillon.*

Démonstration. Nous savons par les conclusions des lemmes de la section A.4 que pour un quadrilatère dont les diagonales sont sécantes, le type $\notin\notin$ correspond à un sommet $4'$ situé dans une des zones Z_3 ou Z_5 .

- Si le point $4'$ est dans la zone Z_3 , les sommets $3'$ et $4'$ ne sont pas dans le même demi-plan déterminé par la droite $(1'2')$. La demi-droite issue du sommet $3'$ du triangle $1'2'3'$ et passant par $4'$ coupe le côté $[1'2']$ opposé à $3'$ en un point de $[3'4']$. Par définition le quadrilatère $1'2'3'4'$ est donc un papillon.
- Le même raisonnement s'applique à la zone Z_5 puisque les rôles de $1'$ et $3'$ peuvent s'inverser. \square

Théorème 12. *Tout QP papillon à droites diagonales sécantes est du type \notin .*

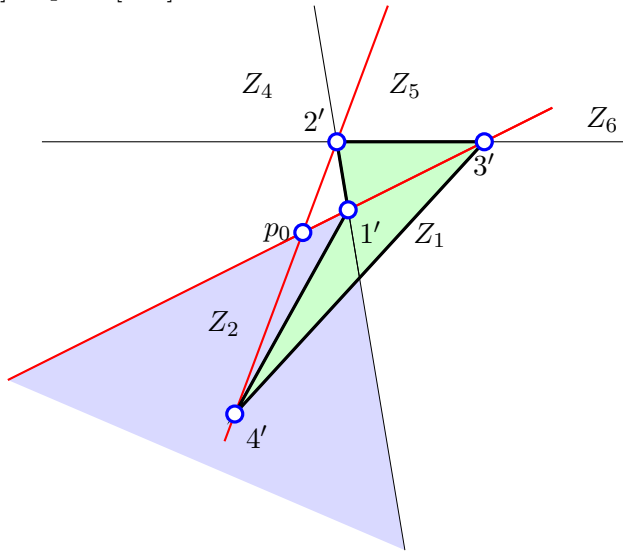
Démonstration. Par définition, nous savons que deux côtés opposés du quadrilatère se coupent, supposons que $[1'2'] \cap [3'4'] = \{p\}$. Les sommets $3'$ et $4'$ sont alors situés de part et d'autre de la droite $(1'2')$ et $4'$ appartient à la demi-droite issue de $3'$ et passant par p . Il s'ensuit que $4'$ est dans la zone Z_3 et par le lemme 35 que le type est \notin .

Le même raisonnement s'applique si on suppose que $[1'4'] \cap [2'3'] = \{p\}$, le sommet $4'$ est alors dans la zone Z_5 . \square

Remarque : Pour un papillon à diagonales parallèles, le point p_0 n'existant pas, il est tentant de dire qu'il n'appartient à aucune des diagonales et que le type est aussi \notin . Nous pourrions alors redéfinir un papillon à partir du critère diagonal.

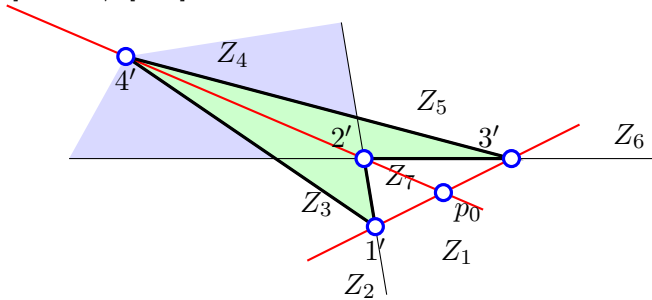
Le type $\in \notin$

(i) : $p_0 \notin [1'3']$ et $p_0 \in [2'4']$



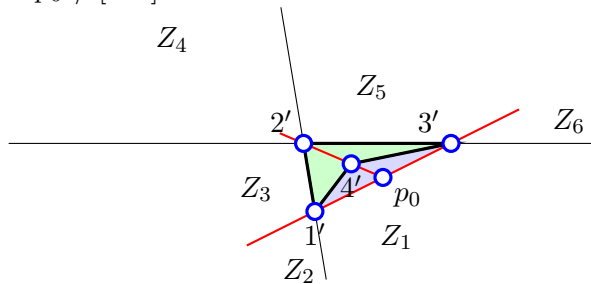
Le sommet $4'$ appartient à la zone Z_2 et le QP $1'2'3'4'$ est un bec.

(ii) : $p_0 \in [1'3']$ et $p_0 \notin [2'4']$



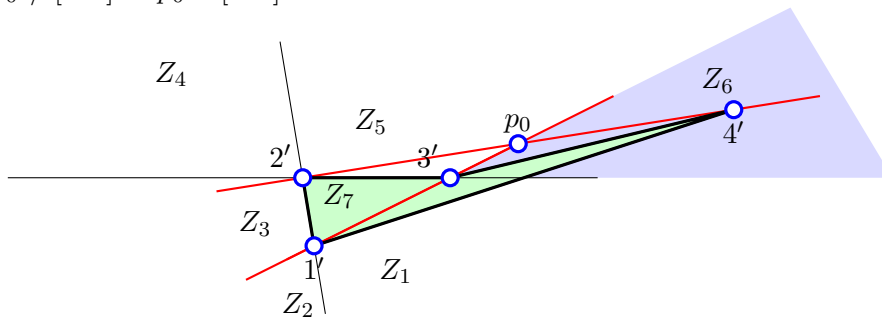
Le sommet $4'$ appartient à la zone Z_4 et le QP $1'2'3'4'$ est un bec.

(iii) : $p_0 \in [1'3']$ et $p_0 \notin [2'4']$



Le sommet $4'$ appartient à la zone Z_7 et le QP $1'2'3'4'$ est un bec.

(iv) : $p_0 \notin [1'3']$ et $p_0 \in [2'4']$



Le sommet $4'$ appartient à la zone Z_6 et le QP $1'2'3'4'$ est un bec.

Théorème 13. *Tout QP dont les droites diagonales sont sécantes et du type $\in\neq$ est un bec, et réciproquement.*

Démonstration. Si un QP est du type $\in\neq$, il ne peut être

- ni convexe (voir annexe A.4 , théorème 10),
- ni papillon (voir annexe A.4 , théorème 12).

Il est donc nécessairement bec (voir dossier « Classification objective des quadrilatères », définition 5.4.2.2, Réf. [3]).

Réciproquement :

Si un QP est bec il ne peut être :

- ni convexe, donc pas du type $\in\in$ (voir annexe A.4 , théorème 10),
- ni papillon, donc pas du type $\notin\neq$ (voir annexe A.4 , théorème 11).

Il est donc du type $\in\neq$, puisque par hypothèse les droites diagonales se coupent. □

Remarque : le critère des diagonales peut servir à définir un bec.

A.5 Définitions modifiées ou caractérisation

Les théorèmes que nous venons de démontrer permettent de modifier des définitions antérieures.

Définition 16. *Un quadrilatère plan est convexe si et seulement si ses diagonales se coupent (section 2.4.1, définition 4).*

Alternative :

Un quadrilatère plan est convexe s'il est du type $\in\in$.

Définition 17. *Un quadrilatère plan est un bec si et seulement si ses droites diagonales se coupent en un point appartenant à une des diagonales et pas à l'autre (section 2.4.2, définition 5).*

Alternative :

Un quadrilatère plan est un bec s'il est du type $\in\neq$.

Définition 18. *Un quadrilatère plan est un papillon si et seulement si ses droites diagonales sont parallèles ou se coupent en un point n'appartenant à aucune de ses diagonales (section 2.4.3, définition 6).*

Alternative :

Un quadrilatère plan est un papillon s'il est du type $\notin\neq$.

Remarque : Les diagonales d'un QG ne sont jamais ni parallèles, ni sécantes ! En effet cela impliquerait que les sommets du QG sont dans le plan des diagonales.

Annexe B

Le cas des quasi-quadrilatères plans

Dans la section 2.4.4, nous avons constaté que la projection privilégiée d'un quadrilatère gauche n'est pas toujours un quadrilatère plan. Nous avons donc introduit la notion de quasi-quadrilatère plan (QQP) non QP. La projection de tout QG dont le type comprend le signe \equiv est un QQP dont trois sommets sont alignés. Le symbole \equiv pour un QQP signifie qu'un de ses sommets est confondu avec le point p_0 .

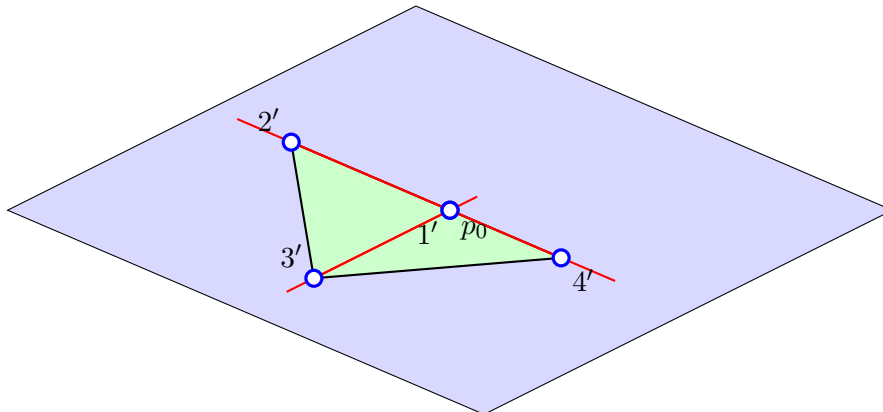
La section A.4 nous indique dans quelle zone placer le sommet $4'$ d'un quadrilatère $1'2'3'4'$ pour obtenir un quadrilatère plan convexe, papillon ou bec.

Mais qu'obtient-on si le sommet $4'$ est aligné avec deux autres sommets ?

Trois types sont possibles :

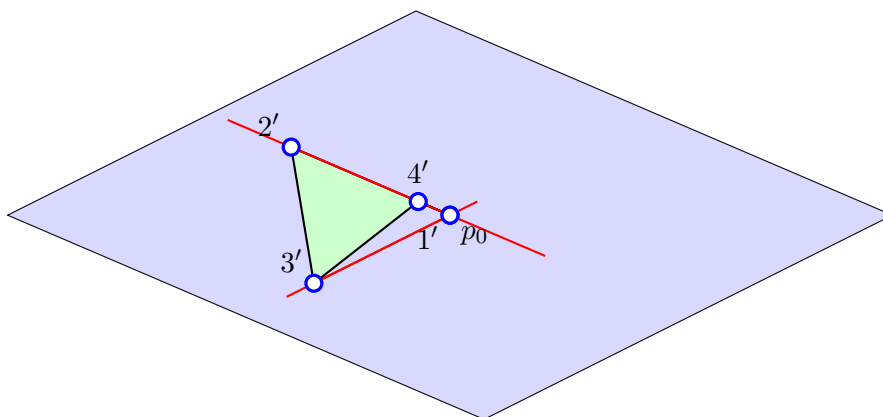
le type $\equiv\in$: $p_0 = 1'$ et $p_0 \in]2', 4' [$

Le sommet $4'$ appartient à la droite $(1'2')$ et est situé à l'extérieur du segment $[1', 2']$.



Le quadrilatère $1'2'3'4'$ est un QQP convexe.

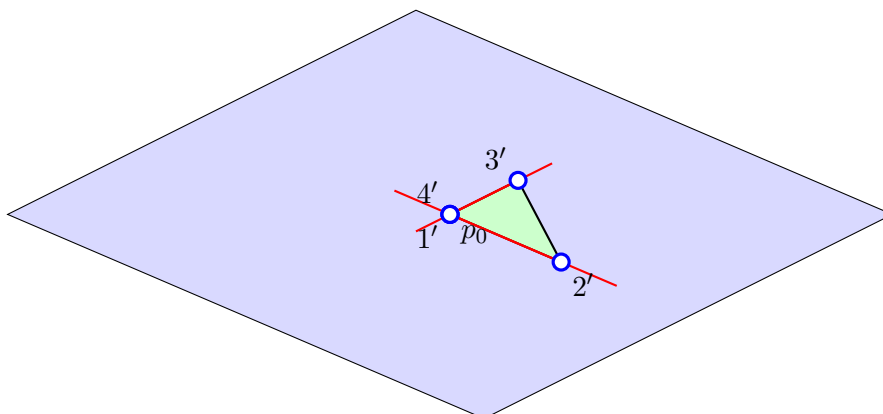
le type $\equiv \notin$: $p_0 = 1'$ et $p_0^{***} \in (2'4') \setminus [2', 4']$ (***)à vérifier. La feuille d'AG indique $p_0 \in]2', 4'[$)
 Le sommet $4'$ appartient au segment ouvert $]1', 2'[$.



Le quadrilatère $1'2'3'4'$ est un QQP bec.

le cas $\equiv \equiv$: $p_0 = 1' = 4'$

Le sommet $4'$ est confondu avec le sommet $1'$.



Le quadrilatère $1'2'3'4'$ est un QQP à sommet double.

Glossaire

Antirotation Une *antirotation* est la composée d'une symétrie bilatérale μ et d'une rotation ρ d'axe perpendiculaire à l'axe de μ , $\rho \neq I$ et $\rho \neq \frac{1}{2}$ tour.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 2.6, définition 10 (Réf. [2]).

alternativement

Une *antirotation* est la composée d'une symétrie centrée σ et d'une rotation ρ' d'axe passant par le centre de σ , $\rho' \neq I$ et $\rho' \neq \frac{1}{2}$ tour.

Ces deux définitions sont équivalentes.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 2.6, définition 11 (Réf. [2]).

Automorphisme combinatoire d'un QG Un *automorphisme combinatoire d'un QG* 1234 est une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ des sommets de Q.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 1.3 (Réf. [2]).

Automorphisme d'un QG Un *automorphisme d'un QG* est une isométrie de E^3 qui laisse ce QG invariant.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 1.3 (Réf. [2]).

Axe de symétrie Soit α une isométrie non identique de E^3 . Un *axe de symétrie* de α noté Axe α est l'ensemble des points fixes de α . L'ensemble Axe α peut être un point, une droite ou un plan.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 1.4 (Réf. [2]).

Bidroite Une *bidroite* est l'ensemble formé par deux droites gauches.

Consulter le dossier « Bidroites » (Réf. [1]).

Centre d'un QG Le *centre* o d'un QG est le centre de la bidroite de ses diagonales. Il se situe au milieu du segment $[p_{13}, p_{24}]$ joignant les pieds de la perpendiculaire commune aux deux diagonales du QG.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 2.2 (Réf. [2]).

Centre de gravité d'un tétraèdre Le *centre de gravité du tétraèdre* 1234 dont les points 1, 2, 3 et 4 sont supposés de masses identiques est le point c obtenu par la construction suivante : Les masses en 1 et en 3 se remplacent par une masse double en m , milieu de $[1, 3]$. Les masses en 2 et en 4 se remplacent par une masse double en n , milieu de $[2, 4]$. Les doubles masses en m et n se remplacent par une masse quadruple en c , milieu de $[m, n]$.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 2.1 (Réf. [2]).

Diagonale d'un QG Une *diagonale d'un QG* est un segment de droite fermé joignant deux sommets opposés du QG, par exemple les sommets 1 et 3 et est notée $[1, 3]$.

Voir section 2.4.

Droite diagonale d'un QG Une *droite diagonale d'un QG* est une droite joignant deux sommets opposés, par exemple les sommets 1 et 3 et est notée (13).

Voir section 2.4.

- Médiane d'un QG** Une *médiane* d'un quadrilatère est le segment joignant les milieux de deux côtés opposés de ce quadrilatère.
Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 2.1 (Réf. [2]).
- Orbite d'un point p d'un espace E sous l'action d'un groupe G de transformations de E**
L'*orbite* de p sous l'action de G est l'ensemble des transformés $g(p)$ où g parcourt G . Il se dit aussi que $\{g(p) \in E \text{ tel que } g \in G\}$ est une *orbite* de G .
Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.1 (Réf. [2]).
- Projection privilégiée d'un QG** La *projection privilégiée d'un QG* est une projection sur un quelconque plan parallèle à la feuille du squelette et parallèlement à la perpendiculaire commune aux droites diagonales (13) et (24).
Pour simplifier la droite $(p_{13}p_{24})$ sera appelée la droite rouge R . La projection privilégiée est donc une projection orthogonale. Elle enrichit le squelette d'une projection privilégiée.
Voir section 1.2, définition 1.
- QG bec** Un *QG bec* est un QG de type \notin .
Voir section 3.1.
- QG bilatéral** Un *quadrilatère gauche bilatéral* est un QG conservé par un automorphisme combinatoire $(1)(3)(2,4)$ ou $(2)(4)(1,3)$.
Un QG bilatéral est un QG conservé par une symétrie bilatérale dont l'axe est un plan défini par la droite R et une des diagonales du QG.
Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.2.3 (Réf. [2]).
- QG bilatéral singulier convexe** Un *QG bilatéral singulier convexe* est un QG bilatéral de type \equiv .
Voir section 3.2.3.
- QG carré ou carré gauche** Un *carré gauche* est un QG conservé par chacun des automorphismes combinatoires de Z_4 : $(1,2,3,4)$, $(1,4,3,2)$, $(1,3)(2,4)$ et $(1)(2)(3)(4)$.
Un *carré gauche* est un quadrilatère gauche possédant les symétries de Z_4 (deux antirotations, un demi-tour et l'identité).
Le carré gauche est de type $\in\in$.
Voir section 3.3, lemme 32.
- QG cerf-volant ou Cerf-volant gauche** Un *cerf-volant gauche* est un QG bilatéral de type $\in\in$.
Voir section 3.2.3.
- QG convexe** Un *QG convexe* est un QG de type $\in\in$.
Voir section 3.1.
- QG deltaplane ou deltaplane gauche** Un *deltaplane gauche* est un QG bilatéral de type \notin .
Voir section 3.2.3.
- QG doublement singulier** Un *QG doublement singulier* est un QG de type \equiv .
Voir section 3.1.
- QG isocèle** Un *QG isocèle* est un quadrilatère gauche conservé par un automorphisme combinatoire $(1,2)(3,4)$.
Un *quadrilatère gauche isocèle* est un QG conservé par un demi-tour dont l'axe passe par les milieux de deux côtés opposés.
Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.2.1 (Réf. [2]).
- QG isocèle doublement singulier** Un *QG isocèle doublement singulier* est un QG isocèle de type \equiv .
Voir section 3.2.2.
- QG losange ou losange gauche** Un *losange gauche* est un QG conservé par chacun des automorphismes combinatoires $(1)(3)(2,4)$, $(1,3)(2)(4)$ et $(1,3)(2,4)$.
Un *losange gauche* est un QG conservé par deux symétries bilatérales dont les axes sont deux

plans perpendiculaires. Il est de type $\in\in$.

Voir section 3.3 lemme 32.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.2 (Réf. [2]).

QG papillon Un *QG papillon* est un QG de type $\notin\in$. Voir section 3.1.

QG papillon trapèze isocèle gauche Un *papillon trapèze isocèle gauche* est un QG de type $\notin\in$.

Voir section 3.2.2.

QG parallélogramme ou parallélogramme gauche Un *parallélogramme gauche* est un QG conservé par l'automorphisme combinatoire $(1, 3)(2, 4)$.

Un *parallélogramme gauche* est un QG conservé par un demi-tour dont l'axe est la perpendiculaire commune à ses diagonales. Il est de type $\in\in$.

Voir section 3.3 lemme 32.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.2.2, définition 2 (Réf. [2]).

QG ou QG quelconque Nous invoquons souvent un *QG quelconque* pour indiquer tout QG ou bien pour nous restreindre au QG dont le sous-groupe est l'identité.

Un quadrilatère gauche quelconque est un quadrilatère gauche dont le groupe d'automorphismes contient le sous-groupe I d'ordre 1. Tout QG est un QG quelconque.

Quadrilatères de l'espace euclidien possédant quatre sommets qui engendrent l'espace.

Un *quadrilatère gauche* est un quadrilatère dont les 4 sommets ne sont pas contenus dans un même plan. Il suffit pour cela qu'il existe deux côtés opposés qui ne soient pas dans un même plan.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.1 (Réf. [2]).

QG rectangle ou rectangle gauche Un *rectangle gauche* est un QG conservé par chacun des automorphismes combinatoires $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 4)(2, 3)$ et $(1, 3)(2, 4)$ alternativement

Un rectangle gauche est un QG conservé par trois rotations d'un demi-tour dont les axes sont deux à deux perpendiculaires en un même point. Il est de type $\in\in$.

Voir section 3.3 lemme 32.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.1 définition 5 (Réf. [2]).

QG singulier bec Un *QG singulier bec* est un QG de type $\notin\equiv$.

Voir section 3.1.

QG singulier convexe Un *QG singulier convexe* est un QG de type $\in\equiv$.

Voir section 3.1.

QG trapèze ou trapèze isocèle gauche Un *trapèze isocèle gauche* est un QG de type $\in\in$.

Voir section 3.2.2.

QP bec Un quadrilatère plan est un bec si et seulement si ses droites diagonales se coupent en un point appartenant à une diagonale et pas à l'autre.

Voir section 2.4.2, définition 5.

alternativement

Un quadrilatère plan est un bec s'il est du type $\in\notin$.

Voir section A.5 définition 17.

QP convexe Un quadrilatère plan est convexe ssi ses diagonales (les segments fermés) se coupent.

Voir section 2.4.1, définition 4.

alternativement

Un quadrilatère plan est convexe s'il est de type $\in\in$.

Voir section A.5 définition 16.

- QP papillon** Un quadrilatère plan est un papillon si et seulement si ses diagonales (les segments fermés) ne se coupent pas.
Voir section 2.4.3, définition 6.
alternativement
Un quadrilatère plan est un papillon s'il est du type \notin .
Voir section A.5 définition 18.
- Quadrilatère combinatoire** Un *quadrilatère combinatoire* (QC) comprend quatre objets distincts nommés sommets (1, 2, 3, 4) et quatre objets distincts nommés côtés (A, B, C, D) unis par une relation d'incidence telle que tout sommet est incident à deux côtés, tout côté est incident à deux sommets, le sommet 1 est voisin ou adjacent des sommets 2 et 4, etc.
Voir section 2.4.4 définition 7.
- Quadrilatère plan** Un *quadrilatère plan* (QP) est un QC dont les sommets sont des points distincts du plan, les côtés sont des segments fermés dont les extrémités sont des sommets et l'incidence d'un sommet s et d'un côté C est le fait que s soit une extrémité de C . En outre trois sommets ne peuvent être alignés.
Voir section 2.4.4 définition 9.
- Quasi-quadrilatère combinatoire** Un *quasi-quadrilatère combinatoire* (QQC) est un quadruple d'objets non nécessairement distincts nommés sommets (1, 2, 3, 4) et un quadruple d'objets non nécessairement distincts nommés côtés (A, B, C, D) unis par une relation d'incidence telle que tout sommet est incident à deux côtés, tout côté est incident à tout sommet, le sommet 1 est voisin des sommets 2 et 4, etc.
Voir section 2.4.4 définition 8.
- Quasi-quadrilatère plan** Un *quasi-quadrilatère plan* (QQP) est un QQC dont les sommets sont des points du plan, les côtés sont des segments fermés dont les extrémités sont des sommets et l'incidence d'un sommet s et d'un côté C est le fait que s soit une extrémité de C .
Voir section 2.4.4 définition 10.
- Quasi-quadrilatère plan à sommet double** Un *quasi-quadrilatère plan* (QQP) est dit à *sommet double* quand un sommet est confondu avec l'un des trois autres sommets.
Voir section 2.4.7 définition 13 .
- Quasi-quadrilatère plan bec** Un quasi-quadrilatère plan (QQP) est dit *bec* quand ses droites diagonales se coupent en un point d'une des diagonales et à l'extérieur de l'autre diagonale (segments fermés).
Voir section 2.4.6 définition 12.
- QQP bilatéral** Nous disons d'un quasi-quadrilatère plan qu'il est *bilatéral* s'il possède deux paires de côtés consécutifs isométriques.
Voir section 3.2.3, définition 15
- Quasi-quadrilatère plan convexe** Un quasi-quadrilatère plan (QQP) est dit convexe quand ses diagonales (segments fermés) se coupent en un point situé strictement à l'intérieur d'au moins l'une d'elles.
Voir section 2.4.5 définition 11.
- QQP isocèle** Nous disons d'un quasi-quadrilatère plan qu'il est *isocèle* s'il possède deux côtés opposés isométriques.
Voir section 3.2.2, définition 14.
- Revêtement d'un QQP** Un revêtement d'un QQP est un QG obtenu comme suit.
Soit un QQP $1'2'3'4'$ situé dans un plan ϕ , deux plans ϕ' et ϕ'' strictement parallèles à ϕ et les droites p_1, p_2, p_3, p_4 perpendiculaires à ϕ respectivement par $1', 2', 3', 4'$. Un revêtement du QQP $1'2'3'4'$ est un QG 1234 où 1 et 3 sont les points de percée de P_1 et P_3 dans ϕ' et 2 et 4 les points de percée de P_2 et P_4 dans ϕ'' .
Voir section 2 définition 2.
- Rotation spatiale** Une *rotation spatiale* est un déplacement de E^3 admettant une droite de points fixes appelée axe de rotation. Rappelons le théorème *Tout déplacement de E^3 fixant un point est une rotation*

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 5.1, théorème 11 (Réf. [2]).

Sommets opposés Tout sommet s d'un QG possède un *sommet opposé* noté $opp(s)$ qui n'est pas adjacent à s .

Voir chapitre 2 définition 3.

Squelette d'un QG Tout QG possède un *squelette* :

1. le centre de gravité c ,
2. l'axe-droite mn , où m et n sont les milieux des segments diagonaux
3. l'axe-plan π , plan perpendiculaire à mn par le point c ,
4. la bidroite des diagonales 13 et 24, leur perpendiculaire commune R et le centre o de la bidroite que nous appelons centre du quadrilatère gauche,
5. les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux deux diagonales du quadrilatère gauche.

Consulter le dossier *Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8* : Réf. [2], section 2.2.

Symétrie bilatérale ou orthogonale de E^3 Une *symétrie bilatérale* orthogonale de E^3 est une isométrie de E^3 déterminée par un axe-plan Π et comprenant l'ensemble des couples (x, x') de points de E^3 tels que Π est le plan médiateur du segment $[x, x']$.

Symétrie centrée de E^3 Une *symétrie centrée* de E^3 est une isométrie de E^3 déterminée par un axe-point c appelé centre et comprenant l'ensemble des couples (x, x') de points de E^3 tels que c est le milieu du segment $[x, x']$.

Symétrie glissée Une *symétrie glissée* est la composée d'une symétrie bilatérale et d'une translation parallèle à l'axe de symétrie.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 3.3.1 (Réf. [2]).

Types de QG selon le critère des segments diagonaux : voir la section 2.3.

1. **Le type $\in\in$** : les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG sont à l'intérieur des segments diagonaux (cas i).
2. **Le type $\in\notin$** : un des pieds p_{13} ou p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG est à l'intérieur d'un segment diagonal et l'autre à l'extérieur du deuxième segment diagonal (cas c, g).
3. **Le type $\notin\notin$** : les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG sont à l'extérieur des segments diagonaux (cas a).
4. **Le type $\equiv\in$** : un des pieds p_{13} ou p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG est à l'extrémité d'un segment diagonal et l'autre à l'intérieur du deuxième segment diagonal (cas f, h).
5. **Le type $\equiv\notin$** : un des pieds p_{13} ou p_{24} est à l'extrémité d'un segment diagonal et l'autre à l'extérieur du deuxième segment diagonal (cas b, d).
6. **Le type $\equiv\equiv$** : les pieds p_{13} et p_{24} de la perpendiculaire commune aux droites diagonales du QG sont à une extrémité des segments diagonaux (cas e).

Vissage Un *vissage* est la composée d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe de rotation.

Consulter le dossier « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 », section 5.2, lemme 25 (Réf. [2]).

Bibliographie

- [1] Francis BUEKENHOUT et al. « Bidroites ». In : *Mathématique et Pédagogie* 165 (2007). Liste complète des auteurs : Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER., p. 31–40.
- [2] Francis BUEKENHOUT et al. « Classification des quadrilatères gauches par les sous-groupes de D_8 ». Cet article est soumis à publication. Liste complète des auteurs : Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER. 44 pages. 2013.
- [3] Francis BUEKENHOUT et al. « Classification objective des quadrilatères ». In : *Mathématique et Pédagogie* (mai 2008). Liste complète des auteurs : Charlotte BOUCKAERT, Francis BUEKENHOUT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS et Jacqueline SENGIER., p. 5–35.
- [4] Guy NOËL et Yolande NOËL. « Le théorème de Varignon (1) ». In : *Losanges* 10 (oct. 2010), p. 40–44.