**PROBLEMATHS**
26 mars 2013

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

**Solution du Problemath 10**.
Etant donné que chaque kilomètre parcouru par la voiture contribue à l'usure simultanée de 4 pneus, qu'on dispose en tout de 7 pneus et que chaque pneu ne peut rouler que 20.000 km, la voiture ne pourra pas parcourir plus de 20.000 x 7/4=35.000 km. Il reste à montrer qu'elle peut effectivement parcourir cette distance. Numérotons les 7 pneus à l'aide des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ des entiers modulo 7. Si on change de pneus tous les 5000 km en équipant la voiture successivement des 4 pneus $i,\ i+1,\ i+2,\ i+3$, où $i \in \mathbb{Z}_7$, le tour est joué, comme on le vérifie facilement (et on ne doit changer qu'un seul pneu à chacun des 6 arrêts). La solution ci-dessus se généralise immédiatement au cas d'un véhicule à $r$ roues, disposant de $p$ pneus neufs pouvant rouler chacun au plus $k$ kilomètres : la distance maximum est alors $pk/r$ kilomètres. Certains fanatiques du cric ont proposé une solution correcte nécessitant toutefois un changement de pneus tous les 1000 km, en équipant successivement la voiture des 35 combinaisons de 4 pneus pris parmi les 7.
**Ont fourni une solution correcte** : A. VANDENSCHRICK (BA1 maths), J. REMY (BA2 maths à la VUB), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), P. DE GROEN (prof à la VUB), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), A. WAJNBERG(journaliste scientifique), Dark Vador, Fantomath et Lady Belmath.

**Solution du Problemath 11**.
Posons $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$. Comme $x_i \in [0, 1]$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $f(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |-x_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $f(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |1 - x_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \frac{1}{n}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i) = 1 - f(0)$, de sorte que $f(0) + f(1) = 1$. Si $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, les nombres 0 et 1 vérifient la condition de l'énoncé. Sinon, $\frac{1}{2}$ est strictement compris entre $f(0)$ et $f(1)$; par le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à la fonction continue $f$, il existe un nombre réel $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$.
**Ont fourni une solution correcte** : A. VANDENSCHRICK (BA1 maths), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et Dark Vador.

**Solution du Problemath 12**.
Deux paraboles $P$ et $P^{'}$ sont toujours images l'une de l'autre par une similitude $\sigma$. Comme $\sigma$ conserve les notions d'égalité d'aires et de milieu de segment, les courbes $C$ et $C^{'}$ obtenues à partir de $P$ et $P'$ seront également images l'une de l'autre par $\sigma$. On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer que $P$ a pour équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé. Ceci étant dit, voici la solution de DARK VADOR :
Soient $t - a$ et $t + a$ les abscisses des points $p$ et $q$, de sorte que leurs coordonnées sont $(t - a,\ (t - a)^2)$ et $(t+a,\ (t+a)^2)$ respectivement et que celles du milieu $m$ de $[p, q]$ sont $(t, t^2+a^2)$. Un vulgaire Jedi calculerait l'aire $A$ de la région bornée entre $P$ et $[p, q]$ au moyen de l'équation $y = 2tx + a^2 - t^2$ de la droite $pq$, et de l'intégrale

$$A = \int_{t-a}^{t+a} (2tx + a^2 - t^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}a^3$$

Un vrai Sith ne manquera pas d'invoquer un résultat démontré par Archimède dans "La quadrature de la parabole" : l'aire du triangle ayant pour sommets $p, q$ et la projection $m'$ de $m$ sur $P$ parallèlement à l'axe de $P$ vaut $\frac{3}{4}A$. Le triangle $mm'p$ ayant une base $[m, m']$ de longueur $a^2$ et une hauteur $a$, son aire vaut $\frac{1}{2}a^3$, et de même pour le triangle $mm'q$, de sorte que $\frac{3}{4}A = a^3$. Par conséquent, si $A$ est constante, alors $a$ l'est aussi et la courbe $C$ a donc pour équation $y = x^2 + a^2$. Autrement dit, $C$ est la parabole obtenue en translatant verticalement $P$ de $a^2$.
**Ont fourni une solution correcte** : C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1

maths à l'UCL), P. DE GROEN (prof à la VUB), J.C. FISHER (prof à l'Univ. de Regina au Canada), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE, H. VERMEIREN (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. WAJNBERG (journaliste scientifique), Dark Vador, Fantomath et Lady Belmath.

**Solution du Problemath 13**.
Un tel polynôme $p(x)$ ne peut pas être constant, sinon $p(1) = p(i)$, contrairement à la condition imposée. Donc $p(x)$ est de degré $n \geq 1$. Comme $x \notin \mathbb{R}$ implique $p(x) \notin \mathbb{R}$, $p(x)$ ne peut avoir que des racines réelles, donc $p(x) = a_o(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$ où tous les $r_i$ sont réels. Si $r$ est un nombre réel différent de tous les $r_i$, alors $p(r) = a_o(r - r_1)\dots(r - r_n)$ avec $(r - r_i) \neq 0$ pour tout $i$, donc $a_0 \in \mathbb{R}$ puisque $p(r) \in \mathbb{R}$. Tous les coefficients de $r$ sont donc réels.
Si $n = 1$, alors $p(x) = a_0x+a_1$ avec $a_0, a_1$ réels et $a_0 \neq 0$: tous ces polynômes vérifient clairement la condition imposée. On va prouver que tous les degrés $n \geq 2$ sont exclus. Voici le raisonnemet court et élégant de Cédric DE GROOTE : Si $n$ est pair, il existe un réel $k$ tel que $p(x) \neq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit tel que le polynôme $p(x) - k$ n'ait aucune racine réelle. Par le théorème fondamental de l'algèbre, il a donc au moins une racine $\alpha$ complexe non réelle, d'où la contradiction puisque $p(\alpha) = k \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \notin \mathbb{R}$. Si $n$ est impair, il existe un réel $k$ suffisamment grand tel que l'équation $p(x) = k$ n'ait qu'une seule solution réelle et que celle-ci soit de multiplicité 1. Comme le polynôme $p(x) - k$ est de degré $n > 1$, il a donc au moins une racine complexe non réelle, d'où la contradiction comme ci-dessus.
**Ont fourni une solution correcte** : C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths) et Dark Vador.

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des Problemaths 2012-2013 :

- Ont résolu 13 Problemaths : N. RADU (MAT1 maths à l'UCL) et C. VAN HOOSTE (prof de maths), qui se voient attribuer le titre convoité d'Hyperproblematheur intégral non borné au sens de Schpotzermann et Wienerschnitzel.
- Ont résolu 12 Problemaths : C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths) et S. MASSON (prof de maths).
- A résolu 11 Problemaths : Dark Vador.
- A résolu 10 Problemaths : Y. SUPRIN (prof de maths).
- Ont résolu 8 Problemaths : A. VANDENSCHRICK (BA1 maths) et O. DECKERS (prof de maths).
- A résolu 7 Problemaths : P. DE GROEN (prof à la VUB).
- Ont résolu 6 Problemaths : J. REMY (BA2 maths à la VUB) et W. DE DONDER (ingénieur).
- A résolu 5 Problemaths : A. WAJNBERG(journaliste scientifique).
- Ont résolu 4 Problemaths : C. LARIVIERE (prof de maths) et la Sorcière d'Agnesi.
- Ont résolu 3 Problemaths : C. MULLER (BA1 maths), N. DELPORTE (BA2 physique), A. JAECKEL (prof de maths), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et Lama Theur.
- Ont résolu 2 Problemaths : M. TSISHYN (BA1 maths), G. GLOUSSAROV, A. MIRI (BA1 polytech), H. VERMEIREN (prof de maths), Fantomath et Lady Belmath.
- Ont résolu 1 Problemath : O. TYERS, T. HOSHINO, H.L. YANG (élèves de 5ème et de 6ème à l'International School Brussels), A. SULAIMAAN (élève de 6ème à la St Johns International School à Waterloo), L. MOUREAUX (BA1 physique), N. DWEK (BA1 polytech), M. D'ADDERIO (prof ULB), J.C. FISHER (prof Univ. Regina au Canada), P. HEINEN (prof de maths), F. DOIGNIE (ingénieur), E. KRIECKHAUS (Dépt Chair, Int. School Brussels), P. BARBIER (software engineer à Seattle) et Hilbert's hotel owner.

  Tous ces problematheurs et problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le mardi 26 mars à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus Plaine, Boulevard du Triomphe).