PROBLEMATHS
19 novembre 2012

Problemath 7

Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x)$ soit irrationnel pour tout x rationnel, et rationnel pour tout x irrationnel?

Problemath 8

Si on observe que $2 = 3^1 - 2^0$, $3 = 2^2 - 3^0$, $5 = 3^2 - 2^2$, $7 = 3^2 - 2^1$, $11 = 3^3 - 2^4$, $13 = 2^4 - 3^1$, $17 = 3^4 - 2^6$, $19 = 3^3 - 2^3$, il est tentant de conjecturer que tout nombre premier est la différence (en valeur absolue) d'une puissance de 2 et d'une puissance de 3 à exposants naturels. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse?

Problemath 9

Les coefficients d'une matrice réelle 10x10 sont des nombres naturels choisis au hasard dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Si ces choix sont indépendants, que vaut (avec 4 décimales exactes) la probabilité que le déterminant de la matrice soit pair?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard **le vendredi 14 octobre à 14h** (date limite à respecter impérativement!).

Remarque sur le Problemath 3 DARK VADOR nous a signalé une erreur de raisonnement dans la solution proposée : si $d' < d$, rien ne permet d'affirmer que α^{-1} conserve chaque distance irrationnelle. On peut s'en tirer comme suit : si $d' < d$, il existe deux rationnels r et s tels que $O < r < \frac{1}{2}(d - d')$ et $d < s < d + r$, de sorte que les sphères de rayons r et s centrées respectivement en x et y ont une intersection non vide. Il existe donc un point z tel que $d(x, z) = r$ et $d(y, z) = s$. Comme α conserve les distances rationnelles, $z' = \alpha(z)$ est tel que $d(x', z') = r$ et $d(y', z') = s$. Par conséquent, $d(y', z') = s > d > \frac{1}{2}(d + d') = d' + \frac{1}{2}(d - d') > d(x', y') + r = d(y', x') + d(x', z')$, ce qui contredit l'inégalité triangulaire.

Solution du Problemath 4 Il est impossible de colorier les points du plan euclidien en rouge ou en bleu de telle façon qu'aucun rectangle n'ait ses 4 sommets de la même couleur. En effet, soient D_1, D_2, D_3 trois droites parallèles distinctes. Toute droite X qui leur est perpendiculaire les coupe en un triple de points (x_1, x_2, x_3), où $x_i = X \cap D_i$. Si on colorie chaque point du plan en rouge ou en bleu, il n'y a que $2^3 = 8$ triples colorés possibles. Comme il y a une infinité de telles droites X, il y a une infinité de triples (x_1, x_2, x_3). Par conséquent, au moins deux de ces triples sont colorés de la même façon et, parmi les 6 points correspondants, il y en a forcément 4 de la même couleur aux sommets d'un rectangle. Il est facile de généraliser cette application très simple du principe des tiroirs pour prouver qu'il est impossible de colorier les points du plan euclidien en un nombre fini de couleurs de telle façon qu'aucun rectangle n'ait ses 4 sommets de la même couleur. Signalons que le problème suivant est non résolu : peut-on colorier les points du plan euclidien en 2 couleurs de telle façon qu'aucun carré n'ait ses 4 sommets de la même courleur?
Ont fourni une solution correcte: O. TYERS (élève de 5éme à l'International School of Brussels), M. TSISHYN, A. VANDENSCHRICK (BA1 maths), N. DELPORTE (BA2 physique), J. REMY (BA2 math à la VUB), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), O. DECKERS, A. JAECKEL, C. LARIVIÈRE, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), W. DE DONDER (ingénieur), Dark Vador, Lama Theur et la Sorcière d'Agnesi.

Solution du Problemath 5 Si les sommets du carré sont $o = (0,0), a = (k,0), b = (k,k)$ et $c = (0,k)$ dans un repère orthonormé, il n'est pas restrictif de supposer que le point $p(x,y)$ est à distance 1 du sommet o. En posant $|pa| = \alpha, |pb| = \beta$ et $|pc| = \gamma$, on obtient

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-k)^2 + y^2 = \alpha^2 \\ (x-k)^2 + (y-k)^2 = \beta^2 \\ x^2 + (y-k)^2 = \gamma^2 \end{cases}$$

où deux des nombres α, β, γ valent 2 et 3. Les égalités ci-dessus montrent que $\alpha^2+\gamma^2 = 1+\beta^2$, d'où on déduit que $\beta \neq 2$ (sinon, ni α, ni γ ne pourrait valoir 3). Il reste donc, à une isométrie près, deux cas à envisager, à savoir $\alpha = 2, \beta = 3$ et $\alpha = 2, \gamma = 3$. Dans le premier cas, les équations $x^2 + y^2 = 1$, $(x-k)^2 + y^2 = 4$ et $(x-k)^2 + (y-k)^2 = 9$ se réduisent, après élimination de x et y, à $(k^2-3)^2 + (k^2-5)^2 = 4k^2$, c'est-à-dire $k^4 - 10k^2 + 17 = 0$, d'où on tire $k = \sqrt{5 \pm 2\sqrt{2}}$. Dans le deuxième cas, on obtient de la même manière $k = \sqrt{\frac{1}{2}(13 \pm \sqrt{23})}$. Le problème admettait donc 4 solutions. Beaucoup sont tombés dans le piège, en ne trouvant que 2 valeurs pour la longueur inconnue k.
Ont fourni une solution correcte: T. HOSHINO (élève de 6ème à l'International School of Brussels), A. VANDENSCHRICK (BA1 maths), G. GLOUSSAROV (BA1 polytech), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), P. DE GROEN (prof à la VUB), O. DECKERS, A. JAECKEL, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), P. BARBIER (software engineer à Seattle), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), A. WAJNBERG (journaliste scientifique), Dark Vador et Lama Theur.

Solution du Problemath 6 Il suffisait d'écire

$$\Sigma_{k=1}^{2012} cos^2 \frac{k\pi}{2012} = \Sigma_{k=1}^{1006}(cos^2 \tfrac{k\pi}{2012} + cos^2(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{k\pi}{2012}))$$

$$= \Sigma_{k=1}^{1006}(cos^2 \tfrac{k\pi}{2012} + sin^2 \tfrac{k\pi}{2012}) = \Sigma_{k=1}^{1006} 1 = 1006$$

Plus généralement, on pouvait aussi écrire

$$\Sigma_{k=1}^{n} cos^2(kx) = \Sigma_{k=1}^{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2kx)) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\Sigma_{k=1}^{n} cos(2kx)$$

Il reste à calculer $\Sigma_{k=1}^{n} cos(k\alpha)$, où $\alpha = 2x$. Cette expression est la partie réelle de

$$\Sigma_{k=1}^{n} e^{ki\alpha} = \frac{e^{(n+1)i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} - 1 \quad si\ \alpha \neq 2q\pi (q \in \mathbb{Z})$$

Après calculs, on obtient

$$\Sigma_{k=1}^{n} cos(kx) = \frac{sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2} \quad si \quad \alpha \neq 2q\pi$$

Donc $\Sigma_{k=1}^{n} cos^2(kx) = \frac{n}{2} + \frac{sin(2n+1)x}{4sinx} - \frac{1}{4}$ si $x \neq q\pi$.

Ont fourni une solution correcte: A. SULAIMAAN (élève de 6ème à la St Johns International School à Waterloo), H.L. YANG (élève de 6ème à l'International School of Brussels), C. MULLER, M. TSISHYN, A. VANDENSCHRICK (BA1 maths),N. DWEK, A. MIRI (BA1 polytech), J. REMY (BA2 maths à la VUB), N. DELPORTE (BA2 physique), C. DE GROOTE, F. THILMANY (MA1 maths), N. RADU (MA1 maths à l'UCL), P. DE GROEN (prof à la VUB), O. DECKERS, P. HEINEN, A. JAECKEL, C. LARIVIERE, S. MASSON, Y. SUPRIN, C. VAN HOOSTE (profs de maths), W. DE DONDER (ingénieur), A. DE RUDDER (chercheuse en sciences de l'atmosphère), P. MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe), A. WAJNBERG (journaliste scientifique), Dark Vador, Lama Theur et la Sorcière d'Agnesi.

"La logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui fournit sa nourriture; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes"(André WEIL, mathématicien français, 1906-1998)
"Why are numbers beautiful? It's like asking why is Beethoven's Ninth Symphony beautiful. Il you don't see why, nobody can tell you" (Paul ERDÖS, mathématicien hongrois, 1913-1996)