ULB

PROBLEMATHS
30 mars 2012

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année.

<u>**Solution du Problemath 10**</u>. Ce problème revient à chercher tous les triples (x, y, z) d'entiers tels que $x \geq y \geq z > 0$ et $2(xy+yz+zx) = xyz(*)$. On en déduit que $xyz \leq 6xy$, c'est-à-dire $z \leq 6$. Comme (*) peut s'écrire $(z-2)xy = 2yz + 2zx > 0$, on a aussi $z \geq 3$. En réécrivant (*) sous la forme $xy = \frac{2z(x+y)}{z-2} \leq \frac{4zx}{z-2}$, on voit que $y \leq \frac{4z}{z-2}$. Enfin , (*) implique que $x = \frac{2yz}{yz-2y-2z}$(**) et, comme $x > 0$, il faut que $yz - 2y - 2z > 0$, c'est-à-dire $y > \frac{2z}{z-2}$. En résumé, $\frac{2z}{z-2} < y \leq \frac{4z}{z-2}$ avec $z \in \{3, 4, 5, 6\}$.
Si $z = 3$, les seules possibilités pour y sont $7, 8, 9, 10, 11, 12$, mais (**) montre que x n'est pas entier si $y = 11$; les autres valeurs de y donnent les solutions $(42, 7, 3)$, $(24, 8, 3)$, $(18, 9, 3)$,$(15, 10, 3)$ et $(12, 12, 3)$. Si $z = 4$, un raisonnement analogue montre que y ne peut valoir que $5, 6$ ou 8, ce qui donne les solutions $(20, 5, 4)$, $(12, 6, 4)$ et $(8, 8, 4)$. De même, $z = 5$ et $z = 6$ fournissent respectivement (10,5,5) et (6,6,6). En conclusion, à une isométrie près, il y a exactement 10 parallélépipèdes rectangles ahurissants.
<u>**Ont fourni une solution correcte**</u>: M. BADALYAN, K. BARIGOU (BA2 maths), V.SCHMIDT (BA2 physique), C. ANTONY, N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), M. LEOTARD (prof d'économie), Y. SUPRIN, (prof de maths), W. DE DONDER (ingénieur) et l'Empereur Palpatine.

<u>**Solution du Problemath 11**</u>. Alice peut toujours reconstituer le polynôme inconnu $p(x)$ en deux essais. En effet, si elle propose d'abord $x = 1$ à Bob et que celui-ci lui fournit $p(1) = N$, Alice en déduit que tous les coefficients de $p(x)$ sont $\leq N$ car ils sont ≥ 0 par hypothèse. Ensuite, il suffit qu'Alice propose à Bob $x = N+1$, puis qu'elle écrive l'entier $p(N+1)$ en base $N+1$: $p(N+1) = \sum_{i=0}^{d} a_i(N+1)^i$ avec $0 \leq a_i < N+1$
Les coefficients de $p(x)$ sont alors tout simplement les chiffres a_i (univoquement déterminés) de l'écriture de $p(N + 1)$ dans cette base. Il reste à prouver qu'Alice ne peut pas reconstituer à coup sûr $p(x)$ en ne proposant à Bob qu'un seul entier $n \geq 0$. Si $p(n) \geq n$, les polynômes $p_1(x) = p(n)$ et $p_2(x) = x + p(n) - n$ sont à coefficients entiers ≥ 0 et prennent la même valeur $p(n)$ pour $x = n$, de sorte qu'Alice ne peut pas reconstituer le polynôme inconnu. Par contre, si $p(n) < n$, Alice en déduit immédiatement que le polynôme inconnu est le polynôme constant $p(x) = p(n)$, mais elle n'a aucun moyen de savoir à l'avance que l'inégalité $p(n) < n$ sera vérifiée lorsqu'elle propose $x = n$ à Bob.
<u>**Ont fourni une solution correcte**</u>: K. BARIGOU (BA2 maths), C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge) et l'Empereur Palpatine.

<u>**Solution du Problemath 12**</u>. Désignons par p_i le point mobile sur la droite $D_i (i = 1, 2, 3, 4)$. Supposons que toutes les paires de points mobiles se rencontrent, sauf peut-être p_3 et p_4. Dans le plan-temps engendré par le plan π contenant les 4 droites D_i et par un axe des temps perpendiculaire à π, le mouvement rectiligne uniforme de chaque point p_i est représenté par une droite Δ_i dont la projection orthogonale sur le plan π est la droite D_i. Deux points p_i et p_j se rencontrent si et seulement si les droites Δ_i et Δ_j se coupent. De ce fait, les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont coplanaires car elles se coupent deux à deux en 3 points distincts. Il en est de même des droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4$. On en conclut que $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 sont coplanaires.
Si les points p_3 et p_4 ne se rencontraient pas, les droites Δ_3 et Δ_4 ne se couperaient pas, donc elles seraient parallèles puisqu'elles sont coplanaires. Par conséquent, leurs projections orthogonales D_3 et D_4 sur π seraient parallèles, une contradicton puisque D_3 et D_4 se coupent par hypothèse.
<u>**Ont fourni une solution correcte**</u>: M. BADALYAN (BA2 maths), C. DE GROOTE, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), M. LEOTARD (prof d'économie) et l'Empereur Palpatine.

Solution du Problemath 13. Désignons les 20 candidats par $C_1, \ldots, C_{20}$ et les 20 boîtes par $B_1, \ldots, B_{20}$. La fonction qui associe au numéro i du candidat C_i le numéro se trouvant dans la boîte B_i est une permutation π des 20 numéros, choisie aléatoirement dans l'ensemble des 20! permutations des numéros. Notons que le candidat C_i n'ouvre une boîte B_j (avec $j \neq i$) que s'il vient de trouver le numéro j dans une autre boîte. De ce fait, chaque fois que C_i ouvre une nouvelle boîte, il ne peut y trouver que le numéro i inscrit sur son tee-shirt ou le numéro d'une boîte qui n'a pas encore été ouverte.
Lorsqu'il applique la stratégie décidée par l'équipe, chaque condidat C_i suit un cycle de la permutation π: ce cycle commence par le numéro se trouvant dans la boîte B_i et se termine nécessairement par le numéro i (à condition que la longueur de ce cycle ne dépasse pas le nombre maximum de boîtes que C_i est autorisé à ouvrir). Il en résulte que l'équipe sera gagnante si et seulement si la permutation π n'a aucun cycle de longueur >10. Combien y a-t-il de permutations π des numéros $1, 2, \ldots, 2n$ ayant au moins un cycle de longueur L, avec $n < L \leq 2n$? Il y a $\begin{pmatrix} 2n \\ L \end{pmatrix}$ façons de choisir les L numéros apparaissant dans un tel cycle, $(L-1)!$ façons de les ordonner cycliquement et $(2n-L)!$ façons de permuter les $2n-L$ numéros restants. Le produit de ces 3 nombres vaut $(2n)!/L$. Comme la permutation π a au plus un cycle de longueur $L > n$, la probabilité que π ait un tel cycle vaut $1/L$. Par conséquent, la probabilité que π ait un cycle de longueur $>n$ vaut $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.
La probabilité que l'équipe ne gagne pas vaut donc $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20} = 0,668771384\ldots$, autrement dit la probabilité d'une victoire avec la stratégie décrite dans l'énoncé vaut $0,331228616\ldots$ (environ 347000 fois plus grande que la probabilité de gagner sans stratégie!) L'empereur Palpatine a démontré que cette stratégie est optimale, c'est-à-dire maximise la probabilité d'une victoire. Ce résultat avait déjà été obtenu par E. Curtin et M. Warshauer dans "The locker puzzle", Mathematical Intelligencer, vol.28 (2006), pp.28-31.
Ont fourni une solution correcte: M. BADALYAN (BA2 maths), C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), M. LEOTARD (prof d'économie), Y. SUPRIN (prof de maths) et l'Empereur Palpatine.

Pour terminer en beauté, voici le palmarès des Problemaths 2011-2012 :

- Ont résolu 13 Problemaths : C. DE GROOTE (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg) et L'Empereur Palpatine (personnage de Star Wars), qui se voient attribuer le titre convoité d'Hyperproblematheur intégral non borné au sens de Schpotzermann et Wienerschnitzel.
- Ont résolu 12 Problemaths : M. BADALYAN (BA2 maths), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge)
- A résolu 11 Problemaths : F. THILMANY (BA3 maths)
- Ont résolu 10 Problemaths : K. BARIGOU (BA2 maths) et M. DUERINCKX (BA3 maths)
- Ont résolu 8 Problemaths : C. ANTONY, N. BAYEKULA (BA3 maths) et Y. SUPRIN (prof de maths).
- Ont résolu 7 Problemaths : A. DUJARDIN (BA2 polytech) et O. DECKERS (prof de maths).
- Ont résolu 6 Problemaths : L. SCHOPEN(élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), N. DWEK, P. TRANCHIDA, M. TSISHIN (élèves de 6ème à l'Athénée Catteau), R. WALRAVENS (BA2 maths), S. MASSON (prof de maths), W. DE DONDER, C. DUMEUNIER (ingénieurs).
- Ont résolu 5 Problemaths : V. SCHMIDT (BA2 physique) et M. LEOTARD (prof d'économie).
- Ont résolu 4 Problemaths : D. BERTRAND (BA3 maths à l'UCL), F. DOIGNIE (ingénieur) et P. MASAI (vise-président de Toyota Motor Europe).
- Ont résolu 3 Problemaths : H. SVOBODA (prof de maths), L. ELFAL et Lady BELMATH.
- Ont résolu 2 Problemaths : J. GIBSON (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole Robert Schuman à Arlon), A. D'ADESKY, H. VERMEIREN (profs de maths) et N. IKABRUOB;
- Ont résolu 1 Problemath : P.A.BACQ (BA1 polytech), Y. WACHEL(BA2 physique), J. ROSENZWEIG (BA2 polytech), D. TRIFFAUX (BA2 sciences industrielles à la haute Ecole Robert Schuman à Arlon), L. MOORTGAT (BA3 maths), R. ENGLEBERT (ingénieur), E. KRIECKHAUS (Ecole Internationale de Bruxelles), la Schtroumpfette et les Schtroumps bricoleur, coquet, farceur et à lunettes.

Tous ces problematheurs et problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise solennelle des diplômes et des prix, qui aura lieu le mardi 24 avril à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du Bâtiment NO, Campus Plaine,Boulevard du Triomphe).