PROBLEMATHS
21 novembre 2011

Problemath 7

Quelles sont les solutions réelles de l'équation

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}?$$

Problemath 8

Pour quelles valeurs de $n \geq 3$ existe-t-il, dans l'espace euclidient $\mathbb{R}^3$, une ligne polygonale fermée ayant n côtés de longueur 1, deux côtés adjacents étant toujours perpendiculaires?

Problemath 9

Pour quels nombres premiers p et q le nombre $p^q + q^p$ est-il lui aussi premier?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard **le vendredi 16 décembre à 14h**.

Solution du Problemath 4.
a) Il n'existe pas de fonction strictement décroissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, si une telle fonction existait, considérons deux nombres réels a et b tels que $f(a) = b$. On a donc $f(b) = f(f(a)) = a+1$, d'où on déduit que $f(a+1) = f(f(b)) = b+1$. Comme f est strictement décroissante, $f(a) > f(a+1)$, c'est -à-dire $b > b+1$, une contradiction.
b) La fonction g définie par $g(x) = -\sqrt{2}x - (1+\sqrt{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est strictement décroissante, et on vérifie facilement que $g(g(x)) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ont fourni une solution correcte:
L. SCHOPEN (élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), N. DWEK, P. TRANCHIDA, M. TSISHYN (élèves de 6 ème à l'Athénée Catteau), M. BADALYAN, K. BARIGOU, R. WALRAVENS (BA2 maths), V. SCHMIDT (BA2 physique), A. DUJARDIN (BA2 polytech), C. ANTONY, N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, M.DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN(MA1 Univ. Cambridge), O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. SVOBODA (profs de maths), C. DUMEUNIER (ingénieur) et l'Empereur Palpatine.

Solution du Problemath 5. Contrairement à ce que le bon sens laisse croire, ce jeu n'est pas équitable et on va prouver que, quel que soit le triple choisi par le premier joueur A, le second joueur B peut toujours choisir un triple qui lui assure une probabilité de victoire $> \frac{1}{2}$ (ce paradoxe a été découvert en 1969 par Walter Penney). Le tableau ci-dessous décrit la stratégie de B:

Choix de A	Choix de B	Proba de victoire de B
PPP	FPP	7/8
PPF	FPP	3/4
PFP	PPF	2/3
PFF	PPF	2/3
FFF	PFF	7/8
FFP	PFF	3/4
FPF	FFP	2/3
FPP	FFP	2/3

Vérifions les 3 premières lignes de cette table (les autres lignes se vérifient de manière tout à fait analogue).
(1) Si le triple PPP apparaît dès le début (avec une probabilité $\frac{1}{8}$), A a gagné. Si ce n'est pas le cas , PPP est nécessairement précédé d'un F lors de sa première apparition, et c'est B qui gagne. La probabilité de victoire de B est donc $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

(2) Le triple PPF apparaît avant FPP si et seulement si la suite des jets commence par PPF ou PPPF ou PPPPF ou… La probabilité de cet événement vaut $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{4}$. La probabilité de victoire de B est donc $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
(3)Posons $x=p(\text{B gagne})=p(\text{PPF apparaît avant PFP})$. Si la suite des jets commence par une succession de F, on peut les ignorer et commencer le raisonnement au premier jet donnant P. Si le jet suivant donne encore P(probabilité $\frac{1}{2}$), la seule façon que le joueur B perde serait que la pièce donne indéfiniment des P (probabilité 0), donc B gagnera avec une probabilité 1.
Par contre, si le jet suivant donne F(probabilité $\frac{1}{2}$), la victoire de B n'est possible que si la pièce donne encore F juste après (probabilité $\frac{1}{2}$), sinon le triple PFP sera apparu et A aura gagné. La suite des jets à partir du premier P ne peut donc conduire à une victoire de B que si elle commence par PFF. Pour calculer la probabilité d'une victoire de B dans ce cas, il suffit de reprendre le raisonnement initial au premier P qui apparaîtra par après (nécessairement avec une probabilité 1).
En conclusion, $x=\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.x$ et donc la probabilité de victoire de B est $x=\frac{2}{3}$
N.B. : Pour ceux qui voudraient en savoir plus sur ce genre de problèmes, le hasard fait bien les choses : le magazine "Pour la science" de novembre 2011 publie une rubrique mathématique intitulée "Les surprises du jeu de pile ou face"(pages 146 à 151).
Ont fourni une solution correcte:
L. SCHOPEN (élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), N. DWEK, P. TRANCHIDA, M. TSISHYN (élèves de 6ème à l'Athénée Catteau), M. BADALYAN, K. BARIGOU (BA2 maths), A. DUJARDIN (BA2 polytech), N. BAYEKULA, C. DE GROOTE (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), Y. SUPRIN, H. SVOBODA (profs de maths), C. DUMEUNIER (ingénieur), L. ELFAL et l'Empereur Palpatine.

Solution du Problemath 6.
On ne change pas le comportement cinématique global des 100 fourmis si on suppose que , lorsque deux fourmis se rencontrent, elles continuent leur chemin comme si elles se traversaient l'une l'autre, au lieu de faire demi-tour. Avec cette nouvelle vision du problème, il est évident que chaque fourmi ne restera pas plus de 10 minutes sur la tige. Cette borne est effectivement atteinte si on place par exemple une fourmi à l'extrémité gauche de la tige, les autres n'importe où, et si elles regardent toutes vers la droite. En conclusion, T =10 minutes.
Ont fourni une solution correcte:
L. SCHOPEN (élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), N. DWEK, P. TRANCHIDA, M. TSISHYN (élèves de 6ème à l'Athénée Catteau), M. BADALYAN, K. BARIGOU, R. WALRAVENS (BA2 maths), V. SCHMIDT (BA2 physique), A. DUJARDIN (BA2 polytech), N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), D. BERTRAND (BA3 maths à l'UCL), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), A. D'ADESKY, O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN, H. SVOBODA (profs de maths), W. DE DONDER, C. DUMEUNIER (ingénieurs), L. ELFAL et l'Empereur Palpatine.