PROBLEMATHS

17 octobre 2011

Problemath 4

Existe-t-il deux fonctions strictement décroissantes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
a) $f(f(x)) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
b) $g(g(x)) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Problemath 5

Si on lance 3 fois de suite une pièce de monnaie qui donne pile (P) et face (F) avec la même probabilité, les 8 résultats possibles (à savoir les triples PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP et FFF) sont équiprobables. Un joueur A choisit un de ces 8 triples, puis un joueur B, connaissant le choix de A, choisit un des 7 triples restants. La pièce est alors lancée jusqu'à ce que l'un des deux triples choisis apparaisse ; celui des deux joueurs qui l'avait choisi est déclaré gagnant.
Par exemple, si le choix de A est PFF, si celui de B est FFP et si on obtient FPPFPFF en lançant la pièce, le jeu s'arrête et A a gagné.
Ce jeu est-il équitable, autrement dit A et B ont-ils la même probabilité de gagner ? Dans le cas contraire, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie lui assurant une probabilité de victoire $> \frac{1}{2}$, quoi que fasse son adversaire ?

Problemath 6

Une tige rectiligne très fine (qu'on peut assimiler à un segment fermé) de 10 mètres de long est suspendue horizontalement au-dessus du sol. A l'instant $t = 0$, on dépose aléatoirement 100 fourmis minuscules (qu'on peut assimiler à des points) à 100 endroits différents de la tige. L'orientation de la tête de chaque fourmi (vers la droite ou vers la gauche) est elle aussi aléatoire.
Dès qu'elles touchent la tige, les fourmis avancent à la vitesse constante de 1 mètre/minute. Quand une fourmi atteint l'une ou l'autre extrémité de la tige, elle tombe sur le sol. La tige est si fine que deux fourmis ne peuvent se croiser ; quand deux fourmis se rencontrent, elles font immédiatement demi-tour et repartent en sens inverse, toujours à la vitesse de 1 mètre/minute.
Quel est le plus petit intervalle de temps [0,T] au bout duquel on peut être sûr que toutes les fourmis sont tombées de la tige ?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 4 novembre à 14 heures.

Solution du Problemath 1. Posons $\lfloor x^2 - 3x + 2 \rfloor = a \in \mathbb{Z}$. Il existe donc un nombre réel α tel que $x^2 - 3x + 2 - \alpha = a$ avec $0 \leq \alpha < 1$. Comme $\alpha = x^2 - 3x + 2 - a$ et $x = \frac{1}{3}(a + 7)$ (puisque $a = 3x - 7$), on a

$$\alpha = \left(\tfrac{a+7}{3}\right)^2 - 3\left(\tfrac{a+7}{3}\right) + 2 - a = \tfrac{a^2-4a+4}{9}$$

avec $0 \leq \alpha < 1$, de sorte que $0 \leq \frac{1}{9}(a^2 - 4a + 4) < 1$, c'est-à-dire $0 \leq a^2 - 4a + 4$ et $a^2 - 4a - 5 < 0$. La première inégalité est toujours vérifiée puisque $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$. La deuxième est équivalente à $-1 < a < 5$, autrement dit $a = 0, 1, 2, 3$ ou 4. En introduisant ces valeurs de a dans $x = \frac{1}{3}(a + 7)$, on en conclut que l'équation a 5 solutions réelles, à savoir $x = \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}$ et $\frac{11}{3}$.

Ont fourni une solution correcte :
L. SCHOPEN (élève de 6ème à la St John's International School à Waterloo), M. TSISHYN (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), Schtroumph bricoleur (BA1 polytech). Schtroumpf à lunettes (BA1 chimie), Schtroumpf farceur (BA1 kiné) Schtroumpf coquet (BA1 pharma), M. BADALYAN, KABAR, MEIKO (BA2 maths), V. SCHMIDT (BA2 physique), A. DUJARDIN (BA2 polytech), J. GIBSON, D. TRIFFAUX (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole Robert Schuman à Arlon). C. ANTONY, N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), Schtroumpfette (BA3 biologie), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), A. D'ADESKY, O. DECKERS, S. MASSON, Y. SUPRIN (profs de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, C. DUMEUNIER (ingénieurs), P. MASAI (directeur informatique à Toyota Motor Europe), N. IKABRUOB (= BOURBAKI en verlan), Lady BELMATH, l'Empereur Palpatine et les Deux Petits Vieux du Balcon.

Solution du Problemath 2. Pour tout entier $n \in \{0,1,2,...,49\}$, désignons par D_n l'ensemble des droites horizontales d'équations $y = k + \frac{n}{50}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Les droites de D_n découpent le plan $\mathbb{R}^2$ en une infinité dénombrable de bandes horizontales de largeur 1. Considérons l'ensemble F_n de tous les cercles de rayon $\frac{1}{2}$ contenus dans ces bandes et tangents aux deux bords. Il est facile de vérifier que tout point du plan appartient à
a) exactement 2 cercles de F_0.
b) exactement 100 cercles de $F_0 \cup F_1 \cup ... \cup F_{49}$.
Une généralisation immédiate permet de construire une famille de cercles telle que tout point du plan appartienne à exactement N cercles de la famille, où N est un entier pair fixé quelconque. On peut démontrer qu'une telle famille n'existe pas pour $N = 1$ (autrement dit, il est impossible de partitionner le plan $\mathbb{R}^2$ en cercles). Le problème est ouvert pour les autres valeurs impaires de N.
Ont fourni une solution correcte :
M. BADALYAN, KABAR, MEIKO (BA2 maths), A. DUJARDIN (BA2 polytech), C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, L. MOORTGAT, F. THILMANY (BA3 maths), D. BERTRAND (BA3 maths à l'UCL), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), S. MASSON (prof de maths), W. DE DONDER, C. DUMEUNIER (ingénieurs) et l'Empereur Palpatine.

Solution du Problemath 3. Le premier volume comprend $\frac{1}{7}26!$ mots, ce qu'on peut aussi écrire

$$\frac{1}{7}26! = \frac{26}{7}25! = 3.25! + \frac{5}{7}.25! = 3.25! + \frac{125}{7}.24!$$

$$= 3.25! + 17.24! + \frac{6}{7}.24!$$

$$= 3.25! + 17.24! + \frac{144}{7}.23!$$

$$= ....$$

$$= 3.25! + 17.24! + 20.23! + 13.22! + 3.21! + 3.20!$$

Dans le premier volume, les 25 ! premiers mots commencent par a, les 25 ! suivants par b, et ainsi de suite. Comme $3.25! < \frac{1}{7}26! < 4.25!$, la première lettre du dernier mot M du premier volume est donc la 4ème lettre de l'alphabet, à savoir d.
De même, la deuxième lettre de M est la 18ème dans l'alphabet privé de d, donc la 19ème de l'alphabet complet, à savoir s. La troisième lettre de M est la 21ème de l'alphabet privé de d et s, donc la 23ème de l'alphabet complet, à savoir w. La quatrième est la 14ème de l'alphabet privé de d, s et w, donc la 15ème de l'alphabet complet, à savoir o. Un raisonnement analogue montre que les 6 premières lettres de M sont d, s, w, o, e, c. D'autre part, comme M est le <u>dernier</u> mot commençant par *dswoec*, les 20 dernières lettres de M sont nécessairement les lettres restantes rangées dans l'ordre antialphabétique. En conclusion, le dernier mot du premier volume est *dswoeczyxvutrqpnmlkjihgfba*.
Ont fourni une solution correcte :
M. TSISHYN (élève de 6ème à l'Athénée Catteau), P.A. BACQ (BA1 polytech), M. BADALYAN, KABAR (BA2 maths), Y. WACHEL (BA2 physique), J. ROSENZWEIG (BA2 polytech), J. GIBSON (BA2 sciences industrielles à la Haute Ecole Robert Schuman à Arlon), N. BAYEKULA, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA3 maths), N. RADU (BA3 maths à l'ULg), P.A. JACQMIN (MA1 Univ. Cambridge), O. DECKERS (prof. de maths), W. DE DONDER, F. DOIGNIE, C. DUMEUNIER, R. ENGLEBERT (ingénieurs), P. MASAI (directeur informatique à Toyota Motor Europe), N. IKABRUOB, Lady BELMATH, l'Empereur Palpatine et les Deux Petits Vieux du Balcon.