Les groupes sporadiques

par Francis Buekenhout

Francis Buekenhout est professeur de mathématiques à l'Université Libre de Bruxelles.

■ Il existe une infinité de groupes – ces objets mathématiques maintenant banalisés dans l'enseignement primaire. Depuis la génèse de leur théorie, les mathématiciens cherchent à les classer pour en faciliter l'étude. Le but de cette classification est non seulement de rassembler les groupes qui ont des propriétés communes mais aussi de prédire le nombre et les propriétés de ceux qui restent à découvrir. La famille qui a été la plus rebelle à constituer est celle des groupes dits simples finis. Il a fallu attendre 1980 pour que le dernier, «le Monstre», qui avait résisté aux coups des plus puissants ordinateurs, cède aux efforts de R. Griess. Il a été ainsi baptisé car il possède 10^{53} éléments. Avec lui s'achève la classification des groupes simples finis. Cette œuvre qui a mobilisé des générations d'illustres mathématiciens conclut à l'existence de dix-sept familles infinies et vingt-six groupes isolés ou sporadiques. «Le Monstre» était le vingt-sixième. Son histoire constitue un chapitre important et original de la recherche actuelle en mathématiques.

■ Au début de 1980, les principaux experts de la théorie des groupes simples finis reçurent des vœux de Nouvel An pour le moins originaux, en provenance de R. Griess, professeur à l'université du Michigan, alors en visite à Princeton (fig. 2). R. Griess annonçait la construction d'un groupe simple constitué – oh ironie des termes ! – de : 808017424 794512875886459904961710757005754368 00000000 éléments. L'existence de ce groupe avait été prédite en 1973 par B. Fischer, professeur à Bielefeld, et par R. Griess lui-même. Le malicieux J.H. Conway s'était empressé de trouver un nom à cet objet encombrant : le Monstre ! Celui-ci allait rapidement se trouver au centre des préoccupations de nombreux spécialistes tout en demeurant hors d'atteinte des efforts de construction y compris ceux réunissant les efforts combinés d'ordinateurs parmi les plus puissants et de savants tels que C. Sims (Rutgers, New-Jersey) qui avaient réussi à construire par ce moyen d'autres groupes, notamment le Bébé Monstre dont la taille (nous dirons dorénavant l'*ordre*) atteint 10^{33} éléments.

Le message de R. Griess déclencha la curiosité générale et de nombreuses demandes d'explications auxquelles l'intéressé opposa une fin de non-recevoir. Il souhaitait vérifier tous les détails de son travail avant d'en révéler quoi que ce soit, mais son attitude provoqua des commentaires variés dont la presse se fit même l'écho. Début avril, R. Griess fit, à quelques jours d'intervalle, trois conférences à Princeton, Chicago et Ann Arbor, où il révéla enfin sa méthode. Le principe en est simple : le Monstre apparaît comme un groupe de rotations d'un espace de dimension 196 883 et il est engendré à partir de deux sous-groupes. Dans son édition du 22 juin 1980, le *New-York Times* consacrait une demi-page à l'existence du Monstre. On peut se demander en quoi cet événement peut intéresser le grand public.

Les groupes et l'homme de la rue.

Mais revenons aux origines de tout cela : qu'est-ce qu'un groupe ? (fig. 1) A quoi sert-il ? Pourquoi la communauté des mathématiciens s'acharne-t-elle sur ces objets ? Quelles perspectives leurs travaux ouvrent-ils ? Voilà les questions que nous allons tenter d'élucider dans cet article.

Un groupe est un ensemble G muni d'une opération (ou loi de composition interne) notée multiplicativement et telle que :

1) Pour toute donnée d'éléments a et b de G, le produit ab de ces éléments est un élément de G ;

2) Pour toute donnée d'éléments a, b et c de G, on a : $(ab)c = a(bc)$;

3) Il existe dans G un élément noté i (et parfois 1) tel que, pour tout élément a de G, on ait : $ai = ia = a$;

4) Pour tout élément a de G, il existe un élément a^{-1} de G, tel que : $a^{-1} a = aa^{-1} = i$. De plus, le groupe G sera dit commutatif si tous ses éléments vérifient l'égalité $ab = ba$.

Cette notion de groupe est une abstraction que l'on peut illustrer très élémentairement par le jeu de «pair ou impair ?» de notre enfance. Deux enfants prennent chacun dans une main un tas de billes. Il s'agit de savoir si les billes contenues dans ces deux mains sont en nombre pair ou impair. Plutôt que d'additionner le nombre de billes de chacune des mains, pour en connaître la parité, il est plus simple d'en additionner les parités. Ainsi si l'un des enfants a un nombre pair de billes et l'autre un nombre impair, le nombre total de billes sera impair et si les deux ont un nombre pair ou impair de billes, le résultat sera pair. Cette loi de composition des parités est une loi de groupe, le groupe est noté S_2 et comme il contient deux éléments, il est dit d'ordre 2.

Un autre exemple de groupe est fourni par les déplacements dans le plan ou dans l'espace, d'un objet solide. Celui-ci peut subir une infinité de rotations et de glissements (translations) qui tous lui conservent sa forme. Il est clair que la combinaison de deux déplacements de ce solide est aussi un déplacement de ce solide. Et en notant i l'absence de déplacement, ou plutôt le déplacement identité, nous pouvons facilement constater que l'ensemble des déplacements du solide obéit à une loi de groupe. Ce groupe, qui admet une infinité d'éléments, est dit d'ordre infini. C'est le groupe des déplacements de la géométrie euclidienne, dans le plan ou dans l'espace, ou encore le groupe des symétries d'un objet solide.

On peut même définir un groupe à partir d'un ensemble quelconque E. On considère l'ensemble S_E des transformations biunivoques (ou applications bijectives) qui transforment E en lui-même et qui sont réversibles. S_E a une structure de groupe pour la loi de composition des transformations notée o, et on l'appelle le groupe symétrique de E. Tout sous-groupe de S_E est appelé groupe de transformations de E. Ces groupes ont un rôle déterminant en géométrie ; en voici un exemple.

Soit E le triangle équilatéral de sommets (A, B, C). Les transformations qui ne modifient pas la forme du triangle E sont au nombre de six et toute composition de deux d'entre elles aboutit à une troisième. A partir de ces données, on peut établir la table de multiplication de S_E (fig. 3). Ainsi avec un ensemble de trois éléments au départ, nous avons construit son groupe symétrique S_3 (car nous noterons ainsi S_E dans ce cas). Sur le même principe on peut construire pour tout ensemble fini E de n éléments son groupe symétrique S_n.

Les quelques exemples qui précèdent soulignent l'importance de la théorie des groupes en mathématiques, et plus généralement en sciences, voire dans la vie quotidienne. J. Tits, titulaire de la chaire de théorie des groupes au Collège de France, faisait remarquer à juste titre, dans sa leçon inaugurale de 1975 «... et les parents de notre écolier, s'ils ne se contentent pas de lever les bras au ciel, découvrent qu'ils faisaient depuis toujours de la théorie de groupes comme M. Jourdain faisait de la prose». Plus loin, il explique ce qu'est cette «théorie résultant du développement mathématique des idées voisines d'*homogénéité*, de *symétrie* et d'*indiscernabilité* ou, en termes plus philosophiques, de la synthèse du même et du différent».

Si chacun est exposé à l'emploi des rudiments de la théorie qui s'est surtout développée à partir de 1830 environ, sous l'impulsion d'Evariste Galois, les applications les plus sophistiquées se rencontrent aujourd'hui en spectroscopie, cristallographie, physique des particules, mécanique quantique, géométrie, topologie et théorie des nombres. Un apport majeur des groupes est de fournir un outil de classification dans des domaines par ailleurs très complexes. Il en fut ainsi dès l'époque de Galois qui voyait dans les groupes un principe classificateur des

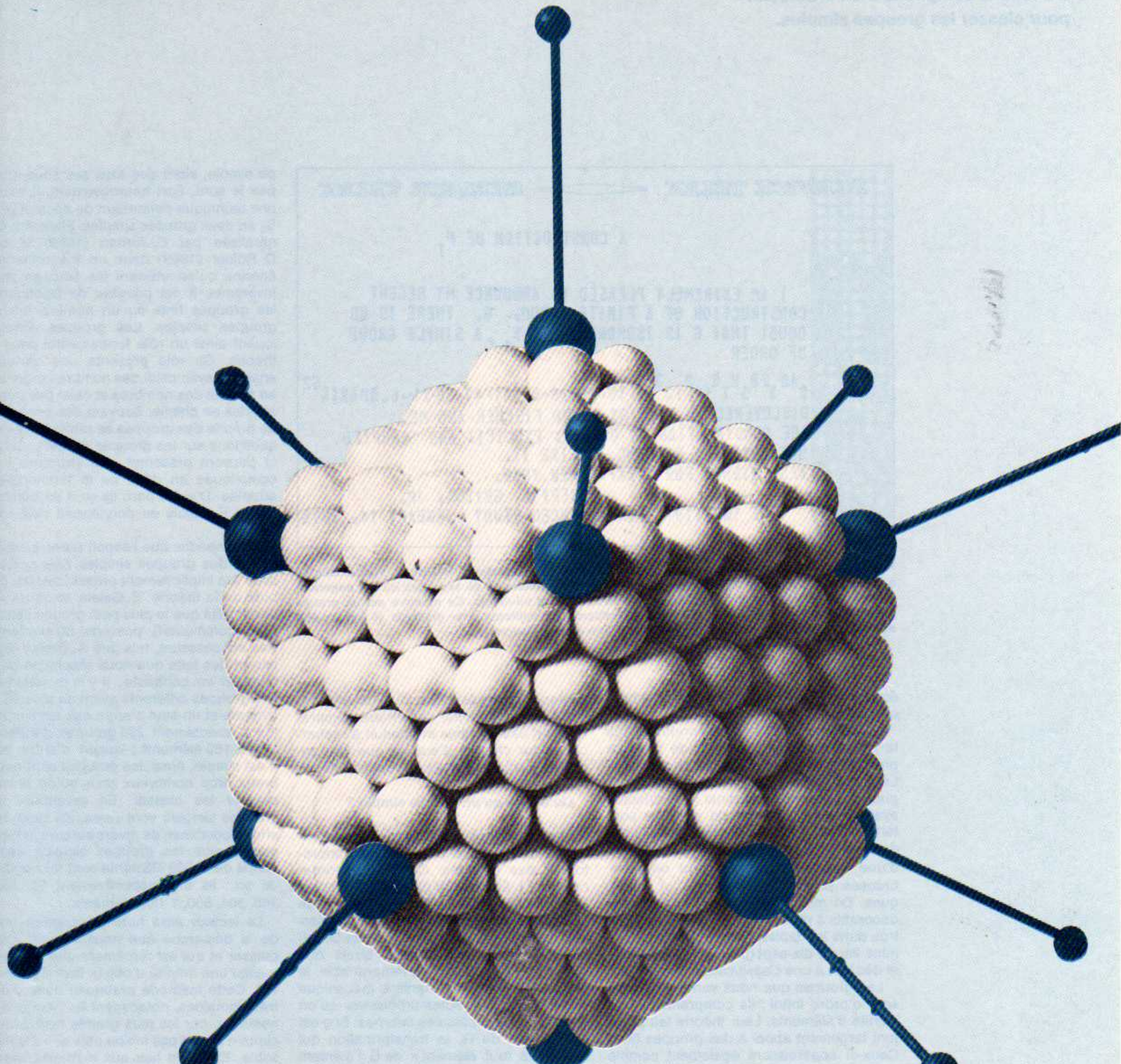
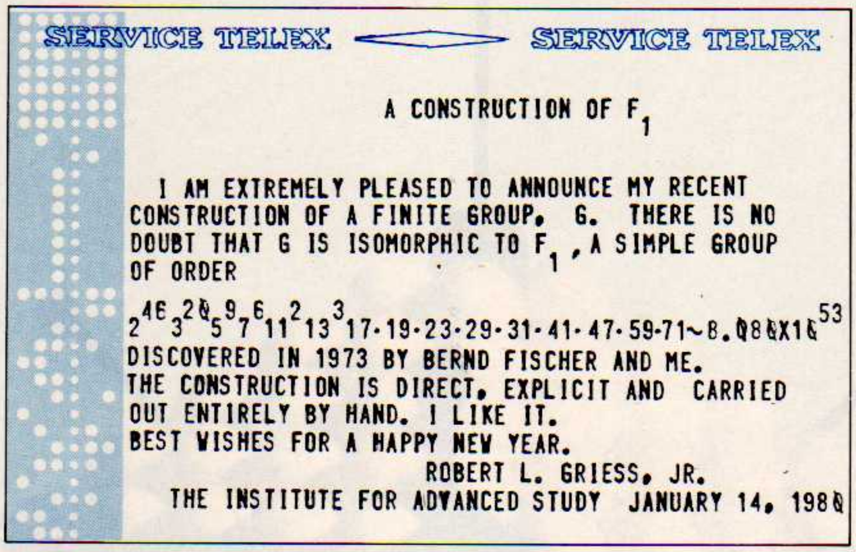


Figure 1. **Les groupes sont des objets mathématiques introduits au XIXe siècle que les lycéens de nos jours manipulent avec autant d'aisance que les nombres. De fait, les groupes ne sont pas aussi abstraits que leur définition. Certains nous sont même familiers : les groupes des symétries du cube, de l'icosaèdre par exemple que l'on retrouve dans d'autres polyèdres et dans certains virus. Il s'agit ici de l'adénovirus reponsable des infections de la gorge (chaque boule blanche représente une protéine capsidaire).** (Droits réservés)

L'arsenal théorique n'a pas été suffisant. Il a fallu la complicité d'un ordinateur pour classer les groupes simples.


SERVICE TELEX — SERVICE TELEX

A CONSTRUCTION OF F_1

I AM EXTREMELY PLEASED TO ANNOUNCE MY RECENT CONSTRUCTION OF A FINITE GROUP, G. THERE IS NO DOUBT THAT G IS ISOMORPHIC TO F_1 , A SIMPLE GROUP OF ORDER

$2^{46}3^{20}5^{9}7^{6}11^{2}13^{3}17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71 \sim 8.080 \times 10^{53}$

DISCOVERED IN 1973 BY BERND FISCHER AND ME.
THE CONSTRUCTION IS DIRECT, EXPLICIT AND CARRIED OUT ENTIRELY BY HAND. I LIKE IT.
BEST WISHES FOR A HAPPY NEW YEAR.

ROBERT L. GRIESS, JR.
THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY JANUARY 14, 1980

Figure 2. **Une carte de vœux pour le moins originale ! Le signataire, R. Griess, mathématicien à l'université Ann Arbor du Michigan, annonce à la communauté de ses pairs qu'il a engendré le Monstre, prédit sept ans auparavant par B. Fischer et lui-même. Ce monstre est un groupe possédant 8,080 × 10^{53}, soit environ 800 milliards de milliards... de milliards (6 fois) d'éléments ! Ce groupe est simple et sporadique, dit-on dans le jargon.**

équations algébriques. Voici d'autres exemples.

Les milliers de cristaux rencontrés dans la nature se laissent classer de manière pratique grâce à leur groupe de symétrie. La théorie montre qu'il convient de distinguer 230 groupes différents. Des cristaux ayant le même groupe de symétrie sont rangés dans une même classe et ce mode de classification est efficace : les cristaux d'une même classe partagent de nombreuses propriétés physiques et chimiques. De même les innombrables motifs décoratifs à répétitions régulières rencontrés dans les tapisseries et pavages donnent lieu à dix-sept groupes de symétrie et dès lors à une classification maniable.

Les groupes que nous venons de citer sont d'ordre infini ; ils comprennent une infinité d'éléments. Leur théorie fait pourtant largement appel à des groupes finis. Ceux-ci apparaissent également comme groupes de symétries de diverses figures spatiales telles que des polyèdres ou des molécules plus ou moins complexes. Un des groupes finis les plus familiers est celui des 120 symétries de l'icosaèdre (solide régulier à douze sommets et vingt faces) que l'on retrouve pour d'autres polyèdres et pour certains virus (fig. 4).

Le cas des groupes de symétrie des structures les plus compliquées connues ou inconnues illustre la puissance de la notion de groupe. En effet, les propriétés élémentaires des groupes restant valables, la richesse en symétries permet bien souvent de reconstituer la structure initiale d'une figure au sein du groupe. Cette constatation fondamentale a été faite par Félix Klein en 1872 et il l'a largement utilisée en géométrie élémentaire. Elle s'applique également aux polyèdres réguliers comme le cube et l'icosaèdre ainsi qu'aux cristaux (idéalisés). Elle joue un rôle général et fondamental dans notre compréhension des groupes et conduit à rechercher pour chacun d'eux ce que l'on appellera la «géométrie» correspondante.

Qu'est-ce qu'un groupe simple ?

Les développements précédents montrent l'intérêt d'une connaissance approfondie des groupes. Comment aborder celle-ci ? L'étude d'un groupe G fait appel à son tour aux automorphismes de G. Ceux-ci sont des transformations internes qui conservent la structure de G, telles que T(ab) = T(a) T(b), quels que soient a et b dans G. Fait remarquable, le groupe G produit de manière mécanique certains de ses automorphismes qu'on appelle *automorphismes internes*. Si g est un élément de G, la transformation qui associe à tout élément x de G l'élément gxg^{-1} est l'automorphisme interne déterminé par g. Il s'agit bien d'un automorphisme car $g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})$; la structure est donc conservée.

Un sous-groupe S de G est dit *invariant* si tout automorphisme interne de G transforme S en lui-même, c'est-à-dire si $gSg^{-1} = S$, quel que soit g dans G. Signalons deux sous-groupes invariants banals : G lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément 1.

Un groupe G est dit *simple* s'il ne possède pas d'autres sous-groupes invariants que les deux sous-groupes banals ci-dessus. Si nous reprenons le cas du groupe des transformations du triangle équilatéral E, il est facile de vérifier que $\{i, j, k\}$ est un sous-groupe invariant de S_3, alors que les sous-groupes $\{i, r\}$, $\{i, s\}$ et $\{i, t\}$ ne sont pas invariants dans le groupe S_3. On remarquera aussi que S_3 n'est pas un groupe simple, alors que tous ses sous-groupes le sont. Fort heureusement, il existe une technique permettant de décomposer S_3 en deux groupes simples. Elle a été généralisée par C. Jordan (1869) et par O. Hölder (1889) dans un théorème qui énonce qu'en utilisant les sous-groupes invariants, il est possible de fractionner les groupes finis en un nombre fini de groupes simples. Les groupes simples jouent ainsi un rôle fondamental dans la théorie. Ce rôle présente une certaine analogie avec celui des nombres premiers en théorie des nombres et celui des corps simples en chimie. Souvent des questions de théorie des groupes se ramènent à des questions sur les groupes simples. Ceux-ci peuvent présenter une structure très compliquée en dépit de la terminologie adoptée. D'autre part, ils sont en nombre infini ; E. Galois en connaissait déjà une infinité.

Il n'empêche que l'espoir d'une classification des groupes simples finis semble avoir été implicitement présent dès les débuts de la théorie. E. Galois, toujours lui, savait déjà que le plus petit groupe simple (non commutatif) possède 60 éléments. Ses successeurs, tels que A. Cayley, établirent des faits que nous résumons pour dégager un contraste : il y a exactement 314 groupes différents ayant au plus 60 éléments et un seul d'entre eux est simple. Il y a exactement 238 groupes différents ayant 160 éléments ; aucun d'entre eux n'est simple. Ainsi, les groupes sont nombreux, trop nombreux pour qu'on puisse espérer les classer. En revanche, les groupes simples sont rares. En 1900, les efforts combinés de divers auteurs avaient montré que les groupes simples ayant moins de 2 000 éléments sont au nombre de six : ils ont respectivement 60, 168, 360, 504, 660, 1 092 éléments.

Le lecteur aura noté le caractère naïf de la démarche que nous venons d'esquisser et qui est forcément une impasse puisqu'une infinité d'objets sont à découvrir. Cette méthode pratiquée dans d'autres domaines, notamment la théorie des nombres, par les plus grands mathématiciens n'en est pas moins utile et indispensable. Elle tient lieu aux mathématiciens d'expériences de laboratoire pratiquées dans d'autres disciplines. Ce travail obscur et l'accumulation d'observations permettent d'orienter la théorie. Celle-ci conduit à son tour à des expériences plus fructueuses. L'énumération refit surface en 1969 lorsque M. Hall rassembla tout l'arsenal théorique alors disponible et la complicité d'un ordinateur pour classer tous les groupes simples ayant moins d'un million d'éléments.

Cinq groupes isolés au sein d'une grande famille.

Dans la théorie des groupes finis comme dans de nombreux autres domaines, les grandes idées viennent souvent d'ailleurs. L'influence extérieure la plus décisive fut certainement celle des groupes de Lie ou, comme on disait jadis, des groupes continus. Vers 1890, l'Allemand Killing et le Français E. Cartan achevèrent une classification des groupes de Lie simples de dimension finie à coefficients complexes qui fait appel aux diagrammes de Dynkin (fig. 5).

Or, parallèlement, entre 1870 et 1900 un effort systématique visant à découvrir et classer les groupes simples finis est entrepris, principalement sous l'impulsion de Jordan et de l'école américaine de mathématiciens qui naît à cette époque. Aussi ne s'étonne-t-on pas de constater qu'une des approches adoptées consiste à rechercher des analogues finis des groupes de Lie et, vers 1900, Dickson réalise une synthèse de tous les travaux. Pour ce faire, il dispose d'analogues finis pour les groupes correspondant aux diagrammes de Dynkin de type A_n, B_n, C_n, D_n, G_2 (fig. 5). A chacun de ces diagrammes et pour un nombre n fixé, correspond cette fois une classe infinie de groupes simples finis. Après Dickson, la découverte de nouveaux groupes simples finis resta bloquée pendant cinquante ans, et les seuls autres groupes simples finis connus à l'époque étaient les *groupes alternés* et cinq groupes décrits par E. Mathieu entre 1861 et 1873. Les groupes alternés sont en fait des sous-groupes des groupes symétriques S_n, dont toutes les permutations sont constituées par un nombre pair d'inversions. C'est-à-dire que le nombre de fois où deux éléments i et j, situés successivement dans E, voient leur ordre inversé à la suite d'une permutation p, est un nombre pair. Dans S_3, i, j et k sont des permutations paires et le sous-groupe $\{i, j, k\}$ est le groupe alterné de S_3. Quant aux groupes de Mathieu, ils sont complètement isolés. Dans un traité demeuré célèbre, Burnside les qualifie de *groupes sporadiques.* Ils sont peu étudiés, considérés comme des curiosités et indignes d'une attention prolongée.

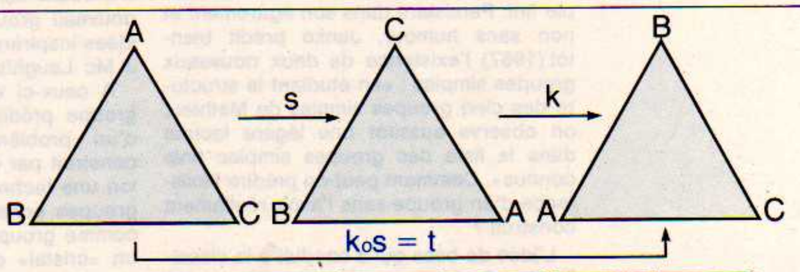
Pendant ce temps mort d'un demi-siècle, la structure des groupes de Lie est approfondie et mieux comprise. D'une théorie fondée sur le calcul différentiel, elle se transforme de plus en plus en théorie algébrique fondée sur des polynômes grâce notamment à la contribution de C. Chevalley de l'institut Henri Poincaré. En 1955, il livre un procédé algébrique uniforme qui permet d'associer à tout diagramme de Dynkin et à tout corps fini un groupe simple fini couronnant ainsi de succès les efforts entrepris soixante ans plus tôt. L'exploitation de ses idées et l'étude des symétries au sein des nouveaux groupes conduisent J. Tits, Hertzig, Steinberg, Ree et Suzuki à découvrir de nouvelles familles infinies de groupes simples finis. En 1960, le bilan de la théorie de Lie Chevalley établit l'existence de seize familles infinies de groupes simples finis. Il convient d'y ajouter la classe des groupes alternés et... les cinq groupes de Mathieu, toujours aussi sporadiques. Il apparaît que les possibilités offertes par les idées de Chevalley ont été entièrement explorées et que l'imagination est à puiser ailleurs.

Rattachés grâce aux centralisateurs.

Une question commence à faire timidement surface. Les groupes simples finis seraient-ils tous connus ? Cette question est d'autant plus pertinente que le classement opéré par la théorie de Lie-Chevalley permet de donner une description exhaustive des groupes simples finis déjà connus. Pour déterminer la totalité des groupes possibles, deux éléments interviendront : la technique des centralisateurs, brillamment utilisée par R. Brauer, et le théorème de W. Feit et J. Thompson, qui montre que l'ordre d'un groupe simple fini est un nombre pair. Ces deux facteurs ont orienté l'évolution de la recherche et conditionné la construction des exemples et des contre-exemples. Ils ont donc conduit à restreindre progressivement le domaine d'existence possible des groupes simples finis, jusqu'à ce qu'il recouvre la totalité des seuls groupes simples finis existants.

Mais qu'est-ce qu'un centralisateur ? Si G est un groupe et g un élément de G, le centralisateur $C_G(g)$ de g est l'ensemble des éléments x de G tels que $xg = gx$. $C_G(g)$ est un sous-groupe de G. Ainsi, dans le groupe S_3, le centralisateur de k est $\{i, j, k\}$, le centralisateur de r est $\{i, r\}$ et bien sûr le centralisateur de i est S_3.

L'utilisation des centralisateurs pour classer les groupes simples finis a été proposée dès 1954 par R. Brauer et elle a fait lentement son chemin. Ce classement utilise les centralisateurs de certains éléments très particuliers qu'on appelle les involutions. Une involution est un élément g du groupe G, tel que $g^2 = 1$ et $g \neq 1$. Ainsi, dans S_3, les involutions sont les éléments r, s et t, et les centralisateurs



o	i	j	k	r	s	t
i	i	j	k	r	s	t
j	j	k	i	s	t	r
k	k	i	j	t	r	s
r	r	t	s	i	k	j
s	s	r	t	j	i	k
t	t	s	r	k	j	i

Figure 3. **Le groupe des transformations qui ne modifient pas la forme d'un triangle équilatéral E de sommets (A, B, C) possède six éléments :**

$$i = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix};\ j = \begin{pmatrix} B \\ C \\ A \end{pmatrix};\ k = \begin{pmatrix} C \\ A \\ B \end{pmatrix};$$

$$r = \begin{pmatrix} A \\ C \\ B \end{pmatrix};\ s = \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix};\ t = \begin{pmatrix} B \\ A \\ C \end{pmatrix};$$

Toute composition de deux d'entre eux (s et k par exemple) est égale à un troisième (t). En effet,

$$(k \circ s)(E) = k \circ (s(E)) = k \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ A \\ C \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

On peut répéter ce raisonnement pour tous les couples et remplir ainsi la table de multiplication du groupe. Elle se lit de la façon suivante : le résultat de la composition (du produit) de s par k, (k∘s) se trouve à l'intersection de la ligne s et de la colonne k. On retrouve t.

Cinq groupes sporadiques en 1873, huit en 1967, le 26e et dernier en 1980.

de ces involutions sont {i, r} {i, s} et {i, t}.

La technique des centralisateurs avait déjà permis à M. Suzuki de construire ses groupes, lesquels ont rapidement été récupérés par la théorie de Lie-Chevalley. Cette même technique devait permettre à W. Feit et J. Thompson de démontrer en 1963 une ancienne conjecture de Burnside. Leur résultat affirme, au bout d'un raisonnement par l'absurde de 255 pages imprimées, que tout groupe simple fini a un nombre pair d'éléments. Il renforce donc l'espoir de parvenir à classer les groupes simples finis. Aussitôt que ces résultats sont publiés, une foule de tentatives de classification démarrent de par le monde et le scandale éclate en 1966 lorsque Z. Janko produit un nouveau groupe sporadique J_1 d'ordre 175 560, un nombre impressionnant à l'époque mais en fait très peu élevé pour un groupe simple fini. Persistant dans son égarement et non sans humour, Janko prédit bientôt (1967) l'existence de deux nouveaux groupes simples : «en étudiant la structure des cinq groupes simples de Mathieu, on observe aussitôt une légère lacune dans la liste des groupes simples finis connus». Comment peut-on prédire l'existence d'un groupe sans l'avoir réellement construit ?

L'idée de base qui a conduit à la classification finale des groupes simples a été de rechercher les groupes qui apparaissent comme centralisateurs d'involutions des groupes simples. Ceci parce qu'un théorème de Brauer-Fowler affirme que le nombre de groupes possédant une involution, ayant un centralisateur donné, est fini. Il devait donc être possible, en principe, de déterminer tous ces groupes. Or, le théorème de Feit-Thompson impose pour des raisons de parité qu'un groupe simple fini possède au moins une involution. A titre d'exemple, Z. Janko prouve que ce résultat s'applique sans ambiguïté au groupe simple J_1.

L'histoire qui précède illustre parfaitement la démarche suivie par le théoricien : il part d'un ensemble de propriétés qui lui paraissent intéressantes et recherche tous les groupes qui ont ces propriétés. Dans la majorité des cas, il démontre que ces groupes sont déjà connus ou que ces groupes n'existent pas. Il peut arriver que le groupe ne figure pas dans la liste des groupes connus et que les propriétés s'accumulent sans contradiction apparente à un point tel que l'existence d'un nouveau groupe s'impose, même si celle-ci demeure incertaine. Cette aventure rappelle la découverte des géométries non-euclidiennes au siècle passé ou celle de la planète Neptune dont l'existence fut prédite par Leverrier et Adams sur une base théorique avant d'être observée.

Fin 1967, on pouvait donc affirmer que les groupes sporadiques étaient lancés ! Désormais, ces groupes simples isolés sans liens apparents avec les groupes de Chevalley étaient au nombre de huit ; les cinq groupes de Mathieu et les trois de Janko.

Au contraire de Mathieu, qui n'avait guère influencé la recherche jusqu'alors et qui était venu au fond un siècle trop tôt, le travail de Z. Janko eut immédiatement une audience retentissante. Il montrait que les espoirs de la classification totale devaient être mesurés et surtout que les méthodes de R. Brauer permettaient de découvrir de nouveaux groupes. La chasse aux groupes simples sporadiques devint rapidement un sport à la mode parmi les experts de théorie des groupes. M. Hall et D. Wales construisirent un des groupes prédits par Janko à l'aide d'une analyse algébrique et géométrique ainsi que d'un ordinateur. Il s'agit du groupe J_2. G. Higman et J. Mc Kay en firent de même pour le troisième groupe de Janko noté J_3. La construction de J_2 fut exposée par M. Hall à Oxford en présence de G. Higman et C. Sims qui s'en inspirèrent immédiatement pour produire à la main un nouveau groupe noté HS (1967) et leurs idées inspirèrent d'autres constructions à J. Mc Laughlin et M. Suzuki (1968).

A ceux-ci vinrent s'ajouter bientôt un groupe prédit par D. Held, à l'occasion d'un problème de centralisateurs et construit par G. Higman et J. Mc Kay selon une technique éprouvée (1968) ; trois groupes construits par J. Conway (1968) comme groupes de rotations conservant un «cristal» dans un espace de dimension 24 ; trois groupes construits par B. Fischer (1969) selon une approche fondée sur les centralisateurs et des idées géométriques ; un groupe prédit par R. Lyons et construit par C. Sims avec un ordinateur (1970) ; un groupe prédit par A. Rudvalis, construit par J. Conway et D. Wales (1973) ; un groupe prédit par M. O'Nan et construit par C. Sims avec un ordinateur (1973). Les chasseurs de groupes les plus habiles rivalisèrent à qui construirait le plus grand. Avec son groupe F_{24} dont l'ordre de grandeur est 10^{24}, B. Fischer détenait le record en 1973 (fig. 6).

Le temps des Monstres.

En 1973, B. Fischer, reprenant des idées qui l'ont conduit à trois nouveaux groupes en 1969, et R. Griess qui travaille sur un problème de centralisateurs sont amenés indépendamment l'un de l'autre à prédire l'existence d'un groupe sporadique dont l'ordre de grandeur atteint un sommet démesuré : 10^{53}. Ce sera M ou F_1 : le Monstre de Fischer-Griess. Au sein de celui-ci, trois autres sous-groupes sont mis en évidence comme centralisateurs d'éléments d'ordre 2, 3, 5. Le premier livre un autre groupe sporadique de 10^{33} éléments, appelé le Bébé-Monstre de Fischer, dont l'existence est établie en 1976 par Leon et C. Sims à l'aide d'un ordinateur. Le second permet à Thompson et Smith de construire un nouveau groupe (ordre 10^{16}) et le troisième fournit un autre groupe sporadique (ordre 10^{14}) grâce aux efforts combinés d'une équipe composée de K. Harada, S. Norton et F. Smith. En 1975, Janko avait provoqué la ruée vers les groupes sporadiques mettra un point qui semble devoir être final aux prédictions de groupes nouveaux : il prédit l'existence du vingt-sixième groupe sporadique noté J_4. Le 20 février 1980, un programme d'ordinateur et une équipe conduite par J. Conway et S. Norton achèvent de prouver l'existence de J_4. Aujourd'hui le filon est épuisé. Depuis le congrès qui avait réuni à Santa-Cruz (Californie) environ cent-vingt experts durant un mois en 1979, on savait qu'une classification complète était en voie d'achèvement. L'annonce officielle du terme de la classification fut faite au congrès de l'American Mathematical Society en janvier 1981. Ainsi la liste complète des groupes simples finis consiste en dix-sept classes infinies et vingt-six groupes isolés dits sporadiques. Il s'agit là d'un résultat marquant dans les annales de la science non seulement par sa valeur intrinsèque et par le champ d'applications qu'il ouvre mais aussi par l'exemple méthodologique qu'il nous offre.

La récolte de nouveaux groupes s'est déroulée dès le début dans un contexte plus large, à savoir un gigantesque effort de classification approfondissant l'impulsion initiale de R. Brauer. Des dizaines de chercheurs allaient participer, durant une vingtaine d'années, à l'expédition dirigée par D. Gorenstein. Dès 1972, celui-ci décrivit un programme de classification détaillé et il revint régulièrement sur ce thème. En 1974, il prédisait qu'en 1990 la moitié la plus abordable du programme serait achevée. Puis les experts se chuchotèrent de bouche à oreille que D. Gorenstein laissait entendre qu'une classification complète verrait le jour dans un avenir proche, puis en moins de vingt-cinq ans. Les plus optimistes ne manquaient pas de souligner qu'à leur avis Gorenstein était utopiste. Mais le prophète allait trouver un apôtre en la personne de M. Aschbacher qui apporta des simplifications substantielles au programme de Gorenstein accélérant ainsi le processus de manière considérable. M. Aschbacher, dans une série d'articles à grand retentissement, fit la synthèse des méthodes de Thompson qui avaient révolutionné la décennie précédente et les méthodes géométriques de B. Fischer en y injectant ses propres idées. Il fit si bien, qu'en 1976 il devint clair qu'on viendrait à bout de la classification. Restait à savoir quand ? C'est chose faite depuis l'année dernière.

Avec M. Aschbacher, D. Gorenstein aura été lui-même le grand artisan de cette classification. Il a pu déclarer qu'il avait consacré au problème cinq heures par jour pendant plus de quinze ans. Il n'empêche que l'ensemble de la classification résulte de la mise en commun des résultats de plusieurs dizaines de personnes et Gorenstein estime que la première synthèse exigera environ 5 000 pages imprimées. Dès à présent, un mouvement de «révisionnisme» visant à simplifier et réduire ce volume est engagé par divers chercheurs.

Une tâche dès à présent entreprise est

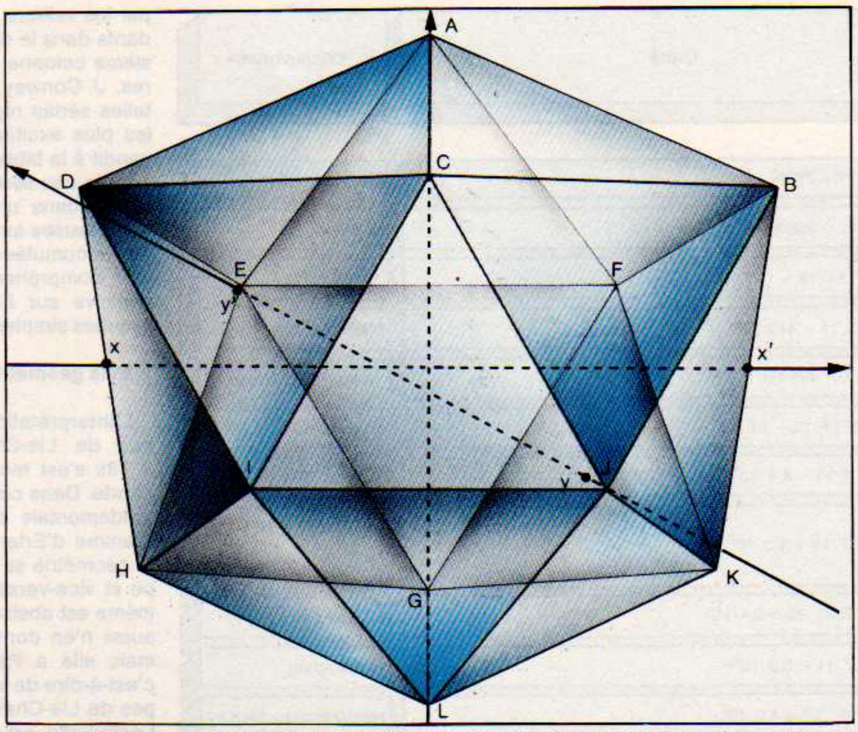


Figure 4. **L'icosaèdre est un solide régulier à vingt faces et douze sommets. Le groupe des rotations de cet objet, c'est-à-dire des déplacements qui lui conservent sa forme avec le même ordre de succession des sommets dans la même portion d'espace, possède 60 éléments. On peut les énumérer exhaustivement comme suit :**

1. L'identité, qui laisse l'icosaèdre dans la même position.

2. Les rotations de 180° = π autour des axes qui joignent les milieux des arêtes opposées, par exemple xx'. Ces rotations sont au nombre de 15, une pour chaque paire d'arêtes.

3. Les rotations de 120° = $\frac{2\pi}{3}$ autour des axes qui joignent les centres des faces opposées ; par exemple yy'. Ces rotations sont au nombre de 20 car, à chaque rotation de $\frac{2\pi}{3}$ sur une face, correspond une rotation de $\frac{4\pi}{3}$ sur la face opposée.

4. Les rotations de 36° = $\frac{\pi}{5}$ autour des axes qui joignent les sommets opposés ; par exemple AL. Ces rotations sont au nombre de 12.

5. Les rotations de 72° = $\frac{2\pi}{5}$ autour des mêmes axes que celles de 36° sont au nombre de 12.

Les 60 rotations de l'icosaèdre constituent le plus petit groupe simple non-commutatif.

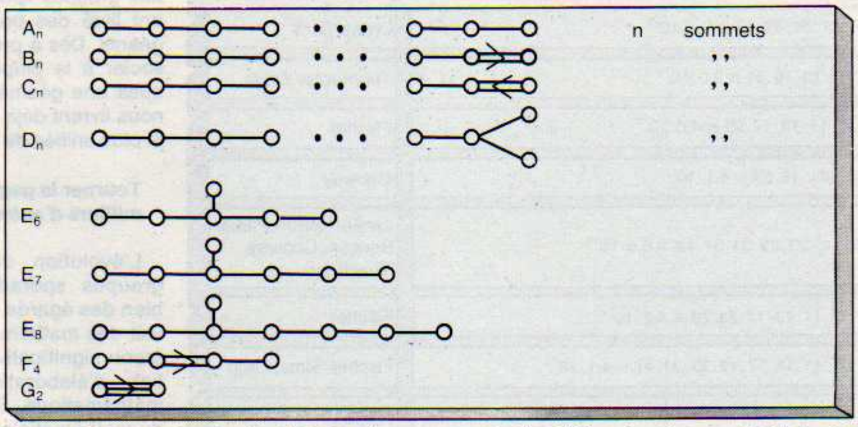


Figure 5. **Pour achever la classification des groupes simples finis entreprise par E. Galois, les mathématiciens se sont inspirés des travaux de W. Killing et E. Cartan qui étaient parvenus en 1890 à classer une autre famille de groupes, infinis quant à eux, les groupes de Lie. Sans entrer dans le détail de la théorie, on peut en apprécier la puissance à partir du moment où l'on sait lire un diagramme de Dynkin, car la classification consiste tout simplement en une liste de diagrammes de Dynkin. Un tel diagramme est un schéma constitué de ronds et de traits simples, doubles ou triples, parfois surmontés de flèches qui permet de reconstituer le groupe de Lie.**

A chacun des diagrammes de cette liste correspond grosso-modo un groupe de Lie simple et réciproquement. Les groupes correspondant aux diagrammes A_n, B_n, C_n, D_n sont dits classiques. Les cinq groupes de Lie correspondant aux autres diagrammes sont dits exceptionnels.

de mieux comprendre les groupes sporadiques, de rompre en quelque sorte leur isolement en trouvant ce qu'ils ont en commun avec les groupes de Lie-Chevalley. Une première observation importante dans la direction de l'unité est que le Monstre contient 20 des 26 groupes sporadiques parmi ses sous-groupes. Les rebelles sont J_4, O'N, Ru, J_3, Ly, J_1. Pourquoi est-ce important ? Parce qu'en construisant le Monstre, on construit en même temps la plupart des autres groupes sporadiques et qu'on trouve une sorte de base unifiée à leur exploration. Ceci avait déjà été compris à l'époque où J. Conway construisit C_1 qui contenait lui-même la majorité des groupes sporadiques connus à l'époque et l'exemple le plus ancien est celui du groupe de Mathieu M_{24} qui contient les quatre autres groupes de Mathieu. Cette observation doit être tempérée : la construction d'un groupe exige souvent la connaissance préalable d'un groupe sporadique plus petit. Ainsi la construction de M est fondée sur celle de C_1 et celle-ci est fondée sur M_{24}. Il n'est pourtant pas interdit d'espérer des progrès dans cette voie. Une construction récente de C_1 par J. Tits en témoigne.

Le Monstre avait-il été injustement baptisé ? En l'honneur de ses pères B. Fischer et R. Griess, mieux vaut sans doute le noter FG pour «Friendly Giant» ou Géant Amical.

Une autre observation relève de l'expérimentation pure et la théorie n'a pas encore permis de l'expliquer. L'affaire est résumée dans un article de J. Conway et S. Norton intitulé «Monstruous moonshine», qui évoque à la fois la lumière incertaine jetée sur le sujet et le caractère quelque peu illicite de celui-ci. Ce travail est fondé sur l'accumulation de coïncidences numériques troublantes. On rencontre, en théorie des nombres, la fonction j de Jacobi définie par une série de puissances, $j(z) = q^{-1} + 744 + 196\,884\,q + 21\,493\,760\,q^2 + \ldots = \sum_{r=-1} a_r q^r$ où $q = e^{2\pi i z}$. Le nombre 744 a peu de signification ; il pourrait être remplacé par un autre sans perte de propriétés importantes. Le coefficient suivant, 196 883 + 1, nous rappelle la dimension de l'espace dans lequel R. Griess construit M ; cette observation fut faite par J. Mc Kay. Pour aller de l'avant, il nous faut introduire un des outils les plus puissants associés à un groupe : sa table de caractères. Pour M, il s'agit d'une matrice carrée à 194 entrées qu'il est exclu de reproduire ici et qui a été élaborée par B. Fischer, D. Livingstone et Thorne. Les caractères de la première colonne sont les *degrés*. Thompson observa que *tous* les premiers coefficients de la fonction j (excepté 744) sont des combinaisons linéaires simples des degrés du Monstre :

$$1 = 1,\ 196\,884 = 1 + 196\,883,$$
$$21\,493\,760 = 1 + 196\,883 + 21\,296\,876, \text{etc.}$$

J. Thompson suggéra que la fonction j pourrait donner lieu à d'autres séries intéressantes en remplaçant ces coefficients

Les travaux de recherche seront plus nombreux après qu'avant la classification.

Groupe	Ordre	Découvreurs*
M_{11}	$2^4.3^2.5.11 = 7920$	Mathieu
M_{12}	$2^6.3^3.5.11 = 95040$	Mathieu
J_1	$2^3.3.5.7.11.19 = 175.560$	Janko
M_{22}	$2^7.3^2.5.7.11 = 443.520$	Mathieu
J_2	$2^7.3^3.5^2.7 = 604.800$	Janko/Hall, Wales
M_{23}	$2^7.3^2.5.7.11.13 \simeq 1{,}0.10^7$	Mathieu
HS	$2^9.3^2.5^3.7.11 \simeq 4{,}4.10^7$	Higman, Sims
J_3	$2^7.3^5.5.17.19 \cong 5{,}0.10^7$	Janko/Higman, McKay
M_{24}	$2^{10}.3^3.5.7.11.23 \cong 2{,}4.10^8$	Mathieu
McL	$2^7.3^6.5^3.7.11 \cong 8{,}9.10^8$	McLaughlin
He	$2^{10}.3^3.5^2.2^3.17 \cong 4{,}0.10^9$	Held/Higman, McKay
Ru	$2^{14}.3^3.5^3.7.13.29 \cong 1{,}4.10^{11}$	Rudvalis/Conway, Wales
Sz	$2^{13}.3^7.5^2.7.11.13 \cong 4{,}4.10^{11}$	Suzuki
O'N	$2^9.3^4.5.7^3.11.19.31 \cong 4{,}6.10^{11}$	O'Nan/Sims
C_3	$2^{10}.3^7.5^3.7.11.23 \cong 4{,}9.10^{11}$	Conway
C_2	$2^{18}.3^6.5^3.7.11.23 \cong 4{,}2.10^{13}$	Conway
F_{22}	$2^{17}.3^9.5^2.7.11.13 \cong 6{,}4.10^{13}$	Fischer
HN	$2^{14}.3^6.5^6.7.11.19 \cong 2{,}7.10^{14}$	Harada,Norton/Smith
Ly	$2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67 \cong 5{,}1.10^{16}$	Lyons/Sims
T	$2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31 \cong 9{,}0.10^{16}$	Thompson/Smith
F_{23}	$2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23 \cong 4{,}0.10^{18}$	Fischer
C_1	$2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23 \cong 4{,}1.10^{18}$	Conway
J_4	$2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.31.37.43 \cong 8{,}6.10^{19}$	Janko/Norton,Parker Benson, Conway, Thachray
F_{24}	$2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29 \cong 1{,}2.10^{24}$	Fischer
FM	$2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.19.23.31.47 \cong 4{,}1.10^{33}$	Fischer/Sims, Leon
FG = M	$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71 \cong 8{,}0.10^{53}$	Fischer, Griess/Griess

*(un trait sépare les noms des mathématiciens ayant prédit le groupe de ceux qui l'ont construit)

Figure 6. **Les groupes simples finis dont la classification s'est achevée en 1980 se décomposent en 17 familles infinies et en 26 groupes isolés qu'on appelle sporadiques. A l'heure actuelle, il n'est pas possible de donner une définition des groupes sporadiques autre que celle consistant à en dresser la liste. Un des buts des recherches en cours est précisément d'unifier ces groupes autant que possible.**

par les valeurs des caractères correspondants dans la deuxième colonne et la troisième colonne de la matrice des caractères. J. Conway raconte que le calcul de telles séries représente un des moments les plus excitants de sa carrière. Il descendit à la bibliothèque et retrouva certaines de ces séries avec les mêmes coefficients dans un ouvrage de Jacobi. De nombreuses autres observations ont ainsi été accumulées. L'espoir est grand que leur compréhension aura une influence décisive sur l'avenir de la théorie des groupes simples finis.

Et la géométrie ?

L'interprétation géométrique des groupes de Lie-Chevalley développée par J. Tits s'est montrée particulièrement féconde. Dans cette conception, dont l'idée fondamentale remonte au fameux programme d'Erlangen de F. Klein de 1872, la géométrie se construit à partir du groupe et vice-versa. La construction en elle-même est abstraite et difficile à visualiser, aussi n'en donnerons-nous pas le détail mais elle a l'avantage d'être uniforme, c'est-à-dire de s'appliquer à tous les groupes de Lie-Chevalley (et à bien d'autres). Lorsqu'elle est appliquée à des groupes déterminés, elle permet de retrouver des géométries classiques comme la géométrie projective et la géométrie d'une quadrique. J. Tits a plus particulièrement travaillé à l'interprétation des diagrammes de Dynkin et a montré qu'à partir d'un diagramme donné on peut lire les principales propriétés des géométries associées. De cette manière, un diagramme détermine une famille de géométries et de groupes qui apparaissent cette fois comme groupes de symétries des géométries. L'œuvre considérable consacrée à ce sujet est ce qu'on appelle la théorie des Immeubles. Des tentatives d'extension de cette théorie aux groupes sporadiques sont à l'étude et ont livré des premiers résultats encourageants. Dès à présent, il est possible d'associer à la plupart des groupes sporadiques une géométrie et un diagramme qui nous livrent déjà une vision plus structurée et plus unifiée de ces groupes (fig. 7).

Tourner la page pour en noircir des milliers d'autres.

L'évolution des recherches sur les groupes sporadiques est révélatrice à bien des égards. Elle saisit sur le vif le travail des mathématiciens et elle éclaire de façon significative les processus de création, d'élaboration et de production en mathématique. Sur le plan de la relation du mathématicien avec la communauté de ses pairs, elle dévoile un lien de profonde dépendance : celui-ci est tenu à s'informer en permanence de l'état d'évolution de la question qu'il étudie et, réciproquement, chacune de ses démonstrations apporte une modification au problème étudié par ses collègues. Ainsi C. Chevalley, R. Brauer et J. Thompson ont toujours, quel qu'ait été leur génie ou leur person-

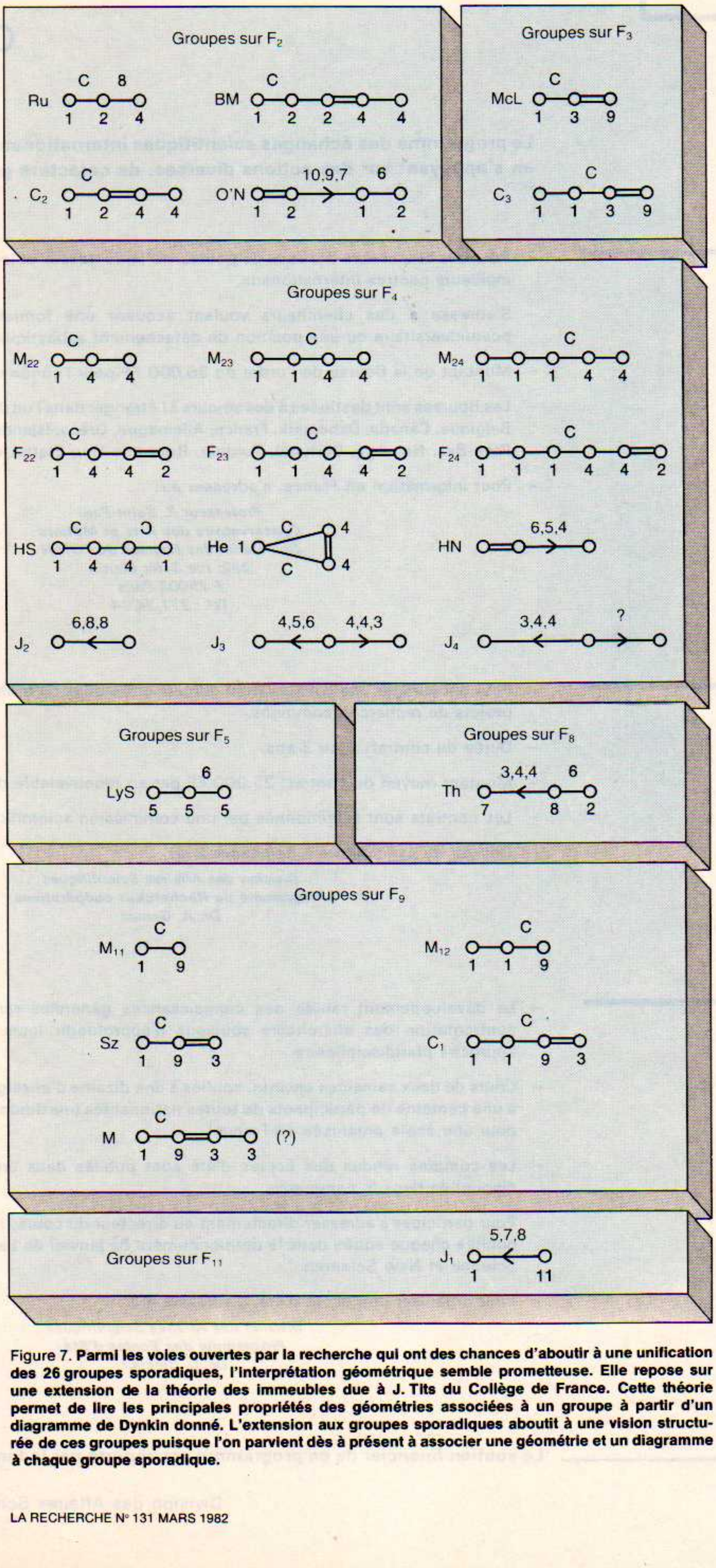


Figure 7. **Parmi les voies ouvertes par la recherche qui ont des chances d'aboutir à une unification des 26 groupes sporadiques, l'interprétation géométrique semble prometteuse. Elle repose sur une extension de la théorie des immeubles due à J. Tits du Collège de France. Cette théorie permet de lire les principales propriétés des géométries associées à un groupe à partir d'un diagramme de Dynkin donné. L'extension aux groupes sporadiques aboutit à une vision structurée de ces groupes puisque l'on parvient dès à présent à associer une géométrie et un diagramme à chaque groupe sporadique.**

nalité, travaillé en symbiose avec le milieu mathématique, alors qu'en d'autres temps un Gauss se permettait de ne communiquer que ce qu'il jugeait bon de diffuser. Cette modification historique est consécutive à la difficulté croissante, née de la surabondance des productions mathématiques, de maîtriser seul la totalité de la matière disponible. De là le rôle du travail en équipe, que nous avons souvent rencontré dans la construction des groupes sporadiques.

Sur le plan de la pratique de la recherche la grande première aura été l'utilisation massive de l'ordinateur comme outil de production mathématique : ainsi l'existence de plusieurs groupes sporadiques a été établie par la machine exclusivement. La classification des groupes illustre aussi la difficulté de la recherche mathématique et la pratique parfois hésitante des chercheurs. J. Conway et J. Thompson n'hésitent pas à avouer les erreurs qu'ils ont commises et D. Gorenstein reconnaît la nécessité d'un programme «révisionniste» ; autant de preuves que la mathématique est une science en élaboration permanente et que la simplicité et la beauté de ses chapitres les plus célèbres sont le fruit d'efforts soutenus de la part de générations de mathématiciens.

Parvenus au terme de notre exploration, une question s'impose : quel est l'avenir des groupes sporadiques ? Qu'il nous soit permis de conclure en citant J. Conway dans «*Monsters and moonshine*» : «Pourtant, il semble que toutes ces inquiétudes seront probablement apaisées, et que la vaste démonstration collective sera soigneusement débroussaillée, simplifiée et enchâssée en quelques épais volumes. Y aura-t-il alors quelque chose encore à faire pour les théoriciens des groupes finis ? Oui ! Beaucoup ! Les comprendre en totalité, voilà déjà quelque chose. Peut-être la meilleure comparaison serait-elle à faire avec la classification par nos grand-parents des groupes de Lie ? Loin d'en arrêter l'étude, ce résultat provoqua un énorme travail de compréhension, d'explication et de généralisation des propriétés de ces groupes. En réalité beaucoup plus de travaux furent entrepris sur ces groupes *après* leur classification qu'*avant* elle.» ■

Pour en savoir plus :

■ H. Weyl, *Symétrie et mathématique moderne*, Flammarion.

■ F. Buekenhout, J. Doyen, *Groupes de symétries*, I, II, Presses Univ. Bruxelles.

■ J. Tits, *Buildings and finite BN-pairs of spherical type*, Springer.

■ J.H. Conway, *Monsters and moonshine. The mathematical intelligencer*, vol. 2, Springer, 1980

■ The Santa-Cruz conference on finite groups. *Proceedings of symposia in pure mathematics*, vol. 37, American Math. Soc., 1980.