Etudes de fonctions : procédures et exemple

Yves Delhaye

14 mai 2010

Résumé

Dans ce court travail, nous présentons les différentes étapes d'une étude de fonction à travers un exemple.
Nous nous limitons à des fonctions réelles d'une variable réelle.
Et même strictement à un quotient de polynômes.
Nous essayons de présenter chacune des étapes non seulement du point de vue mathématique strict (cà d. "faire les opérations rigoureusement") mais aussi du point de vue du "sens mathématique" ("pourquoi faire ceci à ce moment précis").
Le texte est encore un mélange de notes de cours destinées aux élèves et de notes plus personnelle du type "notes dans les marges à destination des enseignants".
Ceci sert aussi de préparation pour un "générateur d'interrogation" destiné aux études de fonctions.
Nous utilisons deux "packages" (ou librairies) spécialisés l'un pour les sorties graphiques (`pgf/tikz`), l'autre (`sagetex`) qui fait appel à un "méta-programme" de calcul formel (`sage`) pour le maximum de calcul (racines, ordonnées, limites, asymptotes, derivées, tangentes, ...). Nous faisons aussi appel à `sage` pour générer le graphique et les différents tableaux en utilisant le fait que `sage`.est écrit en `python` et que nous pouvons programmer en `python` dans les blocs de calcul formel de `sage`.
Il s'agit d'un "bac à sable" pour de futurs projets donc !
La table des matières est "cliquable".

Table des matières

1 Introduction

Les fonctions sont présentes partout :

En sciences, si nous étudions l'évolution d'une réaction chimique, les forces électriques entre des corps chargés, les liaisons chimiques, la croissance de plantes ou de population de bactéries.

En économie, lorsque nous devons nous pencher sur l'évolution d'un marché ou la rentabilité d'une société.

En mathématique, leur étude nous prépare à d'autres surprises.

Réaliser une étude de fonction rigoureusement est la clé de la compréhension de phénomènes qui sont, autrement, incompréhensibles.

Nous allons, à titre d'exemple prendre une fonction et l'étudier complètement.

1.1 Plan

Il faut tout d'abord avoir un plan des différentes étapes à réaliser. Ces étapes ne sont pas indépendantes et s'enchaînent logiquement. Dans l'introduction de chaque étape, nous discuterons d'ailleurs du pourquoi de "cette étape maintenant". Nous repasserons sur chacune de ces étapes en fin de travail pour nous rappeler la raison de leur enchaînement.

Périodicité

Zéros

Domaine

Limites

Etude du signe

Asymptotes

Dérivées

Tableau de variation

Valeurs pour quelques points

Tangentes

Graphique

2 La fonction

Il y a différents types de fonctions :

les puissances,

les polynômes,

les fonctions trigonométriques,

les fonctions exponentielles,

et toutes les combinaisons possibles des précédentes...

2.1 Choix de fonction

Choisissons une première fonction[1] :

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{(x^4 + 5\,x^3 + 2\,x^2 - 20\,x - 24)}{(x^3 + 8\,x^2 + 21\,x + 18)}$$

Ce qui signifie que

$$l(x) = \frac{(x^4 + 5\,x^3 + 2\,x^2 - 20\,x - 24)}{(x^3 + 8\,x^2 + 21\,x + 18)}$$

Il s'agit donc d'un rapport de 2 polynômes.

2.2 Numérateur et dénominateur

La fonction $l(x)$ peut donc s'écrire comme le rapport de deux fonctions $i(x)$ et $j(x)$:

$$l(x) = \frac{i(x)}{j(x)}$$

où

$$g : R \to R : x \to x^4 + 5\,x^3 + 2\,x^2 - 20\,x - 24$$

et où

$$h : R \to R, x \to x^3 + 8\,x^2 + 21\,x + 18$$

2.3 Factorisations

Commençons par factoriser numérateur et dénominateur. Ceci afin, éventuellement, de simplifier l'écriture.

Nous préparons, ce faisant, deux points suivants : la recherche des zéros et l'étude du domaine de la fonction.

Cherchons des valeurs de x pour lequelles $i(x)$ et $j(x)$ s'annulent.

Nous avons choisi des fonctions "gentilles". Essayons donc quelques valeurs entières (-3, -2, ..., 3) pour les x de $i(x)$ et $j(x)$.

$i(x)$ s'annule pour les valeurs suivantes de x : $[x = (-3)\,, x = 2, x = (-2)]$ $i(x)$ est un polynôme de puissance quatre et peut donc s'écrire comme le produit des quatre monômes suivants :

$$i(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x - a)$$

Il nous manque encore a.

Développons donc $i(x)$ en polynômes.

$$\begin{aligned} i(x) &= x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 \\ &= x^4 + 3x^3 - ax^3 - 3ax^2 - 4x^2 + 4ax - 12x + 12a \\ &= x^4 + (3 - a)x^3 - (3a + 4)x^2 + (4a - 12)x + 12a \end{aligned}$$

Nous voyons immédiatement que $a = -2$.

1. Nous nous limiterons dans les faits à une version légement simplifiée $(f(x))$ de cette fonction.

$i(x)$ peut donc s'écrire :

$$i(x) = (x-2)(x+2)^2(x+3)$$

$j(x)$ s'annule pour les valeurs suivantes de x : $[x = (-2)\, , x = (-3)]$. et, si nous faisons le même type de raisonnement que pour $i(x)$, $j(x)$ s'écrira

$$j(x) = (x+2)(x+3)^2$$

$l(x)$ est alors équivalente à :

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)^2(x+3)}{(x+2)(x+3)^2}$$

Si nous simplifions alors $l(x)$ est alors presque[2] équivalente à la fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x+3}$$

ou encore

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$$

Nous écrirons donc $f(x)$ comme un rapport de deux fonctions plus simples : $g(x)$ et $h(x)$.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

où

$$g(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

et où

$$h(x) = x + 3$$

3 Périodicité

Cette fonction n'est pas périodique. Nous discuterons cette question dans un autre exemple.

4 Zéros, intersections avec les axes

4.1 Intersections avec l'axe horizontal

Savoir où une fonction s'annule prépare l'étude des signes. $f(x)$ s'annule là où $g(x)$ s'annule. Dans notre cas pour $x = \{-2\,;2\}$.

4.2 Intersections avec l'axe vertical

Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0)$ et

$$f(0) = -\frac{4}{3}$$

2. sauf pour le domaine

5 Domaine

Savoir où une fonction n'existe pas prépare aussi l'étude des signes mais également l'étude des limites. $f(x)$ n'existe pas là où $h(x)$ s'annule. Dans notre cas pour $x = -3$.

Le domaine de $f(x)$ est donc :

$$dom\ l = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$$

6 Limites

Pas de grosse surprise ici. Il faut chercher la limite à gauche et la limite à droite de $f(x)$ autour de $x = -3$.

La limite à gauche est

$$\lim_{x\to-3,\ x<-3} f(x) = -\infty$$

La limite à droite est

$$\lim_{x\to-3,\ x>-3} f(x) = +\infty$$

7 Étude du signe

Pour étudier le signe de f(x), nous devons considérer les signes de $g(x)$ et de $h(x)$.

x		-3		-2		2	
$g(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$h(x)$	-	0	+	+	+	+	+
f(x)	-	$\pm\infty$	+	0	-	0	+

8 Asymptotes

8.1 Asymptotes verticales

8.1.1 Définition

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la fonction $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

8.1.2 Technique de recherche

L'étude du domaine de la fonction permet, sauf surprise, de trouver la (ou les) asymptote(s) verticale(s).

8.1.3 Détermination

L'asymptote verticale de f(x) est donc la droite d'équation $x = -3$.

8.2 Asymptotes horizontales

8.2.1 Définition

La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale de la fonction $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

8.2.2 Technique de recherche

Il suffit de chercher les limites. Ce qui sera déterminant ici sera la comparaison des degrés de $g(x)$ et de $h(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

8.2.3 Détermination

Il n'y a pas d'asymptote horizontale dans ce cas.

8.3 Asymptotes obliques

8.3.1 Définition

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique de la fonction $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

8.3.2 Technique de recherche

En conséquence de la définition, nous pouvons écrire :

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

et

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

8.3.3 Détermination

$$a_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$b_+ = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = -3$$

$$a_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$b_- = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = -3$$

Nous obtenons donc, en $+\infty$ comme en $-\infty$, $a = 1$ et $b = -3$.

La droite $y = x - 3$ est donc l'asymptote oblique de de $f(x)$.

9 Dérivées

9.1 Dérivée première

9.1.1 Détermination

Comme $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, la dérivée première de $f(x)$ est du type :

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

La dérivée première de f(x) est

$$f'(x) = 2\,\frac{x}{(x+3)} - \frac{x^2}{(x+3)^2} + 4\,\frac{1}{(x+3)^2}$$

ou

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 6\,x + 4)}{(x^2 + 6\,x + 9)}$$

9.1.2 Extrema

La derivée première s'annule lorsque $x = -\sqrt{5} - 3$ et $x = \sqrt{5} - 3$.

Son domaine est également

$$dom\ f' \; = \; R\backslash\{-3\}$$

9.2 Tableau de signe de la dérivée première

x		$-\sqrt{5}-3$		-3		$\sqrt{5}-3$	
(x^2+6x+4)	+	0	-	-	-	0	+
(x^2+6x+9)	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	$\pm\infty$	-	0	+

9.3 Dérivée seconde

9.3.1 Détermination

La dérivée seconde de f(x) en x est

$$f''(x) = 2\,\frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)^3} - 2\,\frac{(x-2)}{(x+3)^2} - 2\,\frac{(x+2)}{(x+3)^2} + 2\,\frac{1}{(x+3)}$$

9.3.2 Zéros de la dérivée seconde

Il n'y pas de zéros dans notre cas mais son domaine est aussi

$$dom\ f'' \ = \ R \backslash \{-3\}$$

Son signe est donné par le signe de

$$m(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

C'est à dire que $f''(x)$ est < 0 si $x < -3$ et > 0 si $x > -3$.

10 Tableau de variation

Le tableau de variation permet de synthétiser toutes les informations obtenues jusqu'à présent.

x		$-\sqrt{5}-3$		-3		-2		$-\sqrt{5}-3$		2	
$f'(x)$	-	-	-	$\pm\infty$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	$\pm\infty$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	-	-	$\pm\infty$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Max.	$\searrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	Min.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

11 Valeurs pour quelques points

Pour réaliser le graphique, il faut chercher quelques valeurs de $f(x)$ pour quelques x entiers. Nous connaissons déjà les zéros de la fonction et les points où la dérivée première s'annulait.

Tant qu'à faire, déterminons la valeur de la dérivée première en ces mêmes points.

x	-6	$-\sqrt{5}-3$	-4	-3	-2	-1	$\sqrt{5}-3$	0	+1	+2	+3
$f'(x)$	$\frac{4}{9}$	0	-12	$\pm\infty$	-4	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
$f(x)$	$\frac{-32}{3}$	$\frac{(\sqrt{5}+3)^2-4}{-\sqrt{5}}$	-4	$\pm\infty$	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{(\sqrt{5}-3)^2-4}{\sqrt{5}}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{31}{36}$

12 Tangentes

Rappelons que la valeur de la dérivée première pour un x donné est la pente de la tangente au point de coordonnées $(x; f(x))$.

C'est à dire que pour un $x = X$, le point où passe la tangente est le point de coordonnées $(X; f(X))$. La tangente a pour équation :

$$y = f'(X).x + b$$

Pour obtenir la valeur de b (l'ordonnée à l'origine), il faut remarquer que la tangente à la courbe et la courbe ont un point en commun : le point de contact de coordonnées $(X; f(X))$. Pour déterminer b il faut donc résoudre l'équation :

$$f(X) = f'(X).X + b$$

b est donc égal à :

$$b = f(X) - f'(X).X$$

L'équation générale devient donc :

$$y = f'(X).x + (f(X) - f'(X).X)$$

12.1 Tangentes aux extrema

Limitons nous, dans un premier temps, à la détermination des tangentes lorsque la dérivée première s'annule. C'est à dire lorsque $x = \sqrt{5} - 3$ et $x = -(\sqrt{5}) - 3$.

Comme, aux extrema, la dérivée s'annule, la tangente a pour équation :

$$y = 0.x + (f(X) - 0.X)$$

cà d.

$$y = f(X)$$

Il s'agira de droites horizontales d'équation $y = cste$..

Les constantes étant la valeur de $f(x)$ en $x = -\sqrt{5} - 3$ et $x = \sqrt{5} - 3$. Les 2 tangentes ont donc pour équations :

$$y = -2\sqrt{5} - 6$$

et

$$y = 2\sqrt{5} - 6$$

12.2 Tangente en x = 0

En $x = 0$,

$$y = f'(X).x + (f(X) - f'(X).X)$$

devient

$$y = f'(0).x + f(0)$$

cà d.

$$y = \frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$$

12.3 Tangente en $y = 0$

Continuons notre recherche de tangentes en des points particuliers.

En $y = 0$, cà d. aux zéros de la fonction,

$$y = f'(X).x + (f(X) - f'(X).X)$$

devient

$$y = f'(X).x - f'(X).X$$

En $x = -2$, la tangente aura pour équation :

$$y = -4x - 8$$

En $x = 2$ nous aurons alors :

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$$

12.4 Tangentes en quelques points quelconques

En $x = -6$,

$$y = f'(X).x + (f(X) - f'(X).X)$$

devient

$$y = f'(-6).x + (f(-6) - (f'(-6).(-6)))$$

càd.

$$y = \frac{4}{9}x - 8$$

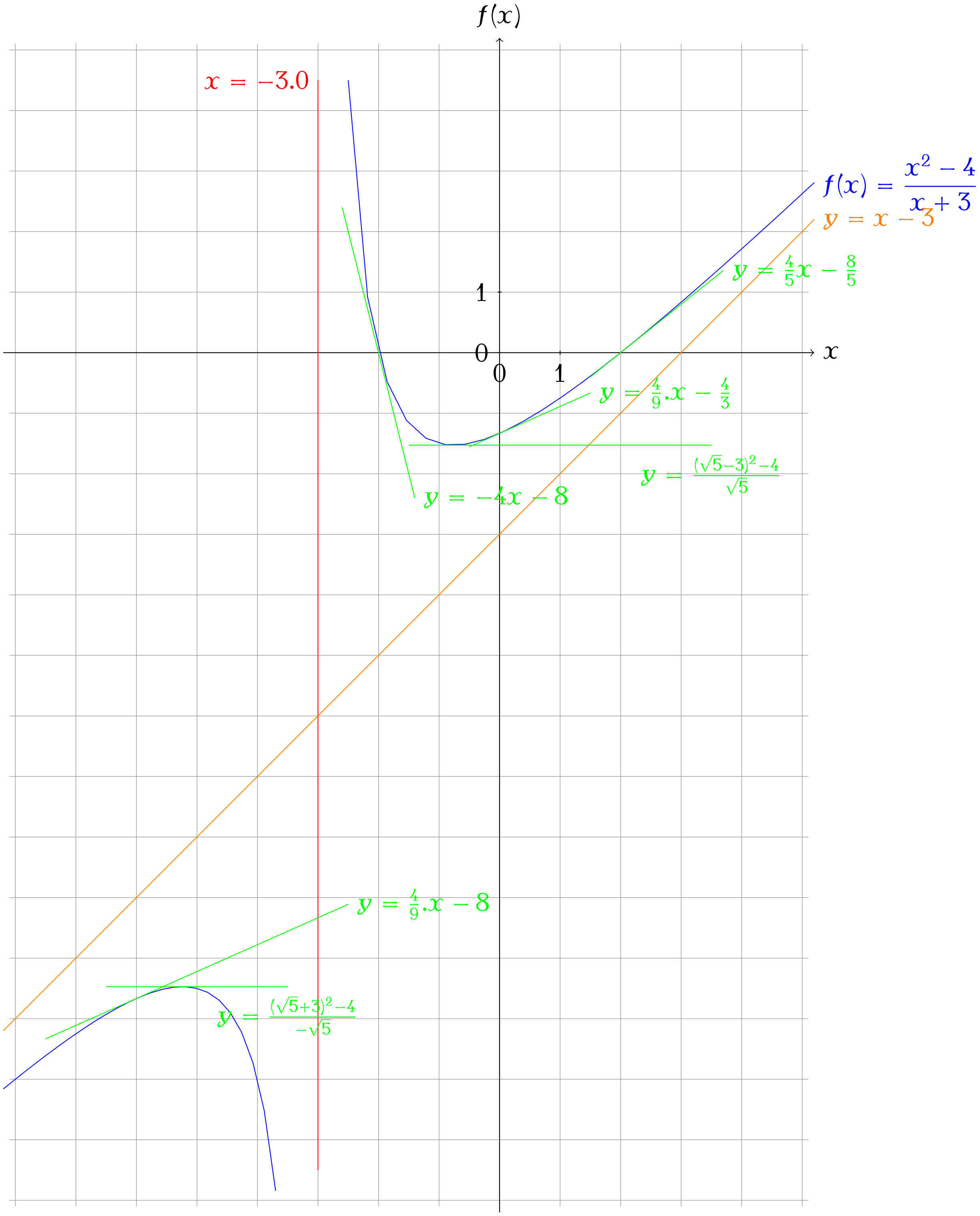
En $x = -4$,

$$y = f'(-4).x + (f(-4) - (f'(-4).(-4)))$$

$$y = -4x - 28$$

etc

13 Le graphique



14 Résumé

Le présent travail est une chimère. Notre but est en effet multiple. Nous avons voulu à la fois faire, à travers une étude de cas, une révision didactique de ce qu'est une étude de fonction mais aussi faire un "proof of concept" de l'utilisation de différents "packages" sous LaTeX. Nous faisons ici la démonstration de l'utilisation de "pgf/tikz" pour les sorties graphiques mais aussi de l'utilisation de “sage” à travers l'utilisation de “sagetex” pour le calcul formel [3].

3. ou algèbre sur ordinateur