PROBLEMATHS
1 février 2010

Problemath 11

Minuit sonnait sur Londres. Le docteur Watson, plongé dans la lecture d'un vieux livre d'algèbre, s'exclama soudain : "Good Lord! Ce système d'équations linéaires, dont la solution est unique, a une curieuse propri été : si on écrit le système matriciellement $AX = B$, les coefficients

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, b_2, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, b_m$$

forment une progression arithmétique de raison non nulle"'.
Sherlock Holmes leva la tête, l'ai intéressé: "Dites-moi, Watson, d'après l'épaisseur de la couche de poussières qui recouvre votre livre, j'en déduis que le système en question est à coefficients réels et qu'il comporte au moins deux équations". A peine le docteur eut-il confirmé ces hypothèses que le célèbre détective lui tendait un papier sur lequel il venait de griffonner quelques chiffres. "Décidément, Holmes, vous m'étonnerez toujours! Comment diable avez-vous pu trouver la solution de ce système sans même l'avoir vu et sans connaître le nombre d'équations ni le nombre d'inconnues?"
"Elémentaire, mon cher Watson!"
Comment Sherlock Holmes avait-il raisonné et quelle était la solution du système?

Problemath 12

Un nombre réel $r > 0$ est dit <u>inévitable</u> si, quelle que soit la fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, le graphe de f possède une "corde horizontale" de longueur r, autrement dit s'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $x+r \in [0, 1]$ et $f(x) = f(x+r)$. Le nombre 1 est clairement inévitable. Pour quelles valeurs de l'entier $n > 1$ le nombre $\frac{1}{n}$ est-il inévitable?

Problemath 13

Saint Michel, muni de son épée magique, doit combattre un dragon ayant 99 têtes et 99 queues. Un coup d'épée magique peut couper soit une tête, soit deux têtes, soit une queue, soit deux queues. Si une seule tête est coupée, elle repousse immédiatement. Si une seule queue est coupée, elle est remplacée par deux nouvelles queues. Si deux queues sont coupées d'un coup, une nouvelle tête apparaît. Enfin, si deux têtes sont coupées d'un coup, elles ne sont remplacées par rien.
Quel est le plus petit nombre de coups d'épée permettant à Saint Michel de terrasser le dragon (c'est-à-dire de lui couper toutes ses têtes et toutes ses queues)?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le <u>vendredi 26 février à 14h</u>.

<u>**Solution du Problemath 7**</u>. On va prouver plus généralement que $(n!)^2 > n^n$ pour tout entier $n \geq 3$. C'est clair pour $n = 3$ et si c'est vrai pour n, c'est vrai aussi pour $n + 1$ car

$$((n + 1)!)^2 = (n + 1)^2(n!)^2 > (n + 1)^2 n^n$$

par l'hypothèse d'induction, de sorte qu'il suffit de prouver que

$$(n + 1)^2 n^n > (n + 1)^{n+1},$$

c'est-à-dire que $n + 1 > (1 + \frac{1}{n})^n$ pour tout $n \geq 3$. Ceci résulte immédiatement du fait que la suite des $(1 + \frac{1}{n})^n$ est croissante et tend vers $e < 3$.
<u>Ont fourni une solution correcte</u>:
L. SCHOPEN (élève de 4ème à la St John's International School Brussels), C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à UCL), P. ANTONIK (BA2 physique), J. F. DETERME (BA2 polytech), S. REXHEP (MA1 maths), J. DI COSMO (doctorant

à l'UCL) , F. DOIGNIE (ingénieur), C. LARIVIERE (prof de maths à la St John's International School Brussels), Y. SUPRIN (prof de maths à l'Ecole Européenne Bruxelles II), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 8. A tout instant, la tangente commune aux deux paraboles en leur point de contact p est un axe de symétrie de leur réunion. D'autre part, la tangente au point p de P_2 fait des angles égaux avec la droite joignant p au foyer de P_2 et avec la verticale passant par p. Il résulte de ces deux observations que le foyer de P_1 se trouve sur la directrice de P_2, et sa trajectoire est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{4}$.

Ont fourni une solution correcte:

C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), H.P. BUI (BA2 maths), P. A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), P. ANTONIK (BA2 physique), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), W. DE DONDER, F. DOIGNIE (ingénieurs), C. LARIVIERE (prof de maths à la St John's International School Brussels), Y. SUPRIN (prof de maths à l'Ecole Européenne Bruxelles II), C. VAN HOOSTE(assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 9. Si $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$ est un polynôme à coefficients entiers et si m et n sont deux entiers distincts, alors

$$p(m) - p(n) = a_0(m^k - n^k) + a_1(m^{k-1} - n^{k-1}) + \cdots + a_{k-1}(m - n).$$

Comme chaque terme du membre de droite est divisible par $m-n$, on en déduit que $m-n$ divise $p(m)-p(n)$. Si A désigne l'âge d'Alice et N l'entier choisi par Bob au second essai, on a donc

$$N - 7|85 - 77, A - 7|0 - 77, A - N|0 - 85$$

avec $7 < N < A$. Les deux premières divisibilités impliquent que $N \in \{8, 9, 11, 15\}$ et $A \in \{14, 18, 84\}$. Comme $A - N$ doit diviser 85, la seule possibilité compatible avec $7 < N < A$ est $N = 9$ et $A = 14$. Alice a donc 14 ans.

Ont fourni une solution correcte:

C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), J. SPIECE (BA1 physique), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à l'UCL), J. F. DETERME (BA2 polytech), B. OBLAK (BA3 physique), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), F. DOIGNIE (ingénieur), C. LARIVIERE (prof de maths à la St John's International School Brussels), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).

Solution du Problemath 10. Si $n \geq 2$, les racines du polynôme $P(z) = (z + 1)^n - 1$ sont, dans le plan de Gauss, les sommets d'un $n-$gone régulier convexe inscrit dans le cercle de rayon 1 centré en -1. Comme $P'(0) = n$, le coefficient du terme en z de $P(z)$ vaut n. D'autre part, comme $P(z) = z(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{n-1})$, le coefficient du terme en z est (au signe près) le produit des $n - 1$ racines non nulles $z_1, \ldots, z_{n-1}$ de $P(z)$. Le produit des distances des sommets $z_1, \ldots, z_{n-1}$ du $n-$gone au sommet 0 est donc égal à n. Si on travaillait dans un cercle de rayon r, chacune de ces $n - 1$ distances serait multipliée par r et leur produit vaudrait donc $n\ r^{n-1}$. Pour $n = 2010$, on obtient $2010\ r^{2009}$.

Ont fourni une solution correcte:

C. ANTONY, C. DE GROOTE, M. DUERINCKX, F. THILMANY (BA1 maths), N. RADU (BA1 maths à l'ULg), P. HAAS, A. LEDENT (BA1 maths à Cambridge), J. SPIECE (BA1 physique), H.P. BUI (BA2 maths), P.A. JACQMIN (BA2 maths à UCL), B. OBLAK (BA3 physique), M. MOSKOVIC (MA2 maths), J. DI COSMO (doctorant à l'UCL), W. DE DONDER (ingénieur), C. LARIVIERE (prof de maths à la St John's International School Brussels), Y. SUPRIN (prof de maths à l'Ecole Européenne Bruxelles II), C. VAN HOOSTE (assistant en polytech), José HAPPART (politicien francophone retraité).