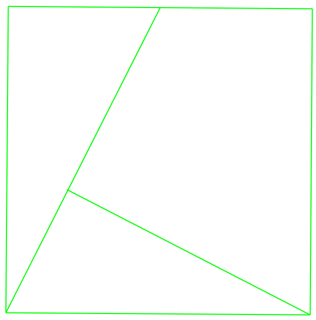
Printemps des Sciences : activité encadrée

LA GÉOMÉTRIE EN PIÈCES"

Résumé

- Réalisation de puzzles à 2 et 3 dimensions pour créer des figures planes et solides ;
- Utilisation de puzzles pour établir les liens entre différentes formules d'aires de figures planes et entre différentes formules de volume de solides ;
- Réflexion sur les agrandissements de figures planes et solides ;
- Mise à disposition de puzzles peu connus à 2 et 3 dimensions.

i. Puzzle à 3 pièces



Etape 1 : puzzles
Matériel : puzzles similaires à la figure

Consigne
Avec les 4 pièces proposées, construire un triangle et le plus de quadrilatères convexes différents.

(Figures à trouver : carré, rectangle, triangle rectangle, parallélogramme, trapèze isocèle, quadrilatère quelconque);

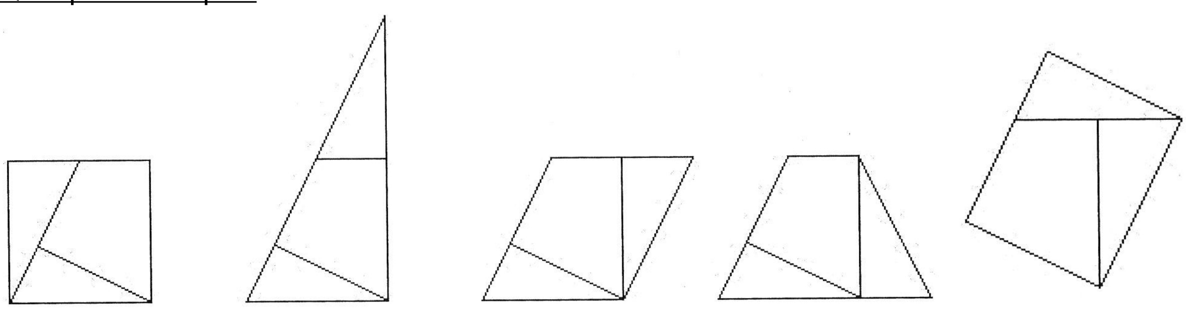
Déroulement :

a. aucune indication ;
b. indication des formes à trouver si toutes n'ont pas été trouvées
c. synthèse quand un des groupes a tout trouvé : faire justifier le nom de la forme – indiquer la justification de la construction en prolongement.

Compétence :
- Construite : 3.2.2 (2) : "*Construire des figures avec du matériel varié"*
- Abordée : 3.3.2 (4) : *"Connaître et énoncer les propriétés de côtés et d'angles utiles dans les constructions de quadrilatères et de triangles"*

Exemples de justifications de noms attendues
- Carré : quadrilatère ayant 4 angles droits et 4 côtés isométriques
- Rectangle : quadrilatère ayant 4 angles droits
- Triangle rectangle : triangle ayant un angle droit
- Parallélogramme : quadrilatère ayant 2 paires de côtés parallèles ou 2 paires de côtés opposés isométriques
- Trapèze isocèle : quadrilatère ayant 2 côtés parallèles et une médiane axe de symétrie ou quadrilatère ayant 2 paires d'angles consécutifs égaux

Quelques exemples



Prolongement éventuel de l'étape 1 (pour les plus rapides)

Consigne : *Peut-on trouver des quadrilatères non convexes, d'autres polygones (convexes ou non convexes) ?*
(Figures à trouver : quadrilatères non convexes, pentagones, hexagone non convexe, heptagone non convexe, octogone non convexe)

Prolongement en classe puis au premier degré du secondaire: construction et analyse du puzzle
- La construction n'utilise que le milieu d'un segment et une perpendiculaire, une fois le carré dessiné.
- Il est possible de faire trouver des angles de même amplitudes, des angles complémentaires (dont la somme vaut 90°), des angles supplémentaires (dont la somme vaut 180 °), d'utiliser le fait que la somme des angles d'un triangle fait 180°)
- Il est possible de déterminer la longueur de certains à l'aide du théorème de Pythagore, en utilisant le fait que les deux triangles sont semblables.
- Ensuite, il est possible de reprendre toutes les justifications en remplaçant les éléments trouvés par mesure ou superposition par des égalités de mesures ou d'angles.

Etape 2 : Liens entre aires de figures planes
Prérequis : aire du rectangle.

En cas de nécessité : Aire du rectangle
Matériel : progression de 3 rectangles complets de plus en plus grands, rectangles ou carrés permettant de recouvrir exactement le rectangle.

Consigne
Le plus rapidement possible, déterminer combien de rectangles / carrés il faut pour recouvrir chaque rectangle.

Déroulement :
a. temps de recherche
b. synthèse en faisant apparaître les différentes démarches utilisées et en distinguant celle qui est plus rapide (Base x hauteur).

Compétence :
- Construite : 3.3.1 (4) : "*Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires."*

Cette activité est plutôt vue comme une révision des formules d'aires et non une première approche. Pour une première approche, on pourrait se limiter au parallélogramme et au triangle.

Matériel : puzzle 3 pièces ; triangles quelconques, trapèzes quelconques.

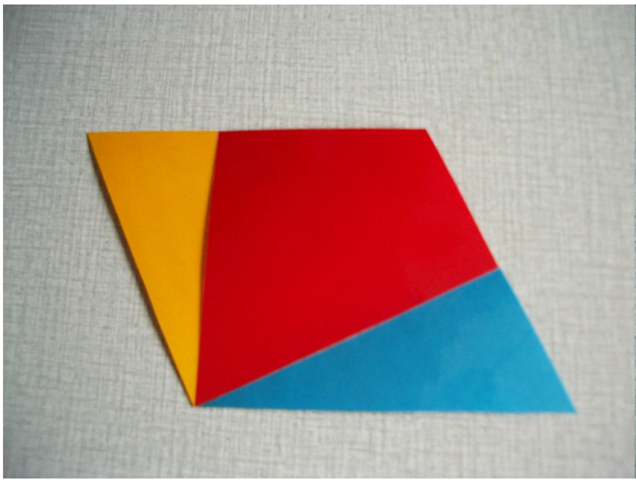
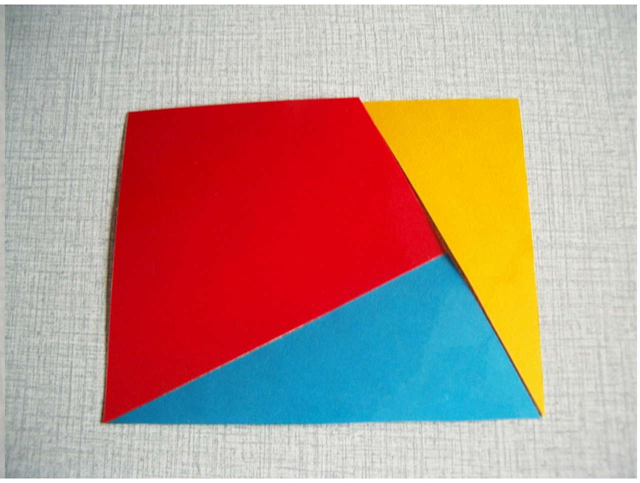
Consigne
A partir de la formule d'aire du rectangle et en utilisant les pièces du puzzle, retrouver
a) celle du parallélogramme,
b) celle du triangle en vérifiant ensuite sur des figures plus générales,
c) celle du trapèze en vérifiant ensuite sur des figures plus générales.
(d) celle du losange - non fait ici)

Déroulement :
c. synthèse intermédiaire pour le parallélogramme ;
d. synthèse pour le triangle en faisant apparaître les différentes démarches utilisées et en distinguant celles qui se généralisent à la figure quelconque des autres.

e. synthèse pour le trapèze en faisant apparaître les différentes démarches utilisées et en distinguant celles qui se généralisent à la figure quelconque des autres.

Compétence :
- Construite : 3.3.1 (4) : "*Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires.*"

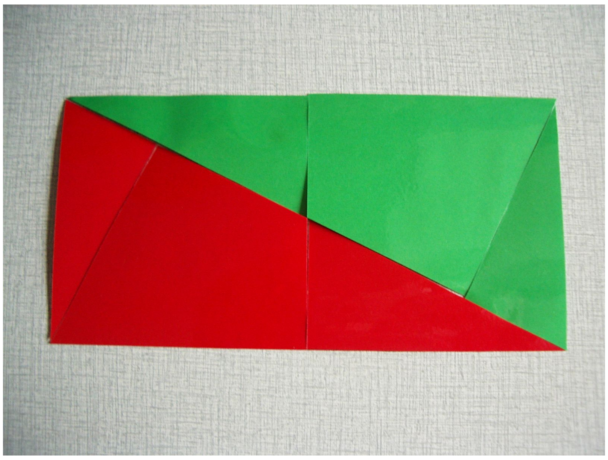
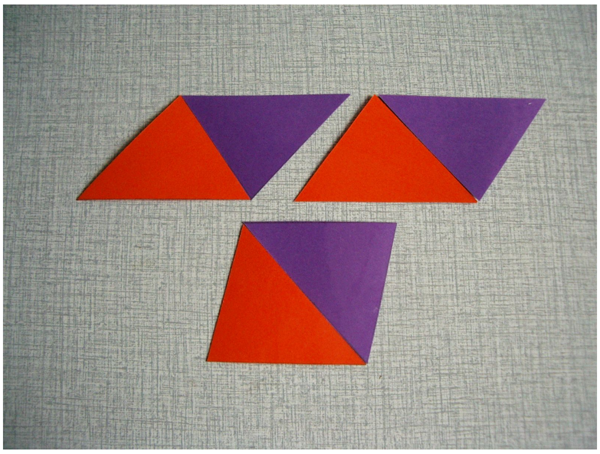
Lien entre parallélogramme et rectangle

L'aire du parallélogramme est égale à celle d'un rectangle de même base et de même hauteur.

$$A_{\text{parallélogramme}} = B \times h \text{ (x unité d'aire)}$$

Lien entre triangle et parallélogramme

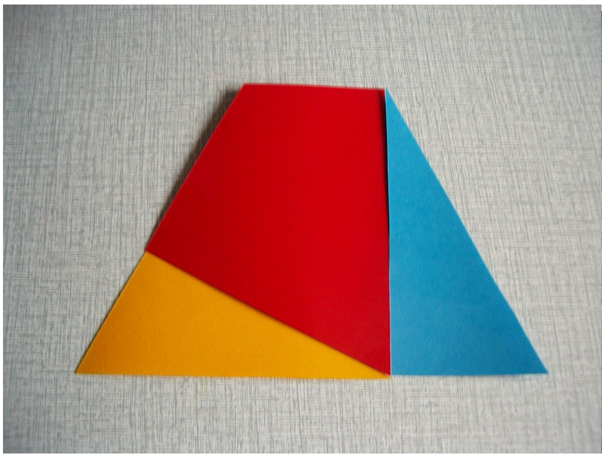
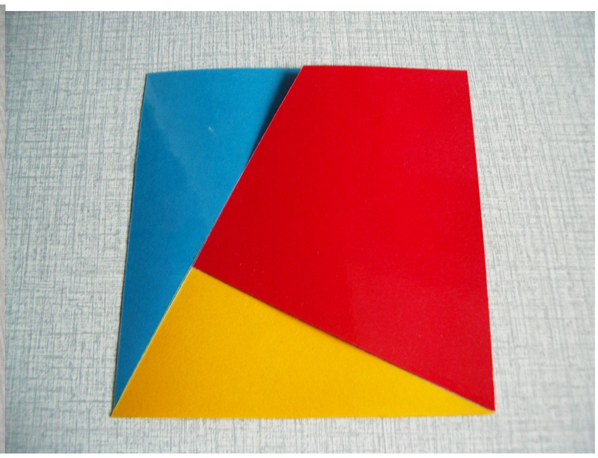



L'aire du triangle est égale à la moitié de celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \times B \times h \text{ (x unité d'aire)}$$

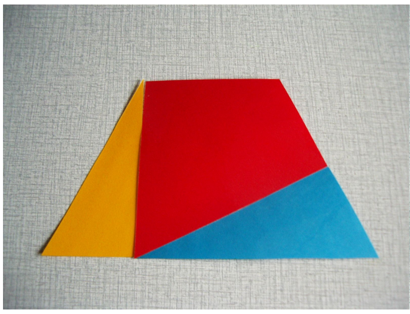
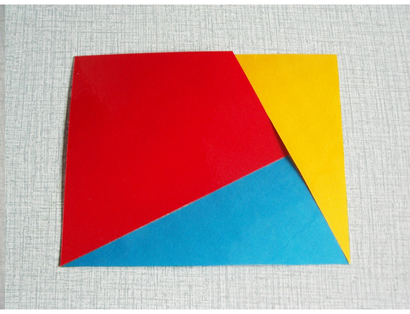
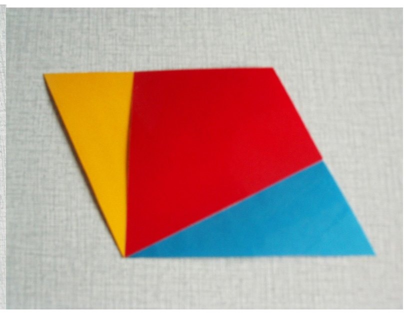
Liens entre trapèze et parallélogramme

Trapèze particulier et carré



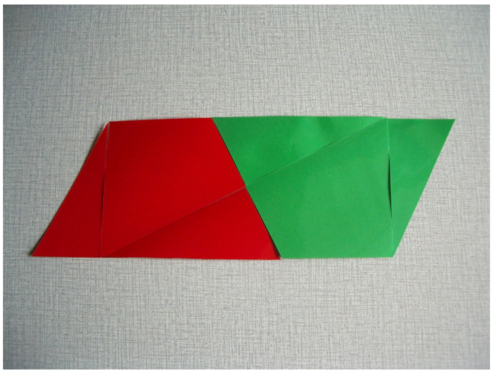
Remarque : cas trop particulier

Trapèze isocèle et rectangle ou parallélogramme



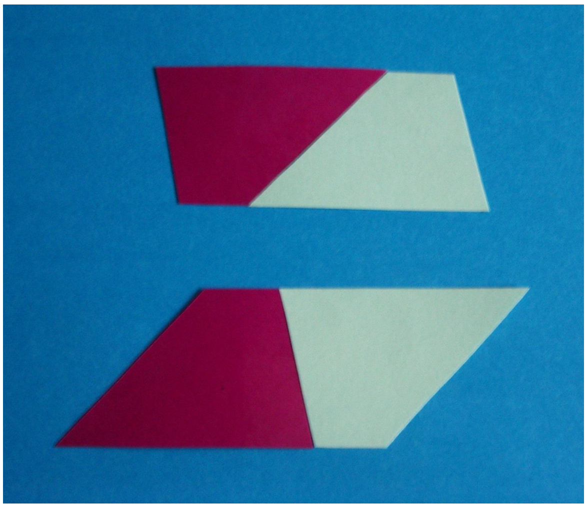
Remarque : pas de lien direct entre les bases du trapèze et celle du rectangle
(la demi - somme n'est pas facile à expliquer).

ou



Généralisation au trapèze quelconque

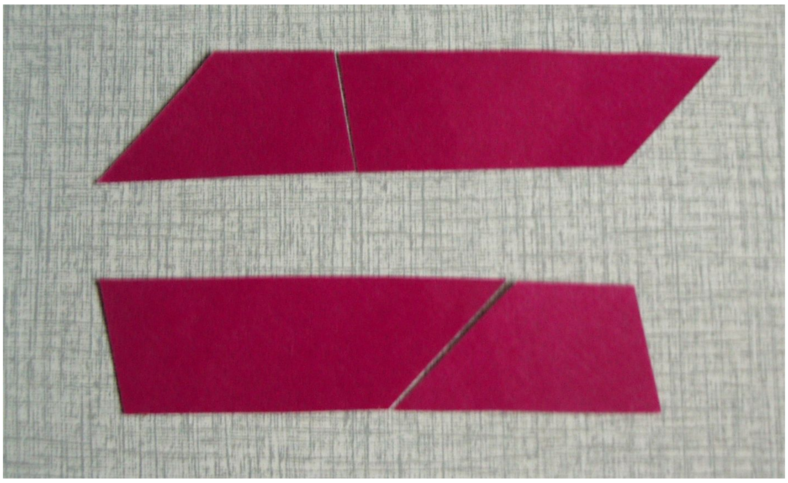
- à l'aide de deux trapèzes



L'aire du trapèze vaut la moitié de celle d'un parallélogramme de base B + b et de même hauteur.

$A_{trapèze}$: ½ x (B + b) x h (x unité d'aire).

- en coupant en deux le trapèze initial (selon une médiane)

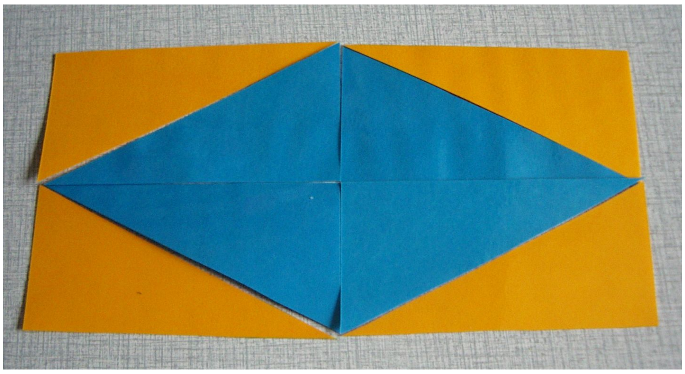


L'aire du trapèze vaut celle d'un parallélogramme de base B + b et de hauteur égale à la moitié de celle du trapèze.

$A_{trapèze}$: ½ x (B + b) x h (x unité d'aire).

Complément : lien entre losange et rectangle ou triangle

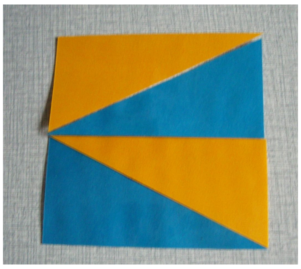
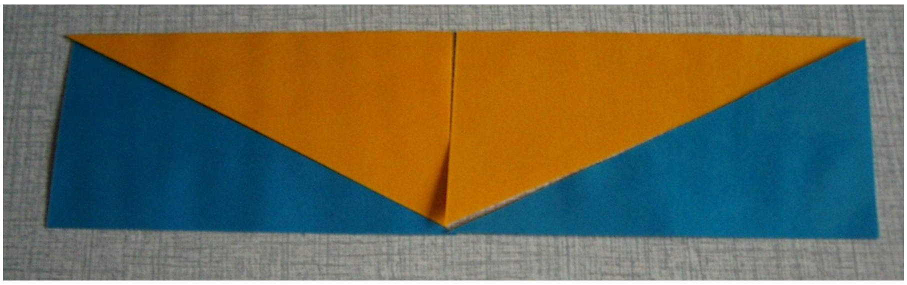
Double losange et rectangle



L'aire du losange vaut la moitié de celle d'un rectangle de base D et de hauteur d.

$A_{losange}$ = ½ x D x d (x unité d'aire)

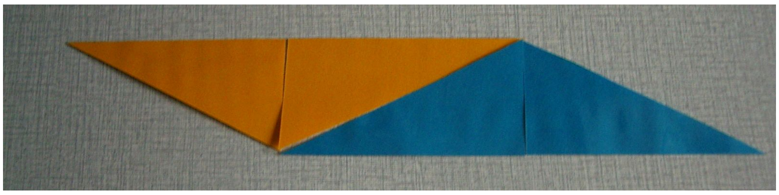
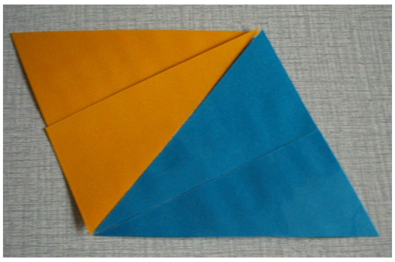
Losange et rectangle

 ou 

L'aire du losange vaut celle d'un rectangle de base D/2 et de hauteur d ou de base D et de hauteur d/2.

$A_{losange}$ = ½ x D x d (x unité d'aire)

Losange et parallélogramme

 ou 

L'aire du losange vaut celle d'un parallélogramme de base D et de hauteur d/2 ou de base D/2 et de hauteur d.

$A_{losange}$ = ½ x D x d (x unité d'aire)

ii. Agrandissements de figures planes

Etape 3 : Agrandissements de figures planes

Matériel proposé : *un type de figure par table (matériel : attrimaths ou figures planes plastifiées)*

- *triangles équilatéraux,*
- *losanges,*
- *carrés,*
- *rectangles.*

Consigne

Plusieurs figures identiques sont mises à disposition. Combien de pièces seront nécessaires pour construire une figure dont les longueurs des côtés sont multipliées par 4, par 5, par 10 ?"
Essayer de prévoir avant de vérifier.

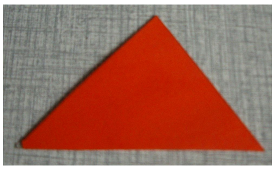
Déroulement :

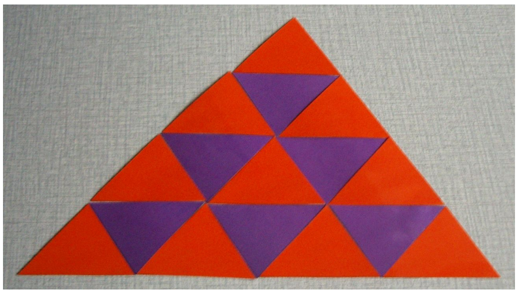
a. aucune indication ;
b. proposition de figures supplémentaires si nécessaire ;
c. synthèse quand plusieurs groupes ont trouvé - faire observer que le nombre vaut le carré du facteur d'agrandissement souhaité.

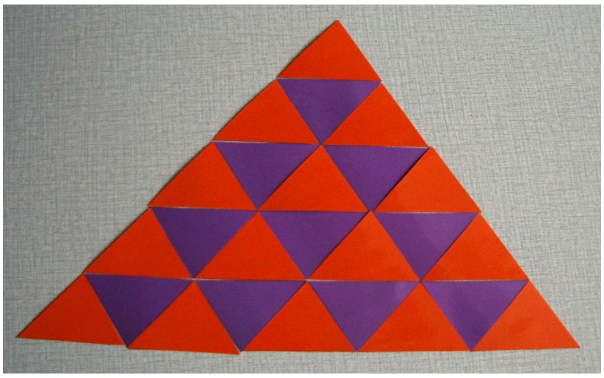
Compétence :

- Construite : 3.2.3 (3) : "*Reconnaître et construire des agrandissements de figures "*

Exercice réalisé avec des triangles quelconques







iii. Contenance d'une boîte

Etape 4 : la boîte de morceaux de sucre
Matériel : une boîte entamée de morceaux de sucre par groupe.

Consigne :
Trouver le plus rapidement possible le nombre de morceaux de sucre qu'il y a dans la boîte.

Déroulement :

a. aucune indication
b. synthèse en faisant apparaître les différentes démarches utilisées et en distinguant celle qui est plus rapide (Aide la base x hauteur).
c. application : volume du cube

Compétence :
- Construite : 3.3.1 (4) : "*Construire et utiliser des démarches pour calculer des volumes."*

iv. Puzzles à 3 dimensions

Etape 5 : puzzles
Matériel : (un jeu complet par table)
- prismes à base triangulaires (demi - cubes)
- "demi pyramides"
- pyramides obliques à base carrée (tiers de cube)
- pyramides obliques à base triangulaire (sixièmes de cube)
- pyramides régulières à base carrée (sixièmes de cube)

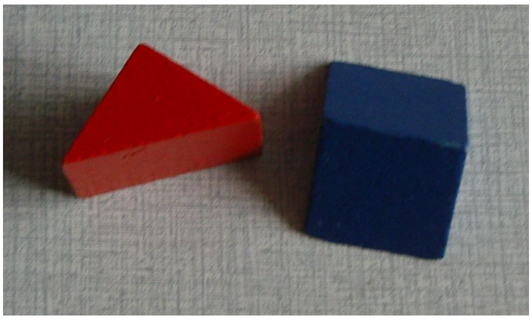
Consigne :
Avec les pièces proposées, construire des pyramides ou des cubes.

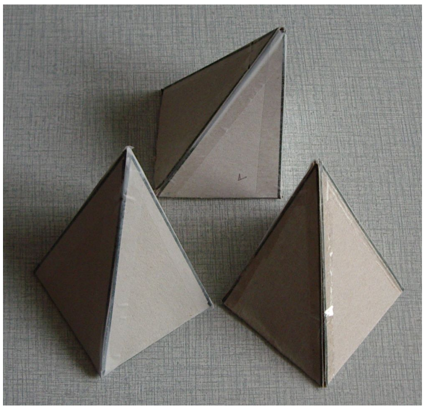
Déroulement :

a. aucune indication
b. synthèse quand un des groupes a tout trouvé : faire justifier le nom des solides

Compétence :
- Construite : 3.2.2 (2) : "*Construire des solides simples avec du matériel varié"*
- Abordée : 3.3.2 (1) : *"Reconnaître, comparer des solides, les différencier et les classer"*

Photos du matériel



<u>Etape 6 : Lien entre volumes de solides</u>
Matériel : les puzzles de l'étape 1

<u>Consigne</u>
A partir du cube et de son découpage en plusieurs pyramides, trouver le lien entre le volume de chaque type de pyramide et le volume du cube puis le justifier.

Déroulement :

a. synthèse des différents résultats trouvés.
b. comparaison entre différents résultats (comparaison des bases, des hauteurs)
c. dégagement de la règle : le volume d'une pyramide vaut le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur.

Compétence :

- Construite : 3.3.1 (4) : "*Construire et utiliser des démarches pour calculer des volumes."*

Observations :

- Le volume d'une pyramide (oblique) à base carrée et de hauteur égale au côté du carré vaut le tiers du volume du cube correspondant.
- Le volume d'une pyramide (droite) à base carrée et de hauteur égale à la moitié du côté du carré vaut le sixième du volume du cube correspondant.

- Le volume d'une pyramide (oblique) dont la base est un "demi carré" et de hauteur égale au côté du carré vaut le tiers du volume du cube correspondant.

Généralisation : le volume d'une pyramide vaut le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur.

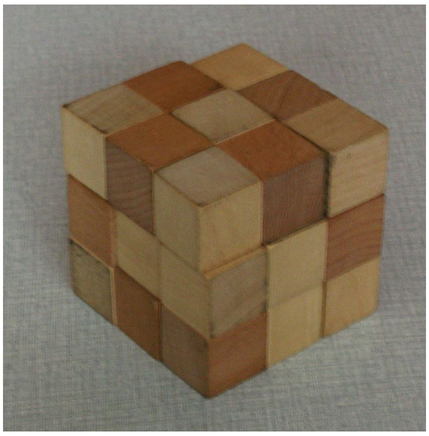
v. Agrandissements de solides

Etape 7 : Agrandissements de solides
Matériel proposé : un type de solide par table
- cubes,
- prismes à base carrée,
- parallélépipèdes rectangles.

Consigne
Combien de pièces seront nécessaires pour construire un solide dont les longueurs des côtés sont multipliées par 3, par 4, par 10 ?". Essayer de prévoir avant de vérifier.

Déroulement :
a. aucune indication ;
b. proposition de formes supplémentaires si nécessaire ;
c. synthèse quand plusieurs groupes ont trouvé - faire observer que le nombre vaut le cube du facteur d'agrandissement souhaité.

Compétence :
- Construite : 3.2.3 (3) : "*Reconnaître et construire des agrandissements de figures* "



Le nombre de solides nécessaire vaut le cube du facteur d'agrandissement souhaité.

vi. Puzzles divers

Etape 6 : Puzzles à 3 dimensions

Dans cette partie de l'activité, divers types de puzzles sont proposés librement.

Matériel (un kit par table) :
- Carrés et pointes : "compléter le puzzle",
- Dé à reconstituer : "trouver le dé en tenant compte de la convention (la somme des points de deux faces opposées vaut 7) et de la disposition classique des points",
- Cubes Soma à reconstituer et modèles,
- Serpent perfide "construire un cube sans couper le serpent" (variante plus simple : mettre le plus de pièces possible ensemble en reconstituant le serpent.

Matériel supplémentaire :
- "Brick by brick" avec modèles,
- Kataminos avec comme consigne "trouver un maximum de rectangles différents",
- "Airport" : puzzle avec modèles
- "Prismentwist" et autres puzzles à 3 dimensions

Consigne : *Réaliser quelques-uns des différents puzzles proposés.*

Déroulement : Découverte libre ; présence ponctuelle aux différentes tables.

Compétence :
- Construite : 3.2.2 (2) : "*Construire des figures planes et des solides simples avec du matériel varié"*

vii. Prolongement possible : construction de pavages

Matériel : pièces du puzzle à 3 pièces, attrimaths, autres triangles et quadrilatères

Consigne : *Construire différents pavages avec les formes proposées.*

Déroulement :
a. Recherche libre
b. Comparaison des différents pavages trouvés et explication des transformations utilisées (symétrie axiale, symétrie centrale ou rotation, translation ou glissement)

Compétence :
- Construite : 3.2.3 (1) : "*Dans un contexte de pavage, relever la présence de régularités".*