ULB 1-12-1982

Recyclage en géométrie élémentaire

Espaces affins ordonnés

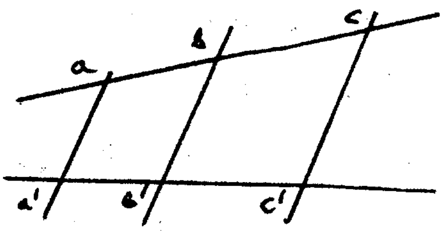
F. Buekenhout

1. La structure d'ordre linéaire ou d'interalité ou de convexité des droites de l'espace euclidien fut observée par des critiques d'Euclide tels que Leibniz. Elle ne fit son entrée explicite parmi les sujets mathématiques qu'en 1882 (M. Pasch). Pourtant elle est profondément enracinée dans la genèse psychologique de la géométrie où les segments précèdent les droites

2. La structure d'interalité est l'une des rares en géométrie qui est non triviale en dimension un. Nous avons discuté ceci dans un exposé précédent.

3. D'un point de vue formel, on peut présenter l'ordre linéaire soit comme un ensemble muni de deux ordres totaux opposés $E, \leq$ et $E, \geq$ ou encore comme un ensemble muni d'une relation ternaire d'interalité $i(a,b,c)$ qui signifie intuitivement que "b est entre a et c".

4. __Définition__ Nous appelons __espace affin ordonné__ tout espace affin dont une droite au moins possède au moins trois points, dont toute droite est munie de deux ordres totaux opposés et dans laquelle toute projection parallèle (dans un plan) d'une droite sur une droite, conserve l'ordre linéaire ce qui revient à dire que $aa' \parallel bb' \parallel cc'$ et $b \in [a,c]$ implique $b' \in [a',c']$.



<u>Exemples</u> 1) Si K est un corps totalement ordonné, tout espace affin $A(V)$ où V est un vectoriel sur K a une structure naturelle d'espace affin ordonné.

Si $D = Ka$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a \neq 0$, la demi-droite $[0, a$ est l'ensemble des vecteurs λa où $\lambda \in K$ et $\lambda \geq 0$. Ces demi-droites déterminent l'ordre linéaire sur D et celui-ci se transmet à d'autres droites par translation. La construction est indépendante du choix de $a \neq 0$ sur D.

2) Des exemples de corps ordonnés : $\mathbb{R}$ et tout sous-corps comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ etc. Il y en a d'autres.

3) Le plan de Moulton rencontré dans un exposé précédent et obtenu par réfraction de certaines droites, est ordonné.

4) Tout ensemble totalement ordonné d'au moins trois points, détermine un espace affin ordonné ayant une seule droite. Ceci est un exemple trivial.

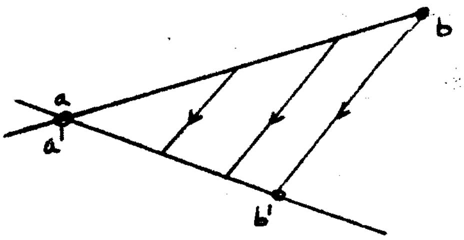
5. Si l'espace affin ordonné possède au moins deux droites (ou au moins un plan) nous verrons que toutes les droites ont le même cardinal infini, qu'entre deux points on en trouve une infinité, que deux droites sont isomorphes en tant qu'ensembles linéairement ordonnés, que toute droite est "illimitée dans les deux sens" i.e. elle ne se confond pas avec un segment $[a, b]$. La clé de ces résultats relativement spectaculaires quand on est habitué aux espaces finis et aux ensembles ordonnés plutôt fantaisistes est que si A et B sont des droites et $a_1 \neq a_2$ des points de A et $b_1 \neq b_2$ des points de B, alors il existe une suite finie de projections parallèles dont

la composée applique a_1 sur b_1 et a_2 sur b_2. Ce dernier résultat ne dépend en rien de la structure d'ordre. C'est un théorème qui nous ramène aux espaces affins généraux. Nous vivons ainsi une situation typique en mathématique mais qui n'apparaît pas dans l'enseignement : après avoir développé une théorie X, on se met à développer une théorie Y qui repose sur X. Chemin faisant, on s'aperçoit que des questions nouvelles surgissent au sujet de X et qu'il convient de réviser et compléter X.

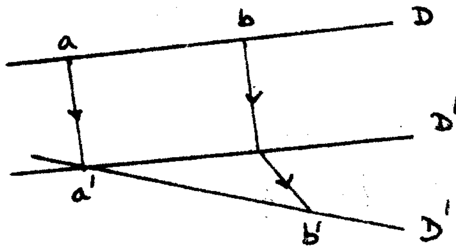
La démonstration suivante a pu être simplifiée grâce à une suggestion de J. Doyen.

4. <u>Théorème</u> Soit E un espace affin possédant au moins un plan. Soient D, D' des droites de E, $a \neq b$ des points de D et $a' \neq b'$ des points de D'. Alors il existe une suite d'au plus quatre projections parallèles dont la composée transforme a en a' et b en b'.

<u>Démonstration</u> 1) Si $a = a'$ et $D \neq D'$ c'est facile. Dans le plan abb', il existe une et une seule projection parallèle de D sur D' qui applique b sur b' et elle applique forcément a sur a'.



2) Si $a' \notin D$ et si D n'est pas parallèle à D', soit D'' la parallèle à D par a'. On a $D'' \neq D'$. Il existe <u>une</u> projection parallèle de D sur D'' qui applique a sur a' (et b sur un point $b'' \neq a'$). Ensuite la projection parallèle de D'' sur D' qui applique b'' sur b' et a' sur a', achève le travail.



3) Si $a' \in D$ et D n'est pas parallèle à D', on peut supposer $a \notin D'$ et par symétrisation des rôles de D et D' on est ramené à 2).
4) On vient d'épuiser tous les cas où D n'est pas parallèle à D'. On s'en tire toujours avec deux projections au plus.
5) Si $D // D'$ on choisit une droite A non parallèle à D et deux points sur celle-ci. Par 4) on passe de D à A et puis de A à D' par une composée d'au plus quatre projections.

<u>Question</u> Ne peut-on ramener 4 à 3 par un choix judicieux de A ?
<u>Corollaires</u> 1. Tout segment ouvert $]a,b[$ $a \neq b$, est non vide.
2. Tout segment ouvert $]a,b[$, $a \neq b$ a une infinité de points
3. Deux droites quelconques de E sont isomorphes en tant qu'ensembles linéairement ordonnés.
4. Si D est une droite de E, D admet un groupe d'automorphismes transitif sur les couples de points distincts, en tant qu'ensemble linéairement ordonné.
7. <u>Théorème</u> (des demi-plans) Etant donnés un plan P et une droite D dans P, il existe exactement deux parties convexes A, B de P, disjointes de D, telles que $A \cap B = \phi$, $A \cup B \cup D = P$, telles qu'un segment $[a,b]$ $a \in A$, $b \in B$ contienne un point de D.
<u>Démonstration</u> 1) Il s'agit d'établir l'existence de A, B et leur unicité.
Soit $p \in P - D$. Notons $P^-(p)$ l'ensemble des points $x \in P - D$ tels que $[p,x]$ contient un point de D et $P^+(p)$ son complémentaire dans $P - D$. Ces deux ensembles sont nos candidats A et B. Il est bien exact que $P^+(p) \cap P^-(p) = \phi$ et $P^+(p) \cup P^-(p) \cup D = P$.

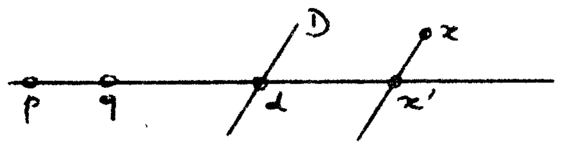
2) Supposons que l'on ait une décomposition A, B vérifiant les conditions du théorème et que $p \in A$. Alors $P^+(p) \subseteq A$ et de ce fait $B \subseteq P^-(p)$. D'autre part, puisque $p \in A$, il est bien clair que si $b \in B$, $[p,b]$ contient un point de D, donc $b \in P^-(p)$. Ceci force $P^-(p) = B$ et $P^+(p) = A$ donc l'unicité de A et de B. Pour forcer l'existence de A et de B il suffira d'établir que $q \in P^+(p)$ implique $P^+(p) = P^+(q)$.

3) Soit $x \in P^-(p)$ et D_x la parallèle à D par x. Alors $D_x \subseteq P^-(p)$ car $[px]$ coupe D et par projection parallèle à D, on voit que tout segment $[p,y]$ où $y \in D_x$, coupe D.

4) une conséquence de 3) : pour tout point $y \in P^+(p)$, la parallèle D_y à D par y est dans $P^+(p)$ car si un de ses points était dans $P^-(p)$, D_y y serait toute entière.

5) Si $q \in P^+(p)$, $q \neq p$ et $pq \parallel D$, il est clair par projection parallèle à D que $P^-(q) = P^-(p)$

6) Si $q \in P^+(p)$, $q \neq p$ et pq coupe D, supposons d'abord que q est entre p et $d = pq \cap D$. Si $x \in P^-(q)$, la parallèle à D par x coupe pq en $x' \in P^-(q)$ par 3).



Donc d se trouve dans $[q, x']$ et comme $q \in [p,d]$, $d \in [p,x']$.

De ce fait $x' \in P^-(p)$ et par 3) $x \in P^-(p)$. Dès lors $P^-(q) \subseteq P^-(p)$. Si on suppose p entre q et d, la conclusion est pareille. Bref, $P^-(q) \subseteq P^-(p)$ quel que soit $q \in P^+(p)$. En inversant les rôles de p et q, après avoir établi que $p \in P^+(q)$, on arrive à $P^-(q) = P^-(p)$.

8. <u>Pour terminer</u> Une des questions les plus intéressantes en suspens est de caractériser les espaces affines réels par le fait que leurs droites sont connexes : toute partie convexe d'une telle droite est un segment, une demi-droite ou la droite.