UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

10.11.1982

Recyclage en géométrie élémentaire
Inventaire de la structure de l'espace euclidien

F.BUEKENHOUT

1. Cerner le problème.

L'inventaire d'une structure comprend les concepts qui relèvent de celle-ci et les propriétés de ces concepts.

Dans un premier temps nous dressons une liste en vrac, des concepts auxquels nous pensons. Sont cités: parallélisme, translations, cercles, segements, cubes et une foule d'autres.

La nécessité d'une organisation apparaît.

Comment les concepts sont-ils liés entre eux ? Certains dépendent-ils d'autres ?

Nous observons que le parallélisme et l'orthogonalité s'exercent sur des droites et des plans. Il est donc naturel de donner une priorité aux concepts de droites et plans dans l'organisation logique et de traiter le parallélisme et/ou l'orthogonalité ensuite.

Nous effectuons également des regroupements de concepts: points, droites et plans se regroupent dans les sous-espaces. De même, la convexité englobe les segments ouverts, fermés, les demi-droites, demi-plans, demi-espaces. Rotations, translations et symétries bilatérales se regroupent dans les isométries.

Des questions difficiles sont affrontées. La structure linéaire précède-t-elle la structure convexe ou est-ce le contraire ? Sur le plan génétique, les segments précèdent certainement les droites. Sur le plan logique, la structure linéaire est plus simple et plus générale.

Une constatation s'impose: notre inventaire de la structure se structure à son tour et cette structuration est possible de bien des manières.

2. Un inventaire structuré.

Voici un exemple d'inventaire structuré qui présente une certaine cohérence et qui demeure volontairement incomplet dans ses dernières entrées. D'ailleurs, il n'est pas question d'être complet sur le terrain où nous sommes engagés.

- structure linéaire; sous-espaces linéaires: points, droites,plans.
- structure de parallélisme; sous-espaces parallèles: droites et plans parallèles (points parallèles?)
- structure d'orthogonalité; sous-espaces orthogonaux: droites et plans orthogonaux (points orthogonaux ?)
- structure convexe; demi-sous-espaces, segments, ensembles convexes (demi-points??)
- structure métrique; équidistance, sphères, cercles
- structures d'orientation, volumique, vectorielle, groupale, etc...

Nous avons déjà dit que d'autres approches sont tout aussi cohérentes. On pourrait partir de la structure groupale, du groupe des déplacements, en dériver les droites, la structure linéaire et les autres.

Il est plus important de faire observer que les diverses structures interfèrent. Le parallélisme et l'orthogonalité sont un exemple typique. Plus typique encore est la structure groupale qui devrait être constamment présente à l'esprit. Quelles sont les transformations qui conservent la structure linéaire, le parallélisme, l'orthogonalité, etc ?

3. Et les figures ?

Sont-elles chassées de notre inventaire ? Bien au contraire.

La structure linéaire permet de donner une définition très générale de cône: réunion de droites passant par un point O (le sommet du cône) ou encore, réunion des droites joignant un point O à un ensemble B de points d'un plan ne passant pas par O (B est la base du cône). Il n'est pas trop difficile de préciser ce qu'est un polygone d'un plan et dès lors de distinguer les pyramides parmi les cônes. En revanche, un concept simple et satisfaisant de courbe, n'exéste pas dans le cadre de la structure linéaire seule.

Le parallélisme permet un traitement analogue des concepts de cylindre (très général), de prisme et de parallélépipède.

L'orthogonalité conduit aux cylindres droits et aux parallélépipèdes rectangles.

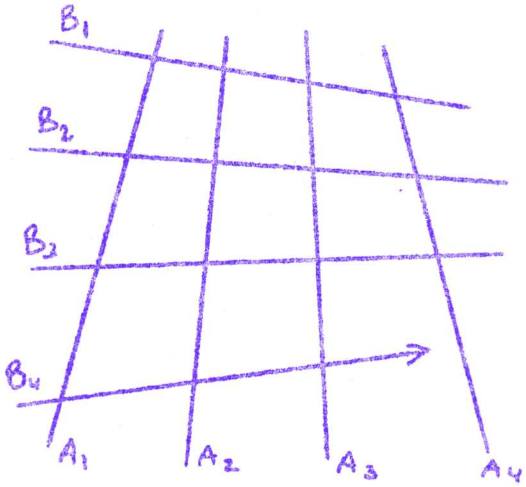
La convexité permet de dégager les angles comme fermetures convexes de deux demi-droites de même origine ou comme intersections de demi-plans ayant le même support. On peut dégager le "cylindre-boîte", la bande de plan, etc...

La structure métrique dégage le cylindre circulaire droit, le cône circulaire droit, le cube.

4. Propriétés.

Ce thème n'a pas été vraiment développé. Voici une esquisse.

La structure linéaire fait penser au théorème de Desargues, au théorème de Pappus et à une propriété spatiale: si A_1, A_2, A_3, A_4 sont des droites gauches, de même que B_1, B_2, B_3, B_4 et si chaque A_i coupe chaque B_j en un point, sauf peut-être A_4 et B_4, alors A_4 et B_4 se coupent également en un point.



Le parallélisme fait penser au théorème de Thalès, aux translations (groupe commutatif), aux homothéties, aux diagonales d'un parallélépipède, aux médianes d'un triangle, etc..

La convexité est l'une des structures, la 1ère dans notre hiérarchie, qui est non triviale en dimension 1. La droite réelle se caractérise parmi les autres droites ordonnées, par le fait que tout ensemble convexe est: un segment $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$, une demi-droite ouverte ou fermée ou la droite toute entière.