49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Mercredi 16 juillet 2008

Problème 1. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[BC]$ coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[CA]$ coupe la droite (CA) en B_1 et B_2, et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[AB]$ coupe la droite (AB) en C_1 et C_2.

Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Problème 2. (a) Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

pour tous nombres réels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que n^2+1 possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n + \sqrt{2n}$.

Language : French

Durée : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Jeudi 17 juillet 2008

Problème 4. Trouver toutes les fonctions f de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telles que

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z, vérifiant $wx=yz$.

Problème 5. Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k \geqslant n$ et $k-n$ est pair.

On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être *allumée* ou *éteinte*.

Au début, toutes les lampes sont éteintes.

Une *opération* consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée. On considère des séquences constituées d'opérations successives.

Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes.

Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n+1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées.

Déterminer le rapport N/M.

Problème 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $BA \neq BC$. Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement ω_1 et ω_2. On suppose qu'il existe un cercle ω qui est tangent à la demi-droite $[BA)$ au-delà de A, tangent à la demi-droite $[BC)$ au-delà de C, et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD).

Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et à ω_2 se coupent en un point de ω.

Durée : 4 heures 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points