PROBLEMATHS
7 avril 2008

Voici les solutions des 4 derniers Problemaths, ainsi que le palmarès final de cette année :

Solution du Problemath 10. Puisque $f'(x) = f(2008 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f''(x) = -f'(2008 - x) = -f(2008 - (2008 - x)) = -f(x)$, autrement dit $f(x)$ est solution de l'équation différentielle $f''(x) + f(x) = 0$. Il en résulte que $f(x) = A\ cos\ x + B\ sin\ x$, où $A\ et\ B$ sont des constantes réelles. En faisant $x = 0$, on obtient

$$B = f'(0) = f(2008) = A\ cos\ 2008 + B\ sin\ 2008$$

et, comme $cos\ 2008 \neq 0$, $A = B(1 - sin\ 2008)/cos\ 2008$. Par conséquent, $f(x) = \frac{B}{cos\ 2008}(cos\ x + sin(x - 2008))$ ou encore, en posant $C = B/cos\ 2008, f(x) = C(cos\ x + sin(x - 2008))$, où C est une constante réelle arbitraire. On vérifie facilement que ces fonctions satisfont bien la condition de l'énoncé.

<u>Ont fourni une solution correcte</u>: G. KERG (élève de 6ème à l'Athénée de Luxembourg), M. GHEYSENS (BA1 Maths), W. DE DONDER (Ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (Profs de Maths).

Solution du Problemath 11. Voici la solution de Maxime GHEYSENS (BA1 Maths). Pour tout entier $n \geqslant 1$, désignons par sin_n la $n^{\text{éme}}$ itérée de la fonction sin, définie par $sin_1 x = sin\ x$ et $sin_n x = sin(sin_{n-1}x)$ pour $n \geqslant 2$. On va prouver que l'équation $sin_n x = \frac{x}{3}$ a exactement 3 solutions réelles, à savoir $x = 0$ et deux solutions réelles non nulles x_0 et $-x_0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_0$ et tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons $f_n(x) = sin_n x/x$. Comme $-1 \leqslant sin_n x \leqslant 1$, on a $-\frac{1}{|x|} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{|x|}$. Pour que x soit solution de l'équation $f_n(x) = \frac{1}{3}$, il faut donc que $x \in [-3, 3]$; la fonction f_n étant paire, il reste à prouver que cette équation a une et une seule solution $x_0 \in]0, 3]$. Notons que, sur cet intervalle, $0 < sin_n x \leqslant 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}_0, f_n$ est strictement décroissante sur $]0, 3]$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ car $f_1'(x) = (x\ cos\ x - sin\ x)/x^2 < 0$ (le numérateur de cette fraction s'annule en $x = 0$ et admet comme dérivée $-x\ sin\ x < 0$ si $x \in]0, 3]$). De plus, si c'est vrai pour $n = k$, c'est encore vrai pour $n = k + 1$ car $f_{k+1}(x) = f_k(sin\ x)f_1(x)$ est le produit de deux fonctions strictement positives et strictement décroissantes sur $]0, 3]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}_0, lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$. C'est bien connu pour $n = 1$ (il suffit d'hospitaliser la limite) et, si on suppose que $lim_{x\to 0} f_k(x) = 1$, alors $lim_{x\to 0} f_{k+1}(x) = lim_{x\to 0} f_k(sin\ x).lim_{x\to 0} f_1(x) = 1.1 = 1$.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}_0, f_n(3) < \frac{1}{3}$ (autrement dit $sin_n 3 < 1$, ou encore $sin_n 3 \neq 1$). C'est vrai pour $n = 1$ car 3 n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. De plus, si $sin_n 3 = 1$ avec $n \geqslant 2$, alors $sin_{n-1} 3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, une contradiction puisque aucun nombre de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ n'est dans l'intervalle $[-1, 1]$.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, 3]$, avec $f_n(3) < \frac{1}{3}$ et $lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a donc un unique nombre réel $x_0 \in]0, 3]$ tel que $f_n(x_0) = \frac{1}{3}$ (en fait, $x_0 = 1,856...$).

<u>Ont fourni une solution correcte</u>: M. GHEYSENS (BA1 Maths), G. NISOL (BA1 Polytech).

Solution du Problemath 12. Un 21-gone plan convexe possède $\binom{21}{2} - 21{=}189$ diagonales. Si deux de ces diagonales sont parallèles, elles font un angle de $0\,° < 1°$. Sinon, en traçant par un point p du plan les parallèles aux 189 diagonales, on obtient 189 droites distinctes, qui coupent un cercle donné C de centre p en 378 points distincts, déterminant ainsi 378 arcs de cercles sur C. comme $\frac{360}{378} < 1$, l'un au moins de ces arcs correspond à un angle au centre inférieur à 1 °. Il y a donc toujours au moins deux diagonales dont l'angle est inférieur à 1 ° .

Ont fourni une solution correcte: H.P. BUI (élève de 6ème à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de 6ème à l'Athénée de Luxembourg), W. DE DONDER (Ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (Profs de Maths).

Solution du Problemath 13. Posons $E = \{2, 3, 4, ..., 98, 99\}, S = x + y$ et $P = xy$. Le fait que Bob ne puisse pas déterminer x et y à partir de la connaissance de leur produit P implique que x et y ne peuvent pas être deux nombres premiers, ni un nombre premier et son carré, ni un nombre premier et son cube. De plus, aucun des entiers x, y ne peut être un nombre premier > 50, sinon Bob saurait que c'est un des deux facteurs inconnus du produit P, donc il connaîtrait x et y.
La première affirmation d'Alice permet donc de conclure que S ne peut être la somme de deux nombres premiers distincts, ni la somme d'un nombre premier > 50 et d'un autre entier appartenant à E. On en déduit facilement que S ne peut être que l'un des éléments de l'ensemble $\sum = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53\}$.
Comme Bob connaît P et a pu faire le raisonnement ci-dessus, la réponse de Bob à Alice nous informe que P ne peut se décomposer que d'une seule manière en un produit de deux entiers distincts x et $y \in E$ tels que $x + y \in \sum$. Un examen cas pas cas (un peu long, mais routinier) montre alors qu'il n'y a que 103 couples (S, P) possibles.
Comme Alice serait incapable de déterminer x et y si la somme S (qu'elle connaît) pouvait donner lieu à des produits P différents, il faut rejeter, parmi ces 103 couples, tout couple (S, P) pour lequel il existe un couple (S, P') avec $P' \neq P$. Il ne reste alors qu'un seul couple possible, à savoir $(S, P) = (17, 52)$. Par conséquent, les entiers x et y sont 4 et 13.

Ont fourni une solution correcte: H.P. BUI (élève de 6ème à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de 6ème à l'Athénée de Luxembourg), W. DE DONDER (Ingénieur), C. VAN HOOSTE (Prof de Maths).

Pour terminer en beauté, voici le palmarès final de tous ceux qui ont résolu au moins deux Problemaths en 2007-2008. Tous ces Problematheurs et Problematheuses sont cordialement invités à un drink, suivi de la remise des diplômes et des prix, qui aura lieu le vendredi 18 avril à 12h30 dans le local 2.08.109 (8ème étage du bâtiment NO, Campus Plaine, Boulevard du Triomphe).

- A résolu 12 Problemaths: G. KERG (élève de 6ème à l'Athénée de Luxembourg)
- Ont résolu 11 Problemaths: H.P. BUI (élève de 6ème à l'Athénée Robert Catteau),C. VAN HOOSTE (Prof de Maths)
- Ont résolu 10 Problemaths: M. GHEYSENS (BA1 Maths), W. DE DONDER (Ingénieur) et C. FESTRAETS (Prof de Maths)
- A résolu 9 Problemaths: J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois)
- Ont résolu 8 Problemaths: DUPONT avec T (Détective) et DIEU (divinité, créateur).
- Ont résolu 6 Problemaths: R. DENDIEVEL (BA3 Maths), DUPOND avec D (Détective) et S. MASSON (licencié en Math U. Mons-Hainaut).
- Ont résolu 5 Problemaths: C. LONARDO (BA1 Maths), M. LENAERTZ (BA1 informatique), M. MARTINS PINTO, G. NISOL (BA1 Polytech).
- Ont résolu 4 Problemaths: C. GENIN (BA1 Maths), S. REXHEP (BA2 Math), J. ROBE (BA2 Polytech), A. KIEFER (BA3 Math).
- Ont résolu 3 Problemaths: O. BOES, I. CHARLIER (BA1 Math), X. GHEYSSENS (BA1 Polytech), A. DEKERCKHEER (BA3 Math), B. DEVILLE, T. VANAUDENHOVE (BA3 Polytech), K. MADRANE (5ème année Polytech).
- Ont résolu 2 Problemaths: J. MEYER (BA1 Math), V. LOODTS (BA1 Physique), M. AMEZOUAK, N. FLAGOTHIER, F. THONAR (BA1 Polytech), C. DE BACKER (BA2 Polytech)