PROBLEMATHS

3 décembre 2007

Problemath 7

Etant donné un cercle de rayon 1, on inscrit successivement un carré dans ce cercle, puis un cercle dans ce carré, puis un octogone régulier convexe dans ce deuxième cercle,etc..., en alternant toujours cercles et polygones réguliers inscrits et en doublant à chaque étape le nombre de sommets du polygone. Que vaut la limite de la suite des rayons des cercles ainsi construits ?

Problemath 8

La fonction $f : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}^4$ est définie par

$$f(a, b, c, d) = (|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$$

Est-il vrai que, quel que soit le quadruple initial $(a, b, c, d) \epsilon\ \mathbb{N}^4$, on obtient toujours le quadruple $(0, 0, 0, 0)$ en itérant f un nombre fini (suffisamment grand) de fois ?

Problemath 9

Que vaut :

$$\frac{1 + \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^8}{9!} + \frac{\pi^{12}}{13!} + \dots}{\frac{1}{3!} + \frac{\pi^4}{7!} + \frac{\pi^8}{11!} + \frac{\pi^{12}}{15!} + \dots} ?$$

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 21 décembre à 14h. Pour rappel: vous pouvez les déposer dans une boîte aménagée à cet effet dans le local 2.08.109 au 8^{eme} étage du Bâtiment NO à la Plaine, ou dans la boîte aux lettres qui se trouve sur la porte du bureau d'Anne Delandtsheer (Bâtiment U, porte A, 5^{eme} étage) à la Faculté des Sciences Appliquées au Solbosch, ou encore les envoyer par e-mail à jdoyen@ulb.ac.be.

Solution du Problemath 4.

Soit a un sommet du carré. Désignons par b et c les deux sommets adjacents, et par p et q les sommets du quadrilatère curviligne situés sur le quart du cercle de rayon 1 centré en a (p étant supposé plus proche de b que q). L'aire cherchée vaut $A + 4A'$, où A est l'aire du carré de côté $[p, q]$ inscrit dans le quadrilatère curviligne, et où A' est l'aire de la région comprise entre l'arc de cercle pq et sa corde $[p, q]$.

Les triangles abq et acp étant équilatéraux, l'angle $\widehat{paq}$ mesure 30° et la longueur $|pq|$ vaut donc $2\ sin\ 15°$. Il en résulte que $A = 4\ sin^2\ 15° = 2(1 - cos\ 30°) = 2 - \sqrt{3}$. D'autre part, A' est la différence entre l'aire du secteur circulaire de centre a et d'angle 15°, et l'aire du triangle apq, autrement dit $A' = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\ sin\ 30° = \frac{1}{12}(\pi - 3)$. En conclusion, l'aire cherchée vaut $(2 - \sqrt{3}) + \frac{4}{12}(\pi - 3) = 1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), I. CHARLIER, C. GENIN, M. GHEYSENS, C. LONARDO (BA1 Maths), B. GUILHAS (BA1 Physique), M. LENAERTZ (BA1 Informatique), R. LAVENDOMME (BA1 Chimie), X. GHEYSSENS, M. MARTINS PINTO, G. NISOL (BA1 Polytech), S. REXHEP (BA2 Maths) J. ROBE (BA2 Polytech), A. DEKERCKHEER, A.KIEFER (BA3 Maths), B. DEVILLE, T. VANAUDENHOVE (BA3 Polytech), K. MADRANE ($5^{\text{ème}}$année Polytech), S. MASSON (Licencié en Maths U. Mons-Hainaut), W. DE DONDER (Ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (Profs de Maths), DUPOND avec D et DUPONT avec T(Détectives), J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois) et DIEU(divinité, créateur).

Solution du Problemath 5.

Il y a $n(n-1)/2$ couples d'entiers (i,j) avec $1 \leq i < j \leq n$. Parmi ceux-ci, il y en a $n-d$ où i et j sont à distance d, à savoir $(1,d+1),(2,d+2),...,(n-d,n)$. La probabilité demandée vaut donc $2(n-d)/n(n-1)$, et cette probabilité est clairement maximale lorsque $d=1$. L'évènement le plus probable est donc que les deux personnes soient l'une derrière l'autre dans la file. L' espérance mathématique de la distance qui les sépare vaut

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{n(n-1)}\textstyle\sum_{d=1}^{n-1} d(n-d) &= \tfrac{2}{n(n-1)}(n\textstyle\sum_{d=1}^{n-1} d - \sum_{d=1}^{n-1} d^2)\\ &= \tfrac{2}{n(n-1)}(\tfrac{n^2(n-1)}{2} - \tfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}) = \tfrac{n+1}{3}\end{aligned}$$

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), M. GHEYSENS, C. LONARDO (BA1 Maths), M. LENAERTZ (BA1 Informatique), G. NISOL (BA1 Polytech), R. DENDIEVEL, A. KIEFER (BA3 Maths), S. MASSON (licencié en maths U. Mons-Hainaut),W. DE DONDER, R. ENGLEBERT(ingénieurs) C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (profs de Maths), DUPOND avec D et DUPONT avec T (Détectives), J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois), DIEU (divinité, créateur) et Jean BONNEAUX (BA1 Carrosserie).

Solution du Problemath 6.

$N = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2304 + 2^n = 48^2 + 2^n$. Comme $49^2 = 2401$ et $50^2 = 2500$, on vérifie facilement que N n'est pas le carré d'un entier lorsque $n < 8$. On peut donc supposer $n \geqslant 8$. S'il existe un entier k tel que $k^2 = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^8(1 + 8 + 2^{n-8})$, alors $9 + 2^{n-8}$ doit aussi être un carré (car k^2 et 2^8 sont des carrés). Il existe donc un entier positif t tel que $9 + 2^{n-8} = t^2$, c'est-à-dire $t^2 - 9 = (t-3)(t+3) = 2^{n-8}$. Il en résulte que $t-3$ et $t+3$ sont des puissances de 2 qui diffèrent de 6. Par conséquent, $t-3 = 2$ et $t+3 = 8$, donc $t = 5$. On en déduit que $n = 12$.

Ont fourni une solution correcte:
H.P. BUI (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée Robert Catteau), G. KERG (élève de $6^{\text{ème}}$ à l'Athénée de Luxembourg), M. GHEYSENS (BA1 Maths), M. LENAERTZ (BA1 Informatique), R. DENDIEVEL (BA3 Maths), K. MADRANE ($5^{\text{ème}}$année Polytech), S. MASSON (Licencié en Maths U. Mons-Hainaut), W. DE DONDER (Ingénieur), C. FESTRAETS, C. VAN HOOSTE (Profs de Maths), DUPOND avec D et DUPONT avec T (Détectives), J.C. JUNCKER (Premier Ministre Luxembourgeois) et DIEU (divinité, créateur).