4

Les complexes

EN SIXIEME, ON SAIT CALCULER ...

1. Calculer le reste et le quotient des divisions suivantes

   a) $3x^5 - 9x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 10x + 10$ divisé par $3x^3 - 2x + 5$

   b) $2x^4 - 5x^3 + 60x - 41$ divisé par $x + 3$

2. Effectuer

$$\frac{\sqrt[3]{12a^4b^5} \cdot \sqrt[3]{45b}}{\sqrt[3]{5b^2} \quad \sqrt[3]{4ab}} \qquad a, b \in \mathbb{R}_0^+$$

3. Si $p > \frac{1}{8}$, calculer

$$x = \left(p + \frac{p+1}{3} . \left(\frac{8p-1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(p - \frac{p+1}{3} . \left(\frac{8p-1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

   Indication : calculer x^3 avant de calculer x

   réponse : $x = 1$ ou $x = \cancel{\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8p}}{2}} \notin \mathbb{R}$

4. Sous quelles conditions $x^4 + 1$ est-il divisible par $x^2 + px + q$?
   où $p, q \in \mathbb{R}$

5. Démontrer que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{n} = 2.\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) \quad \text{où } n \in 2\mathbb{N}_0$$

6. Soit $a_1 = x + \frac{1}{x}$, $a_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, ..., $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$

   Calculer $a_{n-1}.a_1 - a_{n-2}$ et exprimer le résultat en fonction de a_n.

7. Calculer

   a) $$\frac{\sqrt[m]{a^{k+p}} \cdot \left(\sqrt[m]{a} \right)^{2m-k}}{\sqrt[m]{a^{m+p}}}$$

   b) $$\sqrt[5]{a \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt[8]{a^7}}$$

   c) $$\frac{\left(10^{-\frac{2}{3}} \right)^2 \cdot \left(10^{-\frac{1}{4}} \right)^4}{\left(10^{-1} \right)^3 \cdot \left(10^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

d) $$\frac{\sqrt{a^3\ b^2}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{9a^7b^4}}{\sqrt{a^5b^2}} + \frac{\sqrt{36a^4b^3}}{\sqrt{9a^2b}}$$

8. Déterminer m pour que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(m - 7).x^2 + (m - 2).x + m + 1 < 0$$

9. Calculer

a) $$(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}} - 1).(a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + 1) - (a - a^{\frac{1}{2}} + 1).(a + a^{\frac{1}{2}} - 1)$$

b) $$\left(\left(a + \left(a^2 - b^3\right)^{\frac{1}{2}}\right).\left(a - \left(a^2 - b^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

10. si $$x = \frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b}$$

$$y = \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b}$$

$$z = \frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2}$$

calculer x.y en fonction de z.

11. a) Rendre rationnel

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$$

b) Résoudre

$$\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x + 20} + \sqrt[3]{x - 132} = 0$$

12. Résoudre

$$\begin{cases} (x + y + z).(y + z) = a \\ (x + y + z).(z + x) = b \\ (x + y + z).(x + y) = c \end{cases}$$

où x, y,z sont les inconnues à trouver en fonction de a, b, c et $2p = a + b + c$.

13. Déterminer k pour que le polynôme $x^3 - k.x^2 + x - 6$ soit divisible par $x + 2$.

14. Déterminer p et q pour que le polynôme $x^4 + p.x^3 + q$ soit divisible par $x^2 + x - 1$.

15. Résoudre

a) $\sqrt{5x - 4} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 11}$

b) $\dfrac{3x + 4}{4x - 1} < \dfrac{6x + 5}{8x + 7}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 > 0 \\ x - y + 2 < 0 \end{cases}$

d) $x + 2.\sqrt{5 - 4x} > 5$

e) $\dfrac{x + 1}{2(x + 2)} + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$

f) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} \leq 5$

g) $\dfrac{1}{x - 4} - \dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x - 1} = 0$

h) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 - 6x + 5} < 0$

i) $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{-x + 4} < -\sqrt{x + 1}$

16. Déterminer a et b de manière que le polynôme

$$2x^4 + ax^3 + 127x^2 + bx + 180$$

soit divisible par le produit $(x - 2).(x - 3)$.

Factoriser dans $\mathbb{R}$ ce polynôme pour les valeurs de a de b trouvées.

17. Un nombre de deux chiffres a une somme de chiffres égale à 10. Les deux chiffres diffèrent de 4. Déterminer ce nombre.

18. Dans un nombre naturel, la somme des chiffres des centaines et des unités est supérieure de 3 au chiffre des dizaines. En inversant l' ordre des chiffres du nombre, ce dernier ne change pas. Déterminer ce nombre, sachant qu' il est divisible par 9.

LES NOMBRES COMPLEXES

Les naïfs en action

Nous n'avons pas encore terminé l'assimilation du corps $\mathbb{R}$ et de ses mystères que nous allons nous laisser entraîner à la découverte du corps commutatif $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pourquoi? Comme certains alpinistes justifient leurs ascensions par le fait que les montagnes sont là, nous pourrions dire que nous étudions $\mathbb{C}$ parce qu'il est là ! C'est une raison mais il en est d'autres; le corps $\mathbb{C}$ contient le corps $\mathbb{R}$ et permet de simplifier une foule de questions.

Faisons donc connaissance avec $\mathbb{C}$. Nous connaissons déjà les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et nous savons qu'ils s'emboîtent selon les relations $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Une équation qui ne peut se résoudre dans l'un d'eux a parfois une solution dans une extension. Ainsi $2x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$ mais bien dans $\mathbb{Q}$. De même, $x^2 - 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$ mais bien dans $\mathbb{R}$.

Mais il y a des équations qui s'obstinent à ne pas avoir de solution dans $\mathbb{R}$ comme $2^x = -3$, $x^{-1} = 0$, $x^2 + 1 = 0$. Le corps $\mathbb{C}$ permet de combler certaines de ces lacunes. L'idée principale est d'introduire un nombre nouveau dont le carré est égal à -1. Un tel nombre est appelé **imaginaire** depuis DESCARTES (1596-1650) et on le note généralement i à la suite d'EULER (1707-1783). Donc

$$i^2 = -1 \qquad (1)$$

Il est à noter que les anglais et les physiciens utilisent plutôt la lettre j lorsqu'ils désirent se servir de ce nombre complexe en électricité et que le symbole i est réservé à l'intensité du courant électrique. On utilise parfois $\sqrt{-1}$ au lieu de i à la suite de GIRARD (1596-1632).

Aujourd'hui, les mathématiciens estiment que i n'est pas plus imaginaire que $\sqrt{2}$ mais la tradition qui consiste à séparer les nombres réels et les nombres complexes subsiste.

Admettons que $\mathbb{C}$ soit un corps commutatif contenant $\mathbb{R}$ et i. Il y a là quelque naïveté mais soyons résolument naïfs pour aller de l'avant. Alors $\mathbb{C}$ contient des nombres complexes tels que 3i, -i, 5-i, $\sqrt{5} - 3.i$, $2 + 7.\sqrt{2}.i$, $\sqrt[3]{\pi} - 4.i$ et plus généralement

$$a + b.i \qquad \text{pour tout } a,b \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Ces nombres s'additionnent facilement (et naïvement) :

$$(a + b.i) + (a' + b'.i) = (a + a') + (b + b').i \tag{3}$$

Ainsi (5 - i) + (3 + 7i) = 8 + 6i .

Grâce à (1), ces nombres se multiplient tout aussi facilement :

$$\begin{aligned}(a + b.i).(a' + b'.i) &= a.a' + a.b'.i + a'.b.i + b.b'.i^2 \\ &= (a.a' - b.b') + (a'.b + a.b').i \qquad (4)\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer l'inverse de $a + b.i \neq 0$:

$$\frac{1}{a + b.i} = \frac{a - b.i}{(a+b.i)(a-b.i)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}.i$$

Nous observons que si $a + b.i \neq 0$, a et b ne sont pas nuls en même temps, on a donc $a^2 + b^2 \neq 0$ et $(a+ b.i)^{-1}$ est défini.

Comme notre but est de disposer de $\mathbb{R}$ et du nouveau nombre i, il semble naturel de définir $\mathbb{C}$ comme étant l'ensemble des nombres complexes $a + b.i$ où $a,b \in \mathbb{R}$ avec les règles d'addition et de multiplication (3) et (4).

Nous obtenons ainsi une première définition de $\mathbb{C}$ dont la rigueur est loin d'être parfaite aux yeux des mathématiciens mais qui nous suffit pour le moment.

EXERCICES :

1. Calculer a) i^2, i^3, i^4, i^5, i^n où $n \in \mathbb{N}$, i^{-1}

b) $(5 + 3i)^3$

c) $\dfrac{(4 - 2i)^2 + i}{1 - i}$

d) $\dfrac{1 + i}{2 - i} + \dfrac{1 - i}{2 + i}$

e) $\dfrac{1 + i}{i} - \dfrac{2}{(1 + i)^2}$

f) $\dfrac{a + bi}{a - bi} + \dfrac{a - bi}{a + bi}$

2. A quelles conditions $(a + bi)(c + di)$ appartient-il à $\mathbb{R}$?

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ a) $x^2 + 1 = 0$ c) $x^4 = 1$

b) $x^3 + x = 0$ d) $x^6 - x = 0$

4. Dans $z = a + bi$ où $a,b \in \mathbb{R}$, on appelle a la partie réelle, $Re(z)$, de z et b la partie imaginaire, $Im(z)$, de z.

a) Que peut-on dire des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle ?

b) Tenter de représenter graphiquement les nombres complexes rencontrés jusqu'ici en posant $a + bi = (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

" A quoi ça sert ? "

Nous avons déjà dit que $\mathbb{C}$ permet une mathématique plus simple et plus unifiée que $\mathbb{R}$. Cela se découvre petit à petit jusqu'en analyse mais ceci dépasse le cadre de l'enseignement secondaire. Voici un aperçu à notre portée.

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \qquad \text{où } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a.\left(x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4.ac}{4a^2} \right] = 0$$

Cette équation a <u>toujours</u> 1 ou 2 solutions dans $\mathbb{C}$ selon que $b^2 - 4ac$ est ou n'est pas nul. En effet, si $b^2 - 4ac < 0$, on a

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.i$$

EXERCICES :

Résoudre les équations :

a) $x^2 = -5$

b) $x^2 = 5 + 12.i$

c) $x^2 = i$

d) $x^2 = 3 - 4.i$

e) $x^2 - 2x + 5 = 0$

f) $\frac{x^2}{2} + (i - 4).x + 5 - 10i = 0$

g) $i.x^2 - (1+i).x + 2(1-i) = 0$

h) $x^6 - x^4 + x^2 - 1 = 0$

Pourquoi parler de naïveté ?

Il est naïf de croire sans autre forme de procès à l' existence d'objets mathématiques ayant les qualités que nous désirons. L'existence de tels objets est en fait un des principaux soucis du mathématicien. Dans l'enseignement secondaire on n'y prête guère d'attention parce que la plupart des objets étudiés s'obtiennent par abstraction du monde physique qui nous entoure.

Il est naïf de croire sans démonstration qu'il existe un corps $\mathbb{C}$ commutatif contenant $\mathbb{R}$ et un élément i tel que $i^2 = -1$. Pour convaincre les sceptiques (qui sont dès lors d'irréductibles naïfs) qui estiment que nous sommes en train de couper les segments de droite en $\sqrt{2}$ dans le sens de la longueur, soyons plus naïfs encore en supposant que $\mathbb{C}$ est après tout un corps ordonné tout comme $\mathbb{R}$... certains élèves n'en doutent pas.

Dès lors, on doit donc pouvoir décider si $i<0$ ou $i=0$ ou $i>0$. Personne ne conçoit que i puisse être nul car $i^2 = -1$ et $0^2 = 0$.

Si $i>0$, on a $i.i > 0$ donc $i^2 = -1 > 0$ ... ce qui est ridicule.

Il faudrait donc que $i < 0$ disent les esprits logiques.Certes, mais la règle des signes entraînerait à nouveau $i.i > 0$ donc $i^2 = -1 > 0$!

Il faut donc se rendre à l' évidence, $\mathbb{C}$ ne peut pas être un corps commutatif ordonné.

Faut-il condamner la naïveté ?

Au contraire, elle permet d'aller de l' avant, de découvrir. Mais il convient de la contrôler, d' en prendre conscience, de s' imposer des vérifications, des haltes prudentes entre les explorations.

Pour vous édifier, voici une belle histoire du mathématicien irlandais **Hamilton** (1805-1865), un enfant prodige capable de lire le latin, le grec et l' hébreu à 5 ans, l' italien et le français à 8 ans, le sanscrit et le persan à 14 ans. Vers 1828, déjà, ayant bien compris la structure de $\mathbb{R}$, Hamilton voulut naïvement construire un corps commutatif de **ternions** de la forme $a + b.i + c.j$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et où i,j sont des nombres complexes tels que $i^2 = j^2 = -1$. En fait, nous présentons les idées d' Hamilton à notre façon afin de simplifier. Admettons qu' il existe un corps de ternions. L' addition n' y pose pas de problèmes. Examinons la multiplication

$(a + bi + cj).(a' + b'i + c'j) =$

$(aa' -bb' - cc') + (ab' + ba')i + (ac' + ca')j + (bc' + cb')ij$

Il nous faut donc disposer du produit i.j. Une solution tentante est d' admettre une combinaison linéaire de 1, i, j soit

$$i.j = \alpha.1 + \beta.i + \gamma.j \quad \text{où } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$$

En recherchant des inverses de ternions, on finit par observer qu'en particulier

$$(i + j).\ (i - j) = i^2 - j^2 = 0$$

Il ne peut donc exister un corps commutatif de ternions. Hamilton chercha pendant 10 ans à contourner la difficulté et à produire des ternions. Il devait certainement y croire ! Même en abandonnant la commutativité et en permettant $i.j \neq j.i$, il ne peut réaliser son rêve. Tous les systèmes de nombres connus à son époque étaient munis d'une multiplication commutative. L' abandon de ce qui devait apparaître comme une nécessité de la nature fut un effort révolutionnaire. Hamilton dut ainsi passer des ternions aux quaternions et le 16 octobre 1845 au cours d'une promenade avec son épouse, à l' approche d' un pont près de Dublin, il vit la solution du problème : Un quaternion doit avoir la forme

$$q = a + b.i + c.j + d.k$$

où $a ,b ,c ,d \in \mathbb{R}$, $\quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i.j = k = - j.i,$

$$j.k = i = - k.j \quad \text{et } k.i = j = - i.k$$

La légende raconte qu' on peut toujours lire les équations gravées sur une poutre du pont, par leur génial auteur.

Hamilton venait de fonder un des chapitres les plus importants de l' algèbre actuelle : la théorie des algèbres associatives dont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (corps des quaternions) ainsi que l' ensemble des matrices nxn sur $\mathbb{R}$ sont des exemples.

Voici un prolongement classique, parmi beaucoup d' autres, de la découverte d' Hamilton. En 1877, Frabenius (1849-1917) prouve que si D est un corps contenant $\mathbb{R}$ dans lequel tout élément commute avec tout nombre réel, alors D est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Ceci justifie que Hamilton ait pu chercher durant 15 ans environ à construire une extension de $\mathbb{C}$.

<u>Une histoire romancée</u>

L' enthousiasme suscité par $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ amène certains auteurs de manuel, par ailleurs souvent excellents, à enjoliver quelque peu l' Histoire! Selon une affirmation célèbre à Kronecker (1821-1891), seuls les nombres naturels sont une création de Dieu et tout le reste (en mathématique) est l' oeuvre de l' homme. Aujourd'hui, on peut même penser que $\mathbb{N}$ est l' oeuvre de l' homme ... mais parlons de cet ensemble en le supposant donné. Voici donc le fascinant roman des extensions successives de la notion de nombres.

L'homme s'aperçut que certaines équations linéaires telles que $x + 5 = 0$ n' ont pas de solution dans $\mathbb{N}$ et ... crac! l' homme invente les nombres négatifs. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est né. (Certains diront $\mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}$orro ou $\mathbb{Z}$orglub mais cela n' a rien à voir) . L' homme est heureux car toutes les équations $x + a = 0$ ($a \in \mathbb{Z}$) ont une solution. Mais les meilleurs moments ont une fin. L' homme voit que les équations $a.x + b = 0$ ($a \in \mathbb{Z}$) n' ont pas toutes une solution et ... recrac! l' homme invente les nombres rationnels, l' ensemble $\mathbb{Q}$ (comme Kwotient) et toutes nos équations ont une solution, na! ... (Enfin, pas toutes, car $0.x + 3 = 0$ s' obstine parmi d' autres). Tout lecteur futé comprend que ce n' est pas fini, que l' homme va craquer à nouveau. Mais ici, l' histoire cousue de fil blanc se fait petite et discrète car l' homme initié entre temps au théorème de Pythagore voudrait bien résoudre $x^2 - 2 = 0$ et ça! c'est mortel dans $\mathbb{Q}$. Donc l' homme invente $\mathbb{R}$ mais c' est nettement moins clair que les créations précédentes car il a procédé en cachette, au fond du jardin, par une nuit sans lune. Chacun se prépare pour le crac final que le prof emmène comme un sprint au tour de France : l'homme découvre que l' équation $x^2 + 1 = 0$ est toujours orpheline et il fonde $\mathbb{C}$ pour réparer cette injustice...

Comme toutes les histoires, celle-ci a un fond de vérité, mais on se pose tout de même quelques questions. Pourquoi l' homme se penche-t-il sur telle équation et pas sur une autre ? Pourquoi pas $10^x = 2$ (et voilà les logarithmes), $\sin x = 2$ (une équation vraiment bien bonne) ou $x^{-1} = 0$?

En vérité, les équations se sont longtemps imposées à l' homme au travers de problèmes avant qu' il ne songe à les examiner de façon systématique. Ce n' est pas par ce biais que ce sont imposés $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

L' ensemble $\mathbb{Q}$ s' impose par ~~les~~ les proportions et $\mathbb{R}$ par l' insuffisance de $\mathbb{Q}$ dans ce domaine. Ce sont en fait $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{R}^+$ qui se sont imposés depuis l' antiquité. Les nombres négatifs et les nombres complexes se sont bien , eux, imposés par la nécessité de résoudre des équations mais il fallut des millénaires pour que l' homme accepte ces notions et ce ne fut pas l' oeuvre d' un moment. Nous y reviendrons dans la section suivante.

Quant aux méthodes d' extension, depuis les grands précurseurs que furent Hamilton et Galois (1811-1832), les mathématiciens en ont fait un outil de travail systématique jusqu'en théorie des équations différentielles et en physique théorique.

Des nombres négatifs ou imaginaires ? ... Bêêrk !!

L' homme s' est toujours bien moqué des nombres et pour tout dire, il ne les aimait guère. Ce sont les nombres qui se sont imposés à lui. Les nombres négatifs furent refusés pendant des millénaires. Voyez encore aujourd'hui dans le sens péjoratif qui s' attache au mot négatif, le refus d' utiliser ces nombres dans la vie courante. Dans un bâtiment, on distingue encore souvent le deuxième étage,le premier étage, le rez-de-chaussée ou les caves. Cette fois, les élèves prennent la défense du mathématicien : ces événements sont le fait de l' homme de la rue; le mathématicien, lui, pur et dur, aime bien les nombres négatifs, irrationnels, périodiques, rachitiques et leur prodigue ses meilleurs soins ... un petit "zoom" dans le temps va décevoir nos chers élèves.

Voici le plus grand algébriste de l' antiquité, Diophante (3ème S. après J.C.), le mathématicien et historien Kline écrit à son propos " Diophante accepte uniquement les racines rationnelles positives et ignore toutes les autres et même quand une équation quadratique a deux racines positives, il n' en donne qu' une, la plus grande. Quand une équation qui a été résolue conduit clairement à deux racines négatives ou imaginaires, il rejette l' équation et dit qu' elle n' est pas résoluble ".

Beaucoup plus près de nous, voici encore ce qu' écrit Kline: " Peu de mathématiciens des 16ème et 17ème siècles acceptent les nombres négatifs. Il y avait quelques croyances curieuses à leur sujet. Bien que Wallis (né en 1616) fut en avance sur son temps et qu' il acceptât les nombres négatifs, il pensait qu'ils étaient plus grands que l' infini mais non inférieurs à zéro. Descartes rejette les racines complexes. Considéré par beaucoup comme le plus grand mathématicien de tous les temps, Newton (1643-1727) estime que les racines complexes n' ont pas de signification.

<u>Mais alors, comment $\mathbb{C}$ s' est-il imposé ?</u>

La première apparition d' un nombre complexe se situe au premier siècle après J.C. dans un travail du Grec d' Alexandrie Huon, concernant les pyramides. Il est conduit à l' évaluation $\sqrt{81-144}$ qu' il transforme froidement (à moins que ce ne soit un copiste de son manuscrit) en $\sqrt{144-81} = \sqrt{63}$.

Diophante s' attaque au problème suivant :" Un triangle rectangle a une aire de 7 unités carrées et un périmètre de 12 unités. Trouver les longueurs des côtés ". Dans les notations actuelles, soient x et y les longueurs des côtés de l' angle droit. On a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 7 \\ x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 \quad \text{par Pythagore} \end{cases}$$

La résolution du problème, obtenue en remplaçant y par $\frac{14}{x}$ livre

$$-24.x^2 + 172.x - 336 = 0 \text{ donc } x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Diophante fait ce calcul mais ne pousse pas plus loin pour s' enquérir de ce que $\sqrt{-167}$ pourrait signifier.

Durant le millénaire suivant, notamment chez les mathématiciens indiens, il y a une prise de conscience du fait qu' un nombre négatif n' est pas le carré d' un nombre réel.

Cardan (1501-1576), un des algébristes les plus fameux de la Renaissance traite le problème suivant : " partager 10 en deux parts dont le produit est 40 ". Ceci donne

$$x + y = 10 \text{ et } x.y = 40 \text{ avec les solutions } x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Cardan utilise les règles de calcul algébrique ordinaire pour vérifier que ces solutions sont correctes. En outre, il observe que $5 \pm \sqrt{15}$ ne conviennent pas.

Jusqu' ici, les rencontres de nombres complexes se font dans des situations qu' on peut rejeter en parlant de problèmes impossibles. La situation qui va forçer l' admission des nombres complexes est liée aux

Equations du troisième degré ou équations cubiques

Cardan avait découvert des formules permettant de résoudre l' équation cubique générale. Comme les algébristes avaient pris l' habitude de se lancer des défis en vue de résoudre des équations polynômiales et de remporter ainsi les prix de compétitions organisées, Cardan voulut conserver le secret de ses methodes. Il les confia cependant à Tartaglia qui s' empressa de les faire connaître dans un livre. Voici un exemple illustrant la méthode de Cardan .

Prenons

$$x^3 + 9.x = 24$$

Une esquisse de résolution graphique nous montre que cette équation a une solution réelle (figure 1)

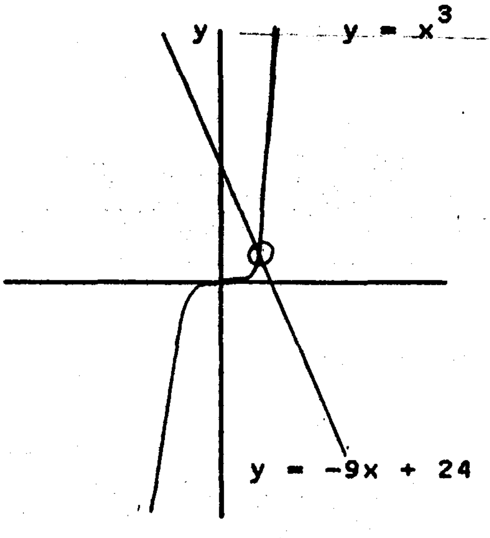


figure 1

Cardan introduit deux inconnues auxiliaires u et v en posant

$$\begin{cases} x = u - v \\ u.v = \frac{9}{3} \end{cases}$$

Ceci livre dans l' équation initiale

$$u^3 - v^3 = 24$$

En éliminant $v = \frac{3}{u}$ de celle-ci, on obtient

$$u^6 - 24.u^3 - 27 = 0$$

Donc $u^3 = 12 \pm \sqrt{171}$ et

$$v^3 = -12 \pm \sqrt{171}$$

Dès lors

$$x = \sqrt[3]{12 + \sqrt{171}} - \sqrt[3]{-12 + \sqrt{171}}$$

Examinons un autre exemple, à savoir

$$x^3 - 15.x = 4$$

Il y a une solution réelle immédiate, $x = 4$. La méthode de Cardan devrait donc livrer cette solution

On pose $\begin{cases} u + v = x \\ u.v = \frac{15}{3} \end{cases}$

En procédant comme ci-dessus, on obtient

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ici, les nombres complexes s' imposent pour atteindre un nombre réel positif, 4; " Ainsi les nombres complexes sont apparus, non pour donner des solutions aux équations quadratiques qui n' en avaient pas et n'en avaient par ailleurs pas besoin, mais plutôt pour faire comprendre pourquoi la formule de Cardan apparamment si efficace ne donnait pas les solutions qu' on attendait " (J.P. Tignol).

Bombelli (1526-1572), un élève de Cardan est le premier à établir des règles de calcul sur les nombres complexes. Dans le calcul précédent il pose que $2 + \sqrt{-121}$ est de la forme $a + \sqrt{-b}$ et devine que les racines cubiques pourraient avoir la même forme. Dès lors il écrit

$$a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

et il souhaite bien sûr que $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$, donc que $a = 2$

Ceci livre

$$2 \pm \sqrt{-b} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}}$$

$$\text{ou } 8 \pm 12\sqrt{-b} - 6b \pm (-b)\sqrt{-b} = 2 \pm \sqrt{-121}$$

Il observe que $b = 1$ est solution car $\sqrt{-121} = 11.\sqrt{-1}$

Bombelli conclut que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$

Après Bombelli, beaucoup d' autres péripéties furent vécues. A la fin du 18ème siècle, $\mathbb{C}$ fut parfaitement compris par Wessel (1745-1818) et Organol (1768-1812). Le grand Gauss (1777-1855) se met à utiliser couramment $\mathbb{C}$ et dès lors tous les mathématiciens suivirent le mouvement.

Explorer $\mathbb{C}$

Nous décidons que $\mathbb{C}$ est l' ensemble des expressions de la forme

$z = x + i.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i un symbole fixé tel que $i^2 = -1$

Nous décidons que $\mathbb{C}$ se structure par une addition et une multiplication définies comme suit :

Si $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y'$, alors

$$z + z' = (x + x') + i.(y + y')$$

$$z \,.\, z' = (x.x' - y.y') + i.(x.y' + x'.y)$$

Exercices :

1. Vérifier que si z et z' sont des réels ($y = y' = 0$), alors $z + z'$ et $z \,.\, z'$ sont la somme et le produit dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer a) $(x + i.y).(x - i.y)$

   b) $(x + i.y)^2$

   c) $(x + i.y)^3$

   d) $\dfrac{3 - 4.i}{i}$

   e) $\dfrac{1}{4 - 3.i}$

   f) $\dfrac{4 + 3.i}{4 - 3.i}$

   g) $\dfrac{1 + \sqrt{3} + i.(1 - \sqrt{3})}{\sqrt{2} - i.\sqrt{6}}$
3. Pour quelles valeurs de a et de b dans $\mathbb{R}$, le nombre complexe $(a + b.i)^2$ est-il a) réel ?

   b) imaginaire pur (multiple de i) ?
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ a) $z^2 + 2z + 2 = 0$

   b) $4z^2 - 2z + 1 = 0$

   c) $z^2 = 1 + \dfrac{2}{z^2}$
5. Pour quelle(s) valeur(s) de β, l' équation $z^2 + \beta z - 4 = 0$ a-t-elle une solution $1 + i$? Quelle est l'autre solution ?
6. Résoudre dans $\mathbb{C}$

   a) $z^4 - 1 = 0$

   b) $z^3 - 1 = 0$

   c) $z^2 = i$

   d) $z^3 = i$

   e) $(1 - i)z^2 - (3 - i)z + 2 = 0$

f) $\frac{z+i}{z-i} = 3.\frac{z-i}{z+i}$

g) $z^2 = 4ab + 2(a^2 - b^2)i$ où $a, b \in \mathbb{R}$

h) $2(1 - i)z^2 + 8(2 + i)z - 3(1 - 7i) = 0$

i) $z^2 - [\,(3 - i)a + 2i\,]z + 2(1 - i)a^2 + (1 + 3i)a - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$

7. Soit $P(z) = z^3 + a^2z^2 + 4az + 30$ où $a \in \mathbb{N}$

   a) Déterminer a pour que -3 soit zéro du polynôme $P(z)$

   b) Résoudre ensuite $P(z) = 0$ dans le cas où a vaut la valeur trouvée précedemment.

8. Déterminer l' ensemble des complexes z tels que z^4 soit réel et supérieur à 1.

9. Déterminer a, b, c afin que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$a(z^2 + 1) + b(z + i) + c(iz^2 + 2z) = 3i$$

10. Soit $P(z) = z^3 - (6 + 9i)z^2 + (-9 + 45i)z + 54 - 54i$

    Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle, résoudre ensuite cette équation.

11. Soit l' équation $z^3 + (2\lambda + 3i)z^2 + (-2 + 4\lambda i)z - 4\lambda - 2 = 0$

    a) Montrer que $1 - i$ est racine de cette équation

    b) Trouver les autres racines

    c) Trouver λ pour qu' au moins une des racines soit imaginaire pure.

12. Quelle(s) relation(s) doit (doivent) exister entre a, b, p et q pour que a+bi soit racine de l' équation $z^3 + pz + q = 0$ où a, b, p, q $\in \mathbb{R}$?

13. Résoudre $z^3 + 6z = 20$

14. Que faut-il faire pour résoudre $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ par la méthode de Cardan? (Chercher une substitution de variable qui permette de se débarasser des termes quadratiques).

LE TEMPS DE LA RIGUEUR

Suivant Gauss et sur base de l' expérience acquise ci-dessus, on définit souvent $\mathbb{C}$ en remplaçant a + b.i par le couple (a , b).

Définition : $\mathbb{C}$ est l' ensemble des couples réels $(a , b) \in \mathbb{R}^2$ structurés par l' addition et la multiplication :

$(a , b) + (a' , b') = (a + a' , b + b')$

$(a , b) . (a' , b') = (a.a' - b.b' , a.b' + a'.b)$

Théorème : $\mathbb{C}$ est un corps commutatif de neutre additif (0 , 0), de neutre multiplicatif (1 , 0) dans lequel l' inverse de $(a , b) \neq (0 , 0)$ est $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} , \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$

Démonstration : $a, b, c, d, e, f, a', b', c' \in \mathbb{R}$

1. $\mathbb{C}$ muni de ~~la~~ l'addition est un groupe commutatif de neutre (0 , 0), avec (-a , -b) comme symétrique de (a , b) .
   Ceci résulte du fait que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.

2.1. Le produit de deux complexes est un complexe. De plus, le produit de deux complexes non nuls est un complexe non nul, en effet $\begin{cases} aa' - bb' = 0 \\ ab' + a'b = 0 \end{cases}$ livre $\begin{cases} aa'b' - bb'^2 = 0 \\ ab'a' + a'^2b = 0 \end{cases}$

on a donc $a'^2b + bb'^2 = 0$ ou $b.(a'^2 + b'^2) = 0$. Ceci entraîne $a' = b' = 0$ ou $b = 0$ et dans ce dernier cas, le système initial force $a = 0$. Il en résulte (a , b) = (0 , 0) ou (a' , b') = (0 , 0) (Que faut-il critiquer dans cette démonstation ?)

2.2. Le produit de complexes est associatif (à démontrer en exercice)

2.3. (1 , 0) est neutre multiplicatif car (a , b).(1 , 0) = (a, b) = (1 , 0).(a , b)

2.4. $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} , \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ est inverse de $(a , b) \neq (0 , 0)$ (à faire en exercice)

2.5. Le produit de deux complexes est commutatif car
(a , b).(a' , b') = (aa' -bb' , ab' + a'b) = (a' , b').(a , b)

3. La distributivité
   (a , b).[(c , d) + (e , f)] = (a , b).(c , d) + (a , b).(e , f)
   se vérifie en exercice

C.Q.F.D

<u>Propriétés et conséquences</u> :

1. Les nombres complexes (a , 0) constituent un sous-corps de $\mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{R}$ (à démontrer en exercice)

On peut donc écrire

$$(a , 0) = a \ , \ a \in \mathbb{R}$$

2. On pose i = (0 , 1). Dans ce cas, on a si a, b $\in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (a , b) &= (a , 0) + (0 , b) \\ &= (a , 0) + (b , 0) . (0 , 1) \\ &= a + b.i \end{aligned}$$

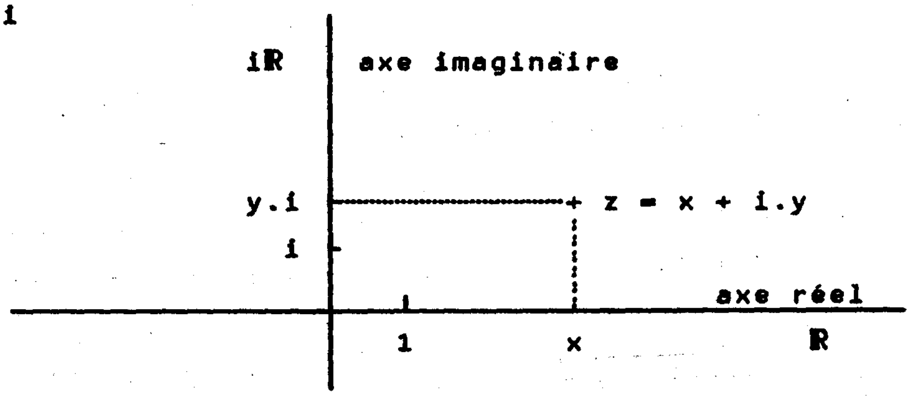
$$\begin{aligned} \text{et } i^2 &= (0 , 1).(0 , 1) \\ &= (-1 , 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Le plan complexe ou plan de GAUSS

En travaillant avec $\mathbb{R}$, nous identifions constamment cet ensemble de nombres à une droite. Il existe de même une représentation graphique de $\mathbb{C}$.

On identifie tout simplement le nombre complexe $a + b.i$ ou (a , b) où a et $b \in \mathbb{R}$ avec le point de coordonnées (a , b) dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$. Une convention dont nous verrons bientôt l' utilité est de supposer le repère orthonormé. L' axe des abscisses est appelé axe réel. Les points de cette droite représentent les nombres réels $(a,0) = a + 0.i = a$ et réciproquement, tout nombre réel se répresente sur cette droite. L' axe des ordonnées est appelé axe **imaginaire**. Les points de cette droite représentent les nombres imaginaires purs $(0,b) = 0 + b.i = b.i$ et réciproquement.

La base canonique est constituée des nombres complexes $(1 , 0) = 1$ et $(0 , 1) = i$



L' intérêt de cette représentation est de permettre la description de certains ensembles de points à l' aide d' une variable complexe et réciproquement de livrer une représentation géométrique de certaines relations entre variables complexes. A titre d'exemple, $Re(z) + Im(z) = 1$ représente la droite passant par 1 et i.

<u>Exercices</u> :

1. Dessiner dans le plan complexe les nombres

$$2,\ -1,\ 2i,\ -i,\ 1 - i,\ -(1 + i),\ 3 + \sqrt{3}.i$$

2. Dessiner dans le plan de Gauss les ensembles suivants
   a) $\{ z : Im(z) > 0 \}$
   b) $\{ z : Im(z) = Re(z) \}$
   c) $\{ z : (Im(z))^2 + (Re(z))^2 = 1 \}$

d) $\{ z : Im(z) + Re(z) \geq 1 \}$

3. Soit a un nombre complexe, quelle est la transformation du plan complexe définie par

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to z + a \ ?$$

4. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dessiner dans le plan complexe α, β, $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$

5. Dessiner dans le plan complexe l' ensemble des solutions des équations suivantes

a) $z - 1 = 0$

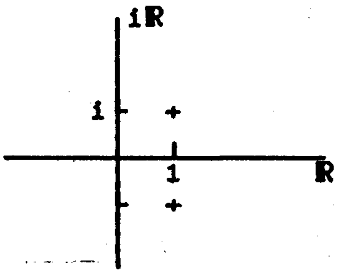
b) $z^2 - 1 = 0$

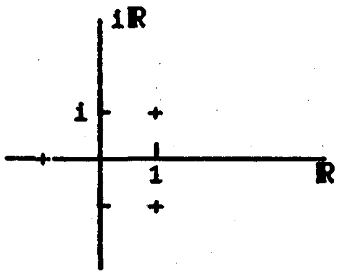
c) $z^3 - 1 = 0$

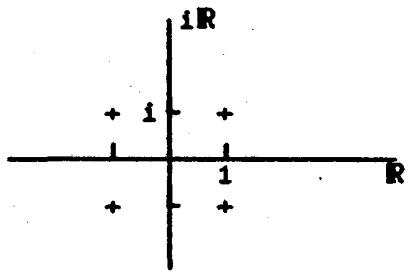
d) $z^4 - 1 = 0$

Que peut-on conjecturer pour $z^5 - 1 = 0$, $z^6 - 1 = 0$?

6. Quels sont les polynômes en z, $z \in \mathbb{C}$ dont les points suivants représentent les racines ?







7. a) Dessiner $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -1 + i$, $2.z_1$, $2.z_2$, $2.z_3$

Quelle est la transformation du plan complexe définie par

a) $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to 2.z$

b) $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to a.z$ où $a \in \mathbb{R}$

b) Dessiner $i.z_1$, $i.z_2$, $i.z_3$. Reconnaissez-vous la transformation

$\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to i.z$

d' un point de vue géométrique ?

8. Quelles sont les transformations géométriques définies par les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ que voici

a) $z \to \frac{1}{2}.z$

b) $z \to -z$

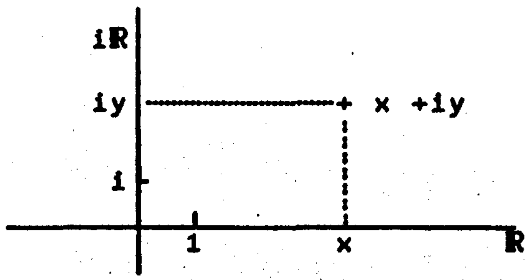
c) $z \to 2iz$

d) $z \to -iz$

Coordonnées polaires d' un nombre complexe

Dans $\mathbb{R}$, la distance d' un élément x à l' origine, c' est-à-dire sa valeur absolue $|x|$, joue un grand rôle. Il en va de même dans $\mathbb{C}$.

Soit $z = x + i.y$ ou $z = (x, y)$ un nombre complexe. Comme nous avons décidé d' adopter un repère orthonormé dans $\mathbb{R}^2$, la distance de z à l' origine vaut $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Ce réel positif est la valeur absolue ou module de z et se note $|z|$.

Si $z = x + i.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Retrouve-t-on les principales propriétés de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$? Voyons cela. Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. on a

1. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

en effet

$$z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$|z_1.z_2|^2 = x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2$$

$$= (x_1^2 + y_1^2).(x_2^2 + y_2^2)$$

$$= |z_1|^2.|z_2|^2$$

2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

en effet

a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$$|z_1 + z_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 \qquad (1)$$

b) $$(|z_1| + |z_2|)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2.\sqrt{(x_1^2 + y_1^2).(x_2^2 + y_2^2)} \qquad (2)$$

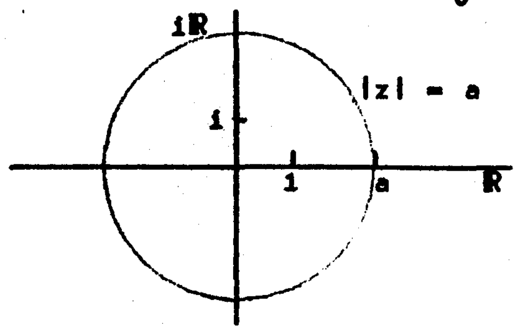
et, étant donné que

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2).(x_2^2 + y_2^2)} \geq x_1x_2 + y_1y_2 ,$$

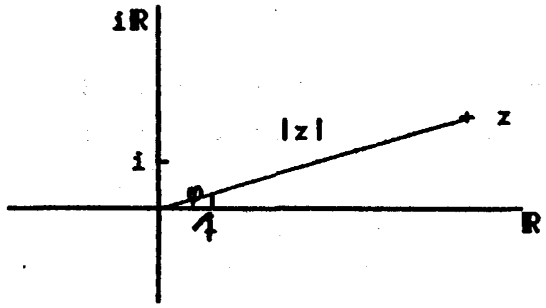
en comparant (1) et (2), la propriété est démontrée.

3. Dans $\mathbb{R}$, la donnée de $|x|$ détermine x au signe près. Pour $a \in \mathbb{R}_0^+$, il existe deux réels x tels que $|x| = a$.

Dans $\mathbb{C}$, les nombres z tels que $|z| = a$ constituent un cercle de centre o et de rayon a.



Pour distinguer les nombres complexes de même module les uns des autres on introduit l' angle φ compris entre o et 2π, déterminé par l' axe réel et la demi-droite d' origine o passant par z. Cet angle est l' argument principal de z et se note arg (z).



On a

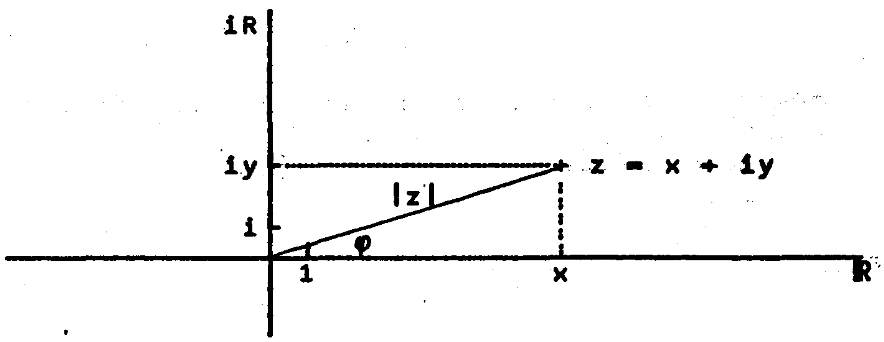
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

L' argument de z comprend tous les couples $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les coordonnées cartésiennes x, y de $z = x + iy$ déterminent le module et l' argument de z. La réciproque est vraie:

Soient $|z| = r$ et φ, les coordonnées polaires de z ($r \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0,2\pi[$). Si nous voyons r comme le module et φ comme l' argument principal d' un nombre complexe, on a

$$\boxed{\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{et } z = r.(\cos\varphi + i.\sin\varphi)}$$



Produit de deux complexes

Soit $z_1 = r_1.(\cos\varphi_1 + i.\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2.(\cos\varphi_2 + i.\sin\varphi_2)$

Calculons $z_1.z_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)]$

$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

On en déduit que

$$\boxed{\begin{gathered} |z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| \\ \arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{gathered}}$$

Dans un produit de complexes, les modules se multiplient et les arguments s' additionnent.

Exercices :

1. Ecrire les nombres complexes suivants au moyen de leurs coordonnées polaires

a) $1 + i$

b) $-i$

c) -2

d) $1 - i\sqrt{3}$

e) $-\pi - i\pi$

f) $3 - i\sqrt{3}$

g) $\frac{1}{i}$

h) $(1 + i)^2$

2. Dessiner $\alpha = 1 + i$, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -2 - i$

a) Dessiner $z_i - \alpha \quad i = 1, 2, 3$

b) Déterminer $|z_i - \alpha|$

c) Que détermine $|z - \alpha|$ dans le plan complexe ?

3. Quelles sont les figures du plan complexe déterminées par

a) $\{ z : |z| \leq 1 \}$

b) $\{ z : |z + 1| = 1 \}$

c) $\{ z : |z - 1| \geq 2 \}$

d) $\{ z : |z - i| = |z + i| \}$

e) $\{ z : |z - 1| < |z + 1| \}$

f) $\{ z : |\mathrm{Im}(z)| < \pi \}$

g) $\{ z : \arg(z) = \frac{\pi}{4} \}$

h) $\{ z : \arg(z - 1) = \frac{\pi}{2} \}$

i) $\{ z : \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ et $|z| \leq 1 \}$

j) $\{ z : |z - \alpha| = r$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+ \}$

4. Dessiner les nombres complexes suivants et leur produit sans calculer les coordonnées cartésiennes de celui-ci

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 + 2i$$

Peut-on faire la même chose pour le quotient de deux complexes, pour l' inverse d' un complexe ?

5. Calculer a) $|(1+i)(3i-4)(1-i)(12i-5)|$

b) $\arg[(1+i)(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)]$

6. Trouver l' ensemble des complexes tels que

a) $\frac{z}{|z|} = i$

b) $\frac{z}{|z|} = -i$

c) $\frac{z}{|z|} = 1$

Pour quelles valeurs de γ, l' équation $\frac{z}{|z|} = \gamma$ a-t-elle une solution ?

7. En multipliant $1 + i$ par z on obtient $-2 -3i$. Calculer $|z|$ et $\arg(z)$ sans calculer z auparavant.

8. Démontrer que si $z = \frac{z_1}{z_2}$, alors

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } \arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Reprendre ensuite l' exercice 4.

9. Démontrer que

$$\boxed{(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi \qquad \varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}}$$

Formule de Moivre (1667-1754)

En déduire que les racines $n^{\text{èmes}}$ de $z = r.[\cos\varphi + i.\sin\varphi]$ ($\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) valent

$$\sqrt[n]{r}.[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i.\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}] \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

10. Si α est une solution de $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, alors $|\alpha| = 1$. Donc α se trouve sur le cercle unité.

Démontrer que 1, $\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3} + i.\sin\frac{4\pi}{3}$ sont les solutions de $z^3 = 1$.

Dessiner dans le plan complexe l' ensemble des solutions de

$$z^n = 1 \text{ pour } n = 2, 3, 4, 5, 12$$

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$

a) $z^5 + 2 = 0$

b) $z^6 + 64i = 0$

c) $z^6 - 2a^3z^3\cos 3\theta + a^6 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$

d) $z^4 = 2.\frac{2 - i}{1 - 3i}$

e) $z^4 - 2z^2\cos 2\theta + 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

Si z_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont les racines de cette équation, calculer $\sum_{i=1}^{4} z_i^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

f) $z^2 + 2.(1 - \cos u).z + 2(1 - \cos u) = 0$, $u \in \mathbb{R}$

g) $2z^2(1 - \cos 2\theta) - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

h) $z^3 = 3iz - i + 1$

i) $(1 + i)z^2 - 4z + 4 = 0$

j) $(z - 2)^3 = 8$

k) $z(z^2 - 3) + i(3z^2 - 1) = 8$

12. Calculer le module et l' argument de

a) $z = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{3} + i)^3} \,.\, (1 + i)^2}{(1 - i)^5}$

b) $z_n = (1 + i\sqrt{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de n, z_n est-il un nombre réel ?

13. Démontrer que $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} . \cos n\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{N}$

14. Soient a, b, c, d $\in \mathbb{R}$. On suppose que toutes les racines de

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

sont des nombres complexes situés dans le plan complexe sur un cercle centré en o et de rayon 1, que vaut la somme des inverses des racines de cette équation ?

15. Calculer le module et l' argument de $z = \dfrac{1}{1 + i.\mathrm{tg}\alpha}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

16. Dessiner l' ensemble des complexes tels que z^4 soit réel et supérieur à 1

17. Que valent a et b si $(2a + 3ib)^2$ (où a, b $\in \mathbb{R}$) est un réel plus grand que 12 ?

18. Trouver l ' ensemble des complexes, $z \in \mathbb{C}$, tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1 - z|$

19. $z = \dfrac{1 + i\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\mathrm{tg}\alpha}$. Calculer les racines carrées de z.

Si $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, quelle est la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}_0$ pour que $z^n \in \mathbb{R}$

20. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $Z = \dfrac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$

a) Calculer le module et l' argument de Z.

b) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$

21. Résoudre

$$z^3 = 2.\left(\frac{(-1 + i\frac{\sqrt{3}}{3})^{14}}{(1 - i)^{18}} + \frac{(-1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})^{14}}{(1 + i)^{18}} \right)$$

22. Soit z un nombre complexe de module ρ et d' argument φ. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z si

$$\begin{cases} \rho.\sin\varphi - \rho.\cos\varphi = 1 \\ \rho^2.\cos\varphi - 4.\rho.\sin\varphi + 1 = 0 \end{cases}$$

Le conjugué d' un nombre complexe :

Définition : Deux points symétriques par rapport à l' axe réel dans le plan de Gauss représentent des complexes conjugués.
Donc, si $z = x + i.y$ ($x, y \in \mathbb{R}$), on appelle conjugué de z, que l' on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = x - i.y$.
l' application $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \overline{z}$ est appelée la conjugaison.

Propriétés: Pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
5. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z.\overline{z} = |z|^2$

Démontrons (4) par exemple: $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i.(y_1 + y_2) \\ \overline{z_1 + z_2} &= (x_1 + x_2) - i.(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \end{aligned}$$

Les autre propriétés se démontrent aussi facilement.

Exercices :

1. Montrer par un dessin et par un calcul que $z + \overline{z}$ est réel pour tout

$z \in \mathbb{R}$

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: a) $|\overline{z}| = |z|$

   b) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

3. a) Soit $Z = z.\overline{z} - 2.z + i.\overline{z} + i$ où $z \in \mathbb{C}$ et $z = x + i.y$

   Pour quels couples (x , y), Z est-il réel ?

   Pour quels couples (x , y), Z est-il un imaginaire pur ?

   b) Mêmes questions pour $Z = \dfrac{z - \overline{z} + 2}{z + 1 - i}$

4. Calculer les racines $8^{\text{èmes}}$ de -256

5. Calculer $\dfrac{(1 + \sqrt{3}.i)^{15}}{(3 - 3.i)^{10}}$

6. Quel est l' argument de $z = \dfrac{(-\cos 10\alpha + i.\sin 10\alpha)^7}{(-\sin 3\alpha + i.\cos 3\alpha)^4}$?

7. Calculer le reste et le quotient de la division suivante

   $(2iz^5 + (i-1)z^4 + z^3 + (1 - 2i)z^2 + iz - 3 + 5i) : (iz^2 + 1)$

8. Trouver un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré dont le terme en z^3 a pour coefficient 1, qui n' admette pas de terme en z et qui admette 1 et -2 pour zéros.

9. Si le nombre complexe z vérifie $z + |z| = 2 + 8i$, que vaut $|z|^2$?

10. Résoudre par rapport à $z \in \mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan de Gauss:

$$z + 3\overline{z} = (2 + i\sqrt{3}).|z|$$

11. Résoudre $z^4 - 3z^2 + 9 = 0$. Dessiner les solutions dans le plan complexe en notant leur module et leur argument.

12. Déterminer les valeurs des coefficient a et b pour que le polynôme

$$P(x) = a.(x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3)^2 - (x^4 + 3x^2 + 2)^3 + b.(x^2 + 1)^4$$

   admette pour zéros les racines de l' équation $x^2 + x + 1 = 0$

FRACTIONS SIMPLES

Théorème de d' Alembert :

> Tout polynôme à coefficients complexes a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

La démonstration de ce théorème ne sera pas faite dans ce cours ,elle dépasse le cadre de l' enseignement secondaire.

Conséquence :

> Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \in \mathbb{N}_0$ admet n racines dans $\mathbb{C}$, à condition de compter celles-ci avec leur multiplicité.

Théorème :

> Si $z = a + b.i$ où $a, b \in \mathbb{R}$, est une racine du polynôme $P(z)$ à coefficients réels, alors $\bar{z} = a - b.i$ est aussi racine de ce polynôme.

Démonstration :

Si on divise $P(z)$ par

$$[\ z - (a + bi)\ ].[\ z - (a - bi)\ ] = z^2 - 2az + (a^2 + b^2),$$

on divise un polynôme à coefficients réels par un polynôme du deuxième degré à coefficients réels. Il s' en suit que le quotient $Q(z)$ et le reste $R(z)$ de cette division seront à coefficients réels et que $R(z)$ sera du premier degré en z.

On a donc

$$P(z) = [\ z - (a + bi)\ ].[\ z - (a - bi)\ ]\ .\ Q(z) + pz + q$$

où $p, q \in \mathbb{R}$

La condition pour que $P(z)$ admette $a + bi$ pour racine s' exprime par la condition suivante:

$$P(a + bi) = 0 \Leftrightarrow p(a + bi) + q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} pa + q = 0 \\ pb = 0 \end{cases}$$

Comme $b \neq 0$ car dans le cas contraire le théorème n' aurait pas à être démontré, on a

$$P(a + bi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

La condition pour que $p(z)$ admette $a - bi$ pour racine est également $\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$

On peut en conclure que si $a + bi$ est racine du polynôme à coefficients réels $P(z)$, $a - bi$ est également racine de ce polynôme.

C.Q.F.D

Conséquences :

1. Tout polynôme à coefficients réels se décompose en un produit de binômes du premier degré à coefficients réels et de trinômes du second degré à coefficients réels, indécomposables dans $\mathbb{R}$.

2. On appelle fraction simple, une fraction du type

$$\frac{a}{(x+b)^n} \text{ ou } \frac{cx+d}{(kx^2+mx+p)^q} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a, b, c, d, m, p \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{R}_0 \\ n, q \in \mathbb{N}_0 \\ m^2 - 4kp < 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, il résulte de ce qui précède que toute fraction rationnelleà coefficients réels dont le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur est décomposable en une suite de fractions simples.

Exercices :

1. On donne l' équation $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$
   a) Montrer que $1 + i$ est solution
   b) Calculer les autres racines et les représenter dans le plan de Gauss

2. Décomposer en fractions simples

a) $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

b) $\dfrac{1}{x^5 + x^2}$

c) $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

d) $\dfrac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)^2}$

e) $\dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^3 - 1}$

f) $\dfrac{x^5 + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$

g) $\dfrac{1}{x^6 - 1}$

h) $\dfrac{1}{x^4 + 1}$

3. Déterminer p et q pour que

$$x^6 + 6x^5 + 9x^4 - px^3 + 6x + q$$

soit un cube parfait.

Fonctions affines sur $\mathbb{C}$

Exercices :

1. Montrer que la multiplication d' un nombre complexe par $z = a + bi$ correspond dans le plan de Gauss
   a) à une rotation si le module de z est unitaire
   b) à une homothétie si l' argument de $\bar{z}$ est nul
2. A quoi correspond l' addition de deux complexes dans le plan de Gauss ?
3. A quoi correspond la transformation $z \to \bar{z}$ dans le plan de Gauss ?
4. Donner l' équation de la symétrie centrée à l' origine dans le plan de Gauss ?
5. Donner l' équation de la symétrie d' axe $Y = Im(z)$ dans le plan de Gauss ?
6. A quoi correspond dans le plan complexe la transformation définie par $f(z) = Re(z)$?
7. A quoi correspond dans le plan complexe la transformation définie par $f(z) = z + k.Im(z)$, $k \in \mathbb{R}$?
8. Donner l' équation de la symétrie d' axe $\left\{\begin{array}{l}\theta = \theta_0\\ r \in \mathbb{R}\end{array}\right.$ dans le plan de Gauss et de la projection orthogonale sur ce même axe.

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to f(z)$ est une fonction, nous pouvons représenter f comme une transformation du plan complexe.
Limitons-nous aux **fonctions affines**

$$z \to a.z + b \quad \text{où } a, b \quad \mathbb{R}$$

et à quelques autres exemples.

Sous leur forme trigonométrique

$$a = |a|.(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$\text{et } z = |z|.(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z))$$

De ce fait, la fonction

$$z \to a.z \quad \text{où } a \in \mathbb{C}$$

est la composée $\rho \circ h$ d'une homothétie de centre 0 et de rapport $|a|$ avec une rotation ρ de centre 0 et d' angle α.

Dès lors,

$$z \to a.z + b \quad \text{où } a,\ b \in \mathbb{C}$$

est la composée d' une translation, d' une homothétie et d' une rotation c' est-à-dire une similitude positive (directe) du plan de Gauss.

<u>Théorème</u> :Les transformations affines du plan complexe, $z \to a.z + b$ avec $a \in \mathbb{C}_o$ et $b \in \mathbb{C}$ constituent le groupe des similitudes positives du plan.

Démonstration:

On vient de voir que toute transformation affine est une similitude positive. Prouvons la réciproque. Soit S une similitude. Elle applique o sur $S(o)$.

Soit t la translation qui applique o sur $S(o)$, alors $t^{-1} \circ S$ est une similitude positive fixant o.

Soit r le rapport de cette similitude et h l' homothétie de centre o et de rapport r.

Alors $h^{-1} \circ t^{-1} \circ S$ est une similitude positive fixant o et de rapport 1 c' est-à-dire une rotation ρ.

Donc $S = t \circ h \circ \rho$. La transformation S coïncide avec la transformation affine $z \to a.z + b$ où $b = S(o)$ et $a = r.(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ car cette dernière a même décomposition $t \circ h \circ \rho$ que S.

C.Q.F.D.

<u>Exercices</u>:

1. Comme $z \to \bar{z}$ est la symétrie bilatérale d' axe réel, montrer que toute similitude du plan complexe est une fonction de la forme

$$z \to a.z + b \quad \text{ou } z \to a.\bar{z} + b \quad \text{où } a \in \mathbb{C}_o \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

et que réciproquement, toute fonction de cette forme est une similitude.

2. Etudier la transformation $T : z \to z^{-1}$ dans le plan complexe :

a) Comment se traduit-elle en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires ?

b) Montrer que T transforme toute droite ne passant pas par o en un cercle passant par o et réciproquement.

c) Montrer que T transforme toute droite passant par o en sa symétrique par rapport à l' axe X = Re(z).

d) Montrer que T transforme tout cercle ne passant pas par o en un cercle ne passant pas par o et réciproquement.

<u>La formule d' Euler</u> (1707-1783)

Quand on a étudié la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$, il n' est pas étonnant de songer à définir la fonction exponentielle complexe

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to e^z$$

en posant

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad \text{où } z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

Il est possible de prouver que cette série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que l' on a, comme dans $\mathbb{R}$

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \quad \text{où } n \in \mathbb{N},$$

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} . e^{z_2}, \ldots$$

Euler observe que si $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \right) + i.\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right)$$

En se souvenant que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{et que } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

il en déduisit que

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad x \in \mathbb{R}} \qquad (1)$$

et le non moins célèbre cas particulier

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Dans un cours de niveau universitaire, on définit souvent la fonction exponentielle avant les fonctions trigonométriques et on introduit celles-ci via les formules d' Euler en s' épargnant les tracas de la trigonométrie :

De (1), on déduit

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \text{et} \quad \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}}$$

On définit aissi les fonctions cosinus hyperboliques et sinus hyperbolique:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

D' autres corps

On pourrait résumer la construction de $\mathbb{C}$ en disant qu' on procède à une extension de $\mathbb{R}$ par un nombre nouveau i tel que $i^2 + 1 = 0$.

Dans cet esprit, on écrit $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ qui se lit extension de $\mathbb{R}$ par i.

On peut généraliser cette construction de bien des manières; ainsi

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b.\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } (\sqrt{2})^2 = 2 \}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{ a + b.\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } (\sqrt{3})^2 = 3 \}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{ a + b.\sqrt[3]{2} + c.\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ et } \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 3 \}$$

Exercices:

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ sont des corps commutatifs, sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Construire d' autres corps en utilisant les idées ci-dessus, par exemple

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \right).(\sqrt{3})$$

3. Partir du corps $\mathbb{F}_2$ constitué de deux éléments 0 et 1 (avec $1 + 1 = 0$) et construire un corps $\mathbb{F}_2(i)$ de 4 éléments en posant

$$i^2 + i + 1 = 0$$

4. Construire un corps de 9 éléments.
5. Construire un corps de 8 éléments.

Bibliographie

- D. r. Green - The historical development of complex numbers
  Mathematical Gazette - 60 (1976) pg 96-107
- R. De Groote - A propos des nombres complexes
  Mathématique et Pédagogie - 15 (1978) pg 3-14
- M. Kline - Mathematical thought from ancien to modern times
  Oxford UP 1972
- H. Trendenthal, B. Nÿdam - Complexe Gatalen
  IONO
- The school Mathematical project - Additional Mathematics book
  Cambridge UP 1968
- J. P. Tignol - Leçons sur la théorie des équations
  Caley - Louvain-La Neuve - 1960
- I. N. Herstein - Topics in Algebra
  Blaidsdell - New York - 1963

JEUX MATHEMATIQUES

Peut-on imaginer des nombres imaginaires?

par Martin Gardner

« Les nombres imaginaires sont une magnifique envolée de l'esprit Divin; ils sont à mi-chemin entre l'être et le non-être ».

LEIBNIZ

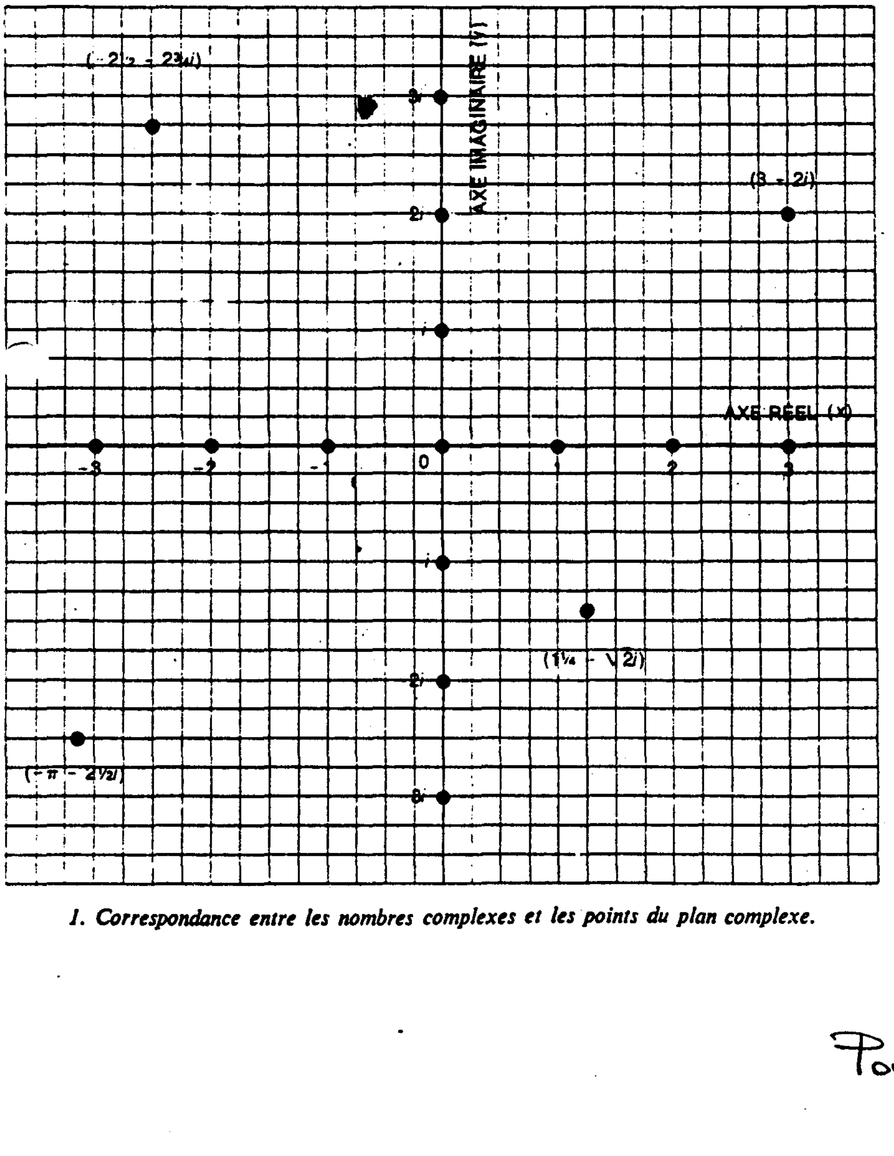
Dans un ancien article (*Scientific American*, juin 1977) sur les nombres négatifs, j'ai indiqué comment l'extension de la définition des « nombres », afin d'y inclure les nombres négatifs, fut une tâche longue et pénible pour les mathématiciens. Le même scénario se répéta, créant encore plus de problèmes, lorsque les mathématiciens découvrirent l'extraordinaire utilité de certains nombres, malencontreusement appelés les nombres imaginaires. C'est une belle et étrange histoire.

Bien qu'il existe quelques remarques antérieures sur le fait qu'un nombre négatif ne peut avoir de racine carrée (car le carré de n'importe quel nombre réel doit être positif), l'histoire des nombres imaginaires ne commence réellement qu'au XVI^{e} siècle en Europe. A cette époque, les mathématiciens et en particulier l'italien Rafaello Bombelli, découvrent que, dans la résolution de problèmes algébriques, il est souvent commode de postuler l'existence de la racine carré d'un nombre négatif. Autrement dit, tout comme l'équation $x + 1 = 0$ ne peut être résolue qu'en posant x égal à -1, de même l'équation $x^2 + 1 = 0$ ne peut être résolue qu'en posant x égal à $\sqrt{-1}$.

L'hypothèse apparemment absurde qu'il existait une racine carrée de -1 était fondée sur des arguments pragmatiques : cette hypothèse simplifiait certains calculs et par conséquent pouvait être utilisée pour autant que l'on obtenait, en fin de calcul, des quantités réelles. Le parallélisme avec les règles d'utilisation des nombres négatifs est frappant. Si vous cherchez le nombre de vaches se trouvant dans une prairie (c'est-à-dire si vous travaillez dans le domaine des entiers positifs), vous serez tentés d'utiliser des nombres négatifs en cours de calcul; bien évidemment, le résultat final devra être un nombre positif car il n'existe pas de vache négative.

Durant le XVII^{e} et le XVIII^{e} siècle, les mathématiciens européens découvrirent de nouveaux usages des racines carrées de nombres négatifs. Ce fut Léonhard Euler qui introduisit au XVIII^{e} siècle le symbole i (la première lettre d' « imaginaire »). Une citation souvent reproduite et attribuée à Euler énonce que : « de telles racines ne sont, ni rien, ni moins que rien, ni plus que rien, mais strictement imaginaires ou impossibles ». Les mathématiciens finirent par élaborer des règles algébriques pour calculer, avec les « imaginaires purs » (le produit d'un nombre réel par i) et avec ce que l'on appellera plus tard les nombres complexes (la somme d'un nombre imaginaire pur et d'un nombre réel).

Un nombre complexe a la forme $a + bi$, où a et b peuvent être n'importe quel nombre réel. (Dans cette formule, le signe plus n'indique pas une addition au sens usuel; il sert essentiellement à séparer la partie réelle a du nombre complexe de sa partie imaginaire ib). Autrement dit, si a est égal à 0 et b est différent de 0, ce nombre complexe est un imaginaire pur ib. Si b est égal à 0, alors ib disparaît laissant un nombre réel a. L'ensemble des nombres complexes contient donc comme sous-ensembles : le sous-ensemble des nombres réels et le sous-ensemble des nombres imaginaires purs, tout comme l'ensemble des nombres réels contient les nombres entiers, rationnels et irrationnels. En langage moderne, les nombres complexes forment une structure mathématique appelée un corps dont les éléments obéissent aux lois habituelles de l'arithmétique. Le corps des nombres complexes est clos par rapport aux opérations d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions, ce qui veut dire qu'en appliquant ces opérations à n'importe quel couple de nombres complexes (sauf diviser par zéro), on obtient toujours un nombre appartenant au corps. La découverte du corps des complexes parachève l'algèbre traditionnelle au sens où n'importe quelle équation algébrique peut être résolue



1. Correspondance entre les nombres complexes et les points du plan complexe.

Pour la Science (Scientific american)
octobre 79.

dans ce corps. Ce corps se trouve être aussi clos (en langage moderne, complet) pour les opérations de l'analyse (passages à la limite) et cette découverte a permis le développement de la vaste branche des mathématiques concernant les fonctions de la variable complexe. Nombre de résultats en physique moderne résultent de l'extension de l'algèbre au corps des complexes. La première utilisation importante des nombres complexes en physique est due à Charles Proteus Steinmetz qui trouva qu'ils étaient indispensables pour tout calcul rapide sur les courants alternatifs. De nos jours, aucun ingénieur électricien ne peut s'en passer, ni aucun physicien travaillant en hydrodynamique ou aérodynamique. Ces nombres jouent aussi un rôle fondamental en théorie de la relativité (dans laquelle on fait jouer à l'espace et au temps un rôle symétrique en considérant les trois dimensions spatiales comme reélles et la dimension temporelle comme imaginaire), en mécanique quantique et dans bien d'autres branches de la physique.

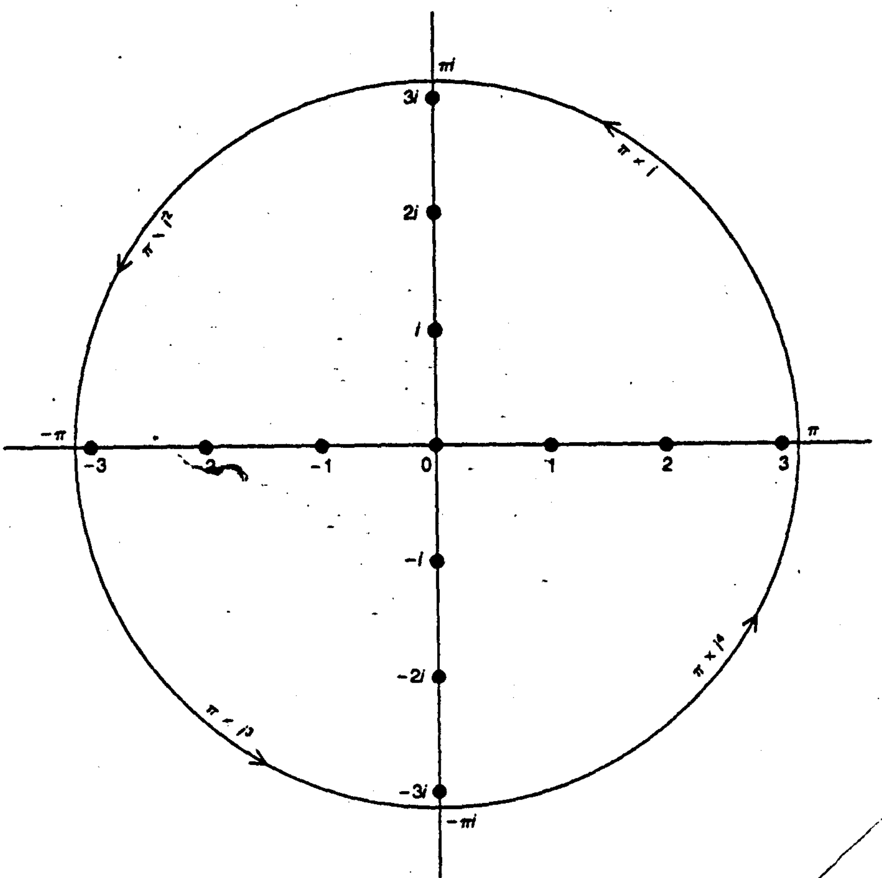
Parce qu'il y a encore des réticences à considérer *i* comme un nombre, il n'est pas rare, même de nos jours, qu'un physicien, un philosophe ou même un mathématicien affirme que *i* n'est pas réellement un nombre mais seulement le symbole d'une opération que nous verrons plus loin. Personne n'a aussi bien réfuté ces disputes stériles qu'Alfred North Whitehead, dans le chapitre sur les nombres imaginaires de son *Introduction aux Mathématiques*. Il écrit : « A ce stade, il peut être utile de remarquer qu'un certain type d'esprit se complique toujours la vie, ainsi que celle des autres, en argumentant de la validité des termes techniques. Les nombres irrationnels sont-ils correctement désignés par le mot nombre? Les nombres positifs et négatifs sont-ils réellement des nombres? Les nombres imaginaires sont-ils imaginaires et sont-ils des nombres? Toutes ces questions sont futiles. On doit savoir et accepter qu'en science, les termes techniques sont choisis arbitrairement, tout comme les prénoms donnés aux enfants. Il n'est pas question de savoir s'ils sont vrais ou faux; en revanche, ils peuvent être appropriés ou inadéquats; en effet, ils peuvent être construits pour qu'il soit facile de s'en souvenir ou bien pour suggérer des idées importantes et précises. L'idée essentielle est assez bien exprimée par Humpty Dumpty, dans *Alice au Pays des Merveilles*, qui dit, à propos de l'usage des mots : « je leur accorde quelques libertés et leur fait signifier ce que je veux ». Nous ne nous soucierons donc pas de savoir si les nombres imaginaires sont imaginaires ou si ce sont des nombres, mais nous prendrons ce terme comme la désignation arbitraire d'un concept mathématique précis que nous allons maintenant tâcher de rendre évident.

Le comportement des nombres complexes est si proche de celui des nombres ordinaires lorsqu'on les additionne, les soustrait, les multiplie et qu'on les divise (en suivant les axiomes du corps des nombres complets) que la plupart des mathématiciens n'hésitent plus à les appeler des nombres et les considèrent comme ayant autant de « réalité » que les nombres négatifs. Même les nombres entiers ne sont autres que des symboles que l'on manipule selon certaines règles précises. On ne les considère plus « réels » que les autres nombres que dans la mesure où leur utilisation se rapproche davantage de notre expérience courante, comme par exemple compter sur nos doigts des vaches, des personnes, etc. Ce que l'on oublie est que seuls les doigts, les vaches, les personnes sont réels et non les symboles avec lesquels on les compte. Dans le domaine des mathématiques, *i* est tout aussi réel que 2. Si l'on veut, on peut se représenter 2 comme un opérateur et rien d'autre; 2 est un symbole qui nous indique que l'on double 1.

Il n'empêche que la plupart des gens sont tellement habitués à travailler avec les nombres réels qu'ils éprouvent un grand soulagement lorsqu'ils découvrent qu'il existe une interprétation géométrique simple des nombres complexes. Cette interprétation qui permet de « voir » facilement ce que sont ces nombres, associe à chaque nombre complexe un point du plan cartésien; le premier inventeur de cette ingénieuse association fut Caspar Wessel, un enseignant autodidacte norvégien, qui fit cette découverte à l'occasion d'un cours en 1797. Peu d'années après, l'idée fut redécouverte par Jean Robert Argand, un bibliothécaire suisse (qui a publié un petit opuscule sur ce sujet en 1806) et indépendamment par le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss.

Comme indiqué sur la figure 1, l'idée fondamentale est de considérer l'axe horizontal du plan cartésien comme l'axe des nombres réels et l'axe vertical comme la droite des points correspondant aux nombres imaginaires purs. Autrement dit, on établit des correspondances biunivoques entre les nombres réels et les points de l'axe des x et entre les nombres imaginaires purs et les points de l'axe y. Comme je l'ai signalé, ces deux ensembles sont des sous-ensembles de l'ensemble des nombres complexes et, par conséquent, les autres nombres complexes peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les autres points du plan. Pour obtenir les coordonnées du point associé à un nombre complexe, on mesure simplement la partie réelle sur l'axe réel et la partie imaginaire sur l'axe imaginaire. Les points correspondant à quatre nombres complexes sont indiqués sur la figure 1.

Avec cette interprétation des nombres



2. Comment multiplier par i, i², i³ *et* i⁴.

complexes, il est possible d'oublier complètement la notion déroutante que i est la racine carrée de -1 (ce n'est évidemment pas vrai au sens habituel d'extraction d'une racine). Désormais, un nombre complexe peut être simplement considéré comme un couple ordonné de deux nombres réels; le premier est mesuré sur l'axe réel et le second sur l'axe imaginaire. Autrement dit, en définissant correctement les opérations arithmétiques combinant ces couples de nombres, on peut construire une algèbre des couples ordonnés de nombres réels qui est équivalente à l'algèbre des nombres complexes. La phrase obscure « la racine carrée d'un nombre négatif » n'est pas utile dans cette nouvelle algèbre, bien que l'idée qu'elle soustend soit évidemment présente sous une autre forme et d'autres notations. Si cette algèbre des couples ordonnés s'était développée avant les nombres complexes, personne ne se préoccuperait des nombres imaginaires, ni s'interrogerait sur leur existence ou leur non-existence.

Immédiatement après la découverte de cette interprétation des nombres complexes, les mathématiciens s'interrogèrent sur la généralisation à trois dimensions de cette idée fondamentale, c'est-à-dire aux points de l'espace. La généralisation est hélas difficile sans modification profonde des règles de l'arithmétique. Ce fut le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton qui fit le premier progrès vers « les nombres hypercomplexes » en inventant les quaternions : un quaternion est un quadruplet de nombres associant un nombre réel et trois nombres imaginaires. Pour calculer avec ces quantités, l'astuce consiste à ne pas obéir à la loi de commutativité de la multiplication, c'est-à-dire à la règle affirmant que pour n'importe quels nombres a et b, ab est égal à ba.

L'idée d'abandonner cette loi vint à William Hamilton en 1843, alors qu'il flânait au crépuscule avec sa femme le long d'un canal de Dublin. Il fut si exalté qu'il s'arrêta pour graver la formule fondamentale sur une pierre du pont Brougham. Une plaque insérée dans la pierre commémore cet événement important et, en 1943, un siècle après la découverte de William Hamilton, l'Irlande honora ce mathématicien par un timbre poste. Les quaternions ne forment pas un corps commutatif (leur structure est celle d'un corps gauche appelé aussi anneau de division), mais l'algèbre des quaternions est équivalente à celle d'un quadruplet ordonné de nombres et est souvent utilisée de nos jours dans la théorie des vecteurs à trois dimensions. La découverte de l'algèbre des quaternions marqua le commencement de l'algèbre abstraite moderne dans laquelle on définit toutes sortes de « nombres » bien plus étranges encore que les nombres complexes.

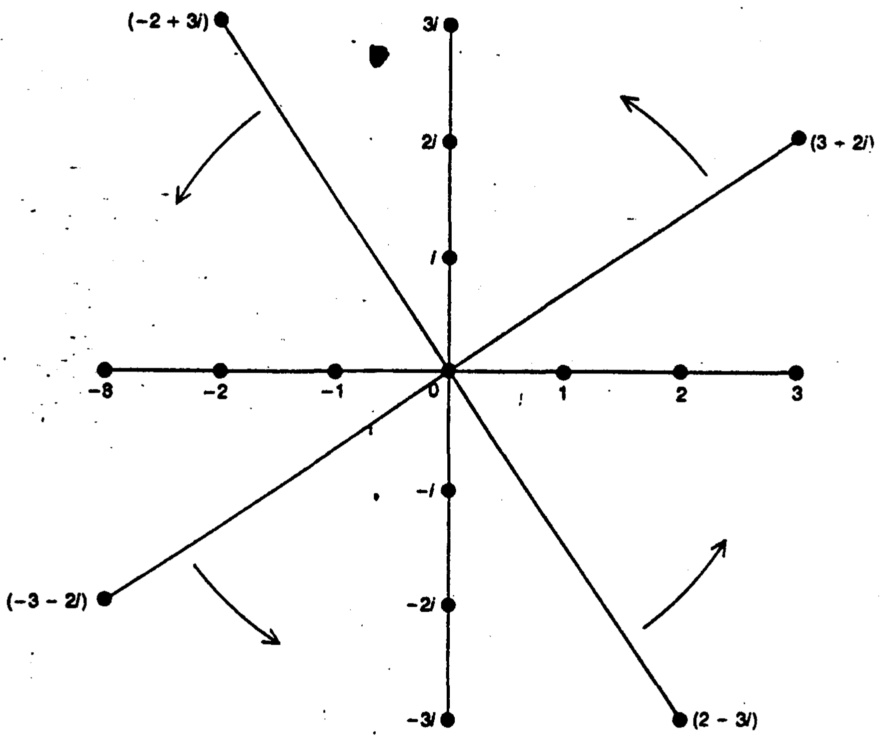
En raison de la correspondance entre les nombres complexes et les points du plan cartésien, ce plan, lorsqu'il est utilisé de la sorte, est appelé le plan complexe. (On l'appelle aussi le plan des z où z est un nombre complexe quelconque de la forme $a + ib$ et parfois un diagramme d'Argand car durant plusieurs décennies, l'antériorité de la découverte de Wessel resta inconnue.)

Je n'entrerai pas ici dans l'interprétation géométrique dans le plan complexe des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des nombres complexes. Les lecteurs qui ne connaissent pas encore les règles de ces opérations pourront les trouver dans n'importe quel livre de terminale). Cependant, une brève explication de la multiplication par i m'est nécessaire pour exposer un élégant théorème sur les racines d'un nombre.

Pour multiplier un nombre du plan complexe par i, on prend le vecteur ayant pour origine le point 0 (0,0) du plan complexe et pour extrémité le point correspondant au nombre complexe à multiplier. On fait ensuite tourner ce vecteur de 90 degrés autour de 0 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre; la nouvelle extrémité du vecteur correspond au produit du nombre par i. C'est dans ce sens que i peut être considéré comme un opérateur. Pour comprendre cette idée, considérez ce qu'il arrive lorsque i est élevé à différentes puissances : i à la puissance 1 est bien évidemment égal à i, et il est facile de voir que i^2 égale -1, i^3 égale $-i$, i^4 égale 1. Ce cycle en quatre étapes se répète indéfiniment : i^5 égale i, i^6 égale -1, i^7 égale $-i$ et i^8 égale 1 et ainsi de suite. Toutes les puissances paires de i sont égales à plus ou moins 1 et toutes les puissances impaires à plus ou moins i.

La figure 2 illustre l'application de cette règle pour la multiplication d'un nombre (en l'occurrence π) par i. Le point correspondant à π est repéré sur l'axe des x positifs puis tourné de 90 degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre le long du cercle de rayon π centré à l'origine du plan. Le point d'arrivée de cette opération est le nombre imaginaire $i\pi$ situé sur le demi-axe des y positifs. La multiplication de π par i^2 est alors équivalente à deux multiplications par i : le point correspondant à π tourne de 180 degrés le long du cercle et se situe au point symétrique sur l'axe des x ou axe réel. De même, multiplier par i^3 correspond à une rotation de 270 degrés amenant au point $-i\pi$ situé sur les demi-axes des y négatifs; multiplier par i^4 revient à multiplier par 1 et, par conséquent, à ne rien faire du tout (on revient au point de départ). On peut continuer de la même façon pour les puissances plus élevées de i. Chaque puissance suivante correspond à un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur le cercle.

L'opération inverse de la multiplication par i est la division par i : c'est une rotation de 90 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'origine du plan. Autrement dit, pour n'importe quel nombre complexe, cela revient à tracer le vecteur joignant l'origine au point représentant ce nombre. Pour multiplier ce nombre par i, on fait tourner ce vecteur de 90 degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre



3. Multiplication du nombre complexe 3 + 2i par i, i^2, i^3 et i^4.

(voir la figure 3) et pour le diviser par i, on fait tourner le vecteur de 90 degrés en sens inverse. (Un de mes amis, en plaisantant, me suggère que i fois l'infini est égal à 8 car multiplier par i tourne le symbole ∞ de l'infini de 90 degrés.)

Dans cette interprétation de la multiplication, il ressort qu'en tenant compte des racines complexes, tout nombre différent de zéro (réel ou complexe) possède n racines n^{ieme}. Autrement dit, tout nombre a deux racines carrées, trois racines cubiques, quatre racines quatrièmes, cinq racines cinquièmes et ainsi de suite. Il s'ensuit que toute équation du troisième degré a trois solutions, toute équation du quatrième degré quatre solutions et ainsi de suite; lorsque l'on dispose les racines d'un nombre sur le plan complexe, une propriété inattendue et élégante apparaît : les n points correspondant aux racines $n^{\text{ième}}$ se situent tous à égale distance l'un de l'autre sur un cercle centré à l'origine du plan. Autrement dit, ces points constituent les sommets d'un polygone régulier de n côtés. Par exemple, la figure 4 indique la disposition de six racines sixièmes de 729. Si, comme c'est ici le cas, le nombre est réel et possède un nombre pair de racines, deux sommets du polygone seront situés sur l'axe réel. Si le nombre est réel et possède un nombre impair de racines, seul un sommet du polygone sera situé sur l'axe réel.

Outre son rôle essentiel en physique moderne, l'introduction du corps des nombres complexes apporte aux mathématiques pures une multitude de théorèmes déconcertants. Il est important de se souvenir que les nombres complexes, bien qu'incluant les nombres réels, diffèrent des nombres réels de façon étonnante. On ne peut, par exemple, dire d'un nombre complexe qu'il est positif ou négatif; ces propriétés ne s'appliquent qu'aux nombres réels ou imaginaires purs. Il est aussi dénué de sens de dire qu'un nombre complexe est plus grand ou plus petit qu'un autre.

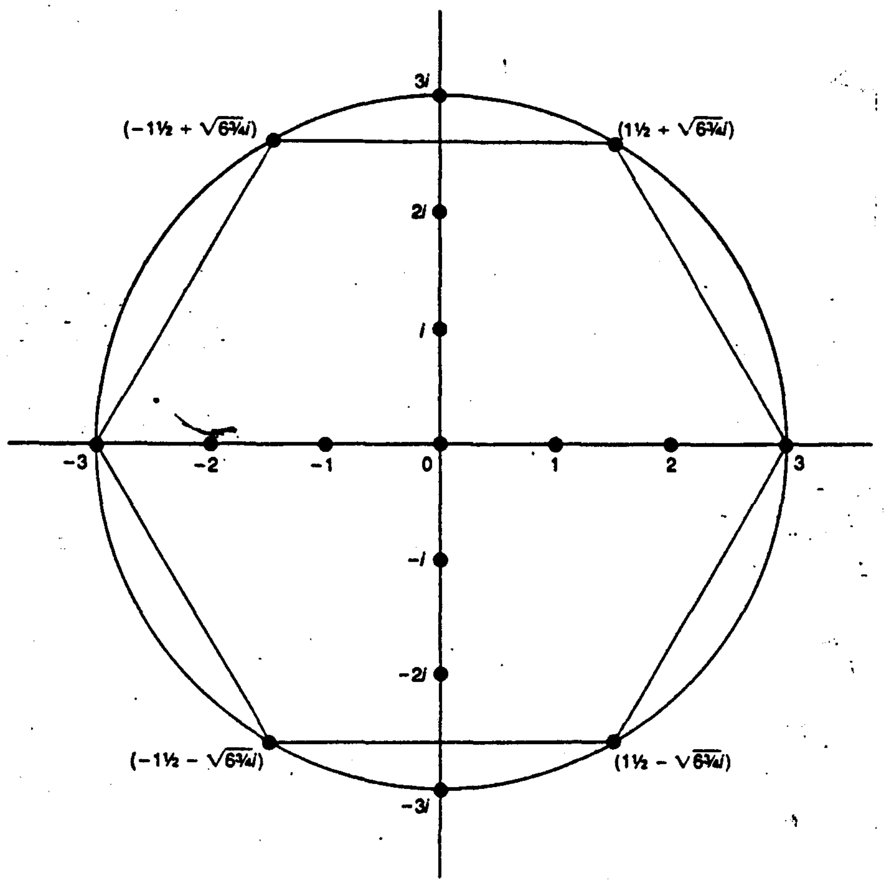
On savait déjà avant Euler que le produit de deux nombres imaginaires purs quelconques est un nombre réel, mais ce fut Euler qui montra le premier que i^i est aussi réel. Il est égal à $e^{-\pi/2}$un nombre irrationnel dont le développement décimal commence par 0,2078795763... En réalité, ce nombre n'est seulement qu'une détermination parmi une infinité d'autres déterminations, toutes réelles, de i^i. Elles sont données par la formule $e^{-\pi/2 \pm 2k\pi}$, où k est un entier positif ou nul quelconque, de telle sorte que pour k égal 0, on obtient la valeur principale donnée ci-dessus. La $i^{\text{ième}}$ racine de i est aussi un nombre réel dont la détermination principale est $e^{\pi/2}$ soit 4,8104773809...

Il existe bien d'autres formules dans lesquelles i est associé aux deux nombres transcendants les plus connus, e (la base des logarithmes naturels) et π. La plus célèbre, que l'on trouve chez Euler, mais qui fut découverte avant lui est $e^{i\pi} + 1 = 0$; cette formule est élégante, concise et pleine d'enseignement. Le mathématicien Benjamin Peirce a dit, après avoir écrit cette formule au tableau « c'est certainement vrai, (mais) c'est absolument paradoxal. Nous ne pouvons la comprendre et nous ne savons pas ce qu'elle signifie, mais nous l'avons démontrée et, par conséquent, nous savons qu'elle doit être vraie ».

Cependant, cette formule n'est pas sans signification. Réécrite sous la forme $e^{i\pi} = -1$, on peut l'interpréter géométriquement sur le plan complexe, comme la limite de la série infinie $1 + i\pi + (i\pi)^2/2! + (i\pi)^3/3! + (i\pi)^4/4! + ..$ (le point d'exclamation étant le symbole factorielle : $n!$ signifiant $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$). Les différents termes de cette série sont représentés par une infinité de points situés sur une spirale, quelquefois appelée spirale de Cornu, s'enroulant autour du point -1 de l'axe réel dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Le physicien George Gamow, cherchant à dissiper les mystères des nombres complexes, inventa un casse-tête intéressant. Un vieux parchemin où était noté l'emplacement d'un trésor sur une île déserte, donnait les renseignements suivants. Les seuls points de repère sur l'île sont deux arbres *A* et *B*, et les ruines d'une potence. Partez de la potence et comptez le nombre de pas nécessaires pour aller en ligne droite jusqu'à l'arbre *A*. Arrivé à l'arbre, tournez de 90 degrés sur votre gauche et parcourez le même nombre de pas. A votre point d'arrivée, plantez un pieu dans le sol. Repartez de la potence et dirigez-vous en ligne droite vers l'arbre *B* en comptant vos pas. Lorsque vous atteindrez l'arbre *B*, pivotez de 90° sur votre droite, faites le même nombre de pas (que vous venez de compter) et enfoncez un pieu à votre point d'arrivée. Creusez au point exactement à mi-chemin entre les deux pieux et vous trouverez le trésor.

Un jeune aventurier qui trouva le parchemin avec ces instructions affrêta un bateau et fit route vers l'île. Il trouva sans difficulté les deux arbres mais constata avec consternation que la potence avait disparu et que les intempéries avaient effacé toutes traces de son emplacement! Ne connaissant pas l'emplacement de la potence, il ne vit aucun moyen de retrouver le trésor et revint bredouille. George Gamow fait remarquer que si le jeune homme avait connu les nombres complexes, il aurait facilement trouvé le trésor. Le lecteur connaissant les règles élémentaires du calcul sur les nombres complexes dans le plan complexe (ou bien le lecteur géomètre) pourra peut-être résoudre ce problème.



4. Les six racines sixièmes de 729.