7. LIMITES

3h/s, 5h/s, 7h/s

Rappels: VM3, chapitre 14; VM5, chapitre 5.

SUR LES EPAULES DE GEANTS

Les problèmes de tangentes nous ont conduits aux dérivées des fonctions et celles-ci exigent une notion de limite que nous avons maniée tant bien que mal.

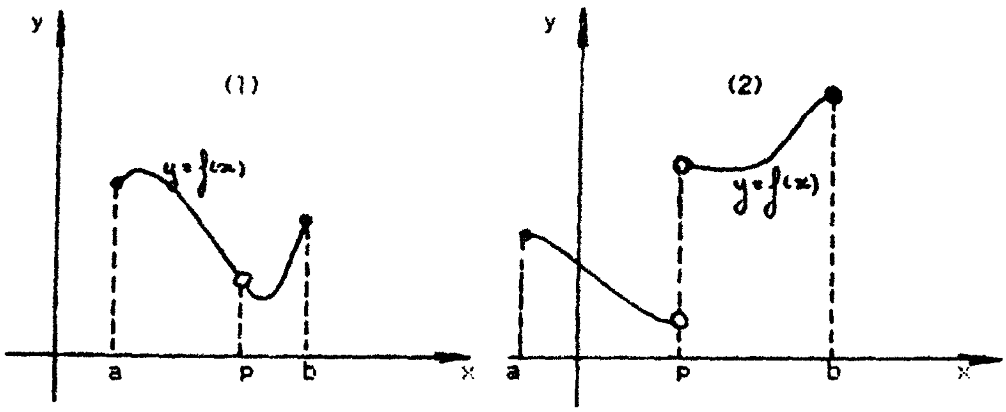
Historiquement, le problème des tangentes et le calcul des dérivées furent résolus à la fin du 17e siècle par Newton en Angleterre et par Leibniz en Allemagne. Ces théories prirent un essor considérable. Elles permirent à Newton et à d'autres par la suite, de formuler les lois générales gouvernant le mouvement des planètes, des corps solides, etc... De cette histoire fabuleuse qui comprend le contrôle des sondes spatiales à partir de 1957, les bandes dessinées ne retiennent malheureusement qu'une seule anecdote: celle de la pomme !

Et les limites dans tout cela ? Durant 150 ans, des progrès énormes furent accomplis, notamment par Euler, un autre géant des mathématiques, et par Gauss, surnommé le prince des mathématiciens. Nombreux sont ceux qui s'accordent à considérer Archimède, Newton, Gauss et Euler comme les plus grands mathématiciens de tous les temps. Il n'empêche que ces géants juchés sur les épaules d'autres géants (une expression due à Newton) durent continuer à traiter les limites comme nous l'avons fait jusqu'ici, sans trop savoir de quoi il s'agissait.

Ce fut Cauchy en France, vers 1830, qui parvint le premier à donner une explication satisfaisante des limites.

Essayons à notre tour d'y voir un peu plus clair.

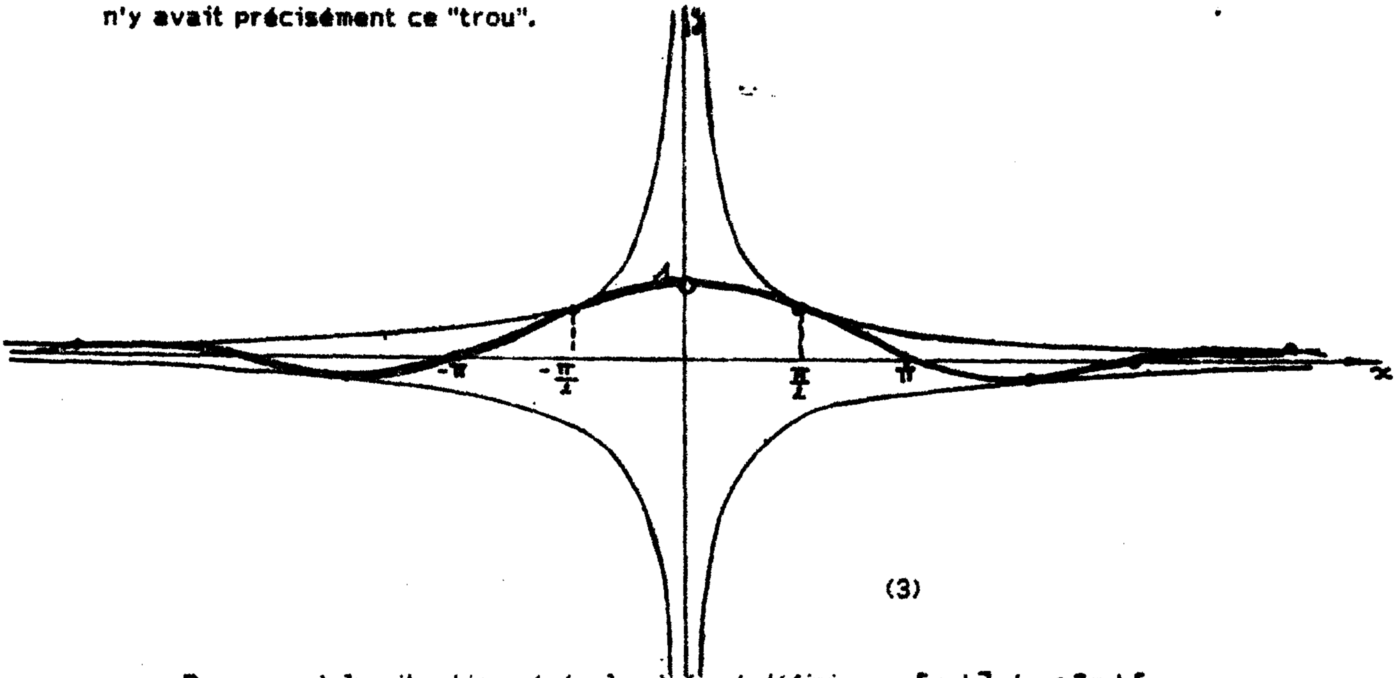
Considérons une fonction f définie en tous les points d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ sauf peut-être au point p intérieur à cet intervalle.



Les figures (1) et (2) évoquent deux situations de ce genre. Nous en avons rencontrées d'autres en manipulant les dérivées. A titre d'exemple, la fonction

$$\frac{\sin x}{x}$$

présente un "trou" en x=0. En effet, les techniques graphiques du chapitre 3 montrent que la courbe représentative oscille entre les "hyperboles" y= 1/x et y= -1/x et qu'au voisinage de 0, elle se rapproche de la droite y = 1, à laquelle elle semble devoir être tangente s'il n'y avait précisément ce "trou".



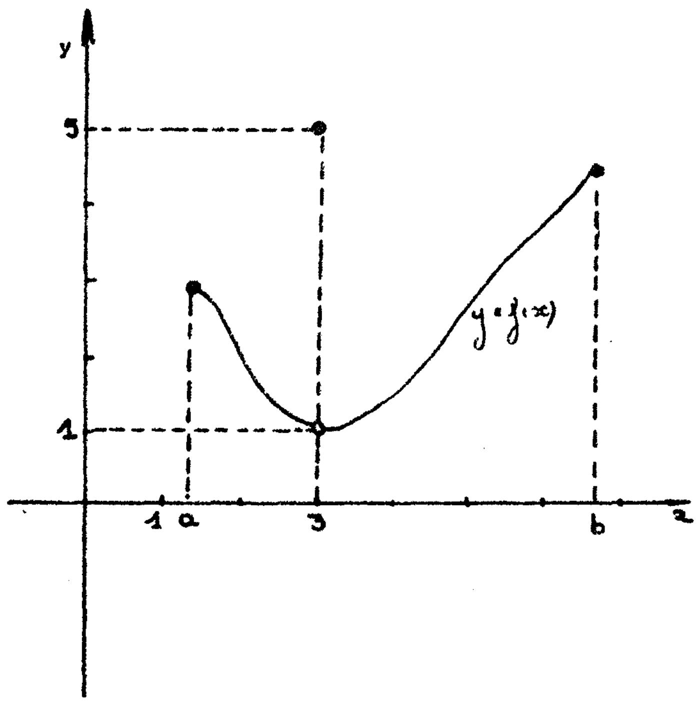
(3)

Revenons à la situation générale où f est définie sur $[a,b]$ et $p \in]a,b[$.
Nous aimerions parler de <u>la limite de f ou de f(x) lorsque x tend vers p</u>, ce que nous notons

$$\lim_{x \to p} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{p} f$$

Sur les dessins (1), (2), (3), nous voyons de quoi il s'agit. En (1) et (3), la limite apparaît très clairement. C'est l'ordonnée du point manquant sur la courbe. En (2), c'est plus délicat. Certains élèves estiment qu'il y a deux limites. Il n'ont pas tout à fait tort et pas tout à fait raison non plus. L'observation peut justifier l'idée de deux limites mais aussi l'idée qu'il n'y a pas de limite du tout.

Mais voici un dessin plus gênant où la valeur de f fait brusquement un bond en p=3 où l'on a f(3)=5.



(4)

A-t-on $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ ou $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$?

Quelques crêpages de chevelure plus loin, on constate que la deuxième proposition revient à confondre la limite de la fonction en 3 avec sa valeur en 3. Il y a là un double emploi. La notion de limite a précisément pour but de dire quelque chose sur f en p=3 sans y disposer d'aucune valeur, en n'utilisant que les valeurs de f en des points PROCHES de p=3.

Dès lors, c'est la première proposition qui doit l'emporter: si f n'avait pas eu de valeur en 3, il n'y aurait pas eu de dispute sur la valeur de la limite.

Les passions s'apaisent et nous acceptons que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1 \text{ dans } (4)$$

Quant à (2), nous dirons qu'en p il y a une <u>limite à gauche</u> qui prend une valeur et une <u>limite à droite</u> qui prend une autre valeur.

Voici des notations:

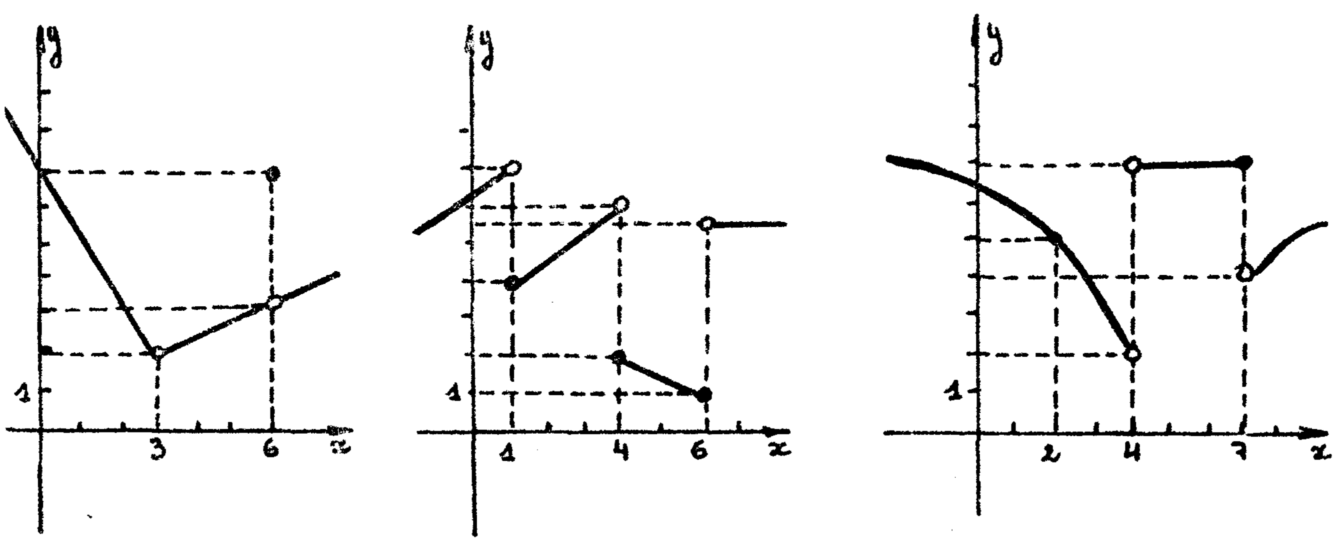
limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\leq p}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to p^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{p^-} f$

limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x\geq p}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{p^+} f$

EXERCICES

1. Devinez la valeur des limites (éventuellement à droite et à gauche) aux points indiqués:

a) b) c)



2. a) Dessinez le graphique de $x \to \frac{1}{x}$. Cette fonction n'est pas définie pour $x=0$. Que pensez-vous de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$?

b) Même exercice avec $x \to \frac{1}{x^2}$ en $x=0$.

==

VERS UNE DEFINITION

Pour cerner la notion de limite de f en p, nous utilisons des voisinages de p. Nous dirons ici qu'un voisinage de $p \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert $]a,b[$ contenant p. Voici comment définir la notion de proximité.

Considérons un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, par exemple un intervalle troué. Nous dirons que p est proche de A si tout voisinage de p contient au moins un point de A autre que p.

Exemples :
1) si A est un intervalle amputé d'un point p, p est proche de A;
2) si A est un intervalle ouvert $]a,b[$ alors a et b sont proches de A;
3) tout réel (irrationnel) est proche de $\mathbb{Q}$;
4) tout réel est proche de $\mathbb{D}$.

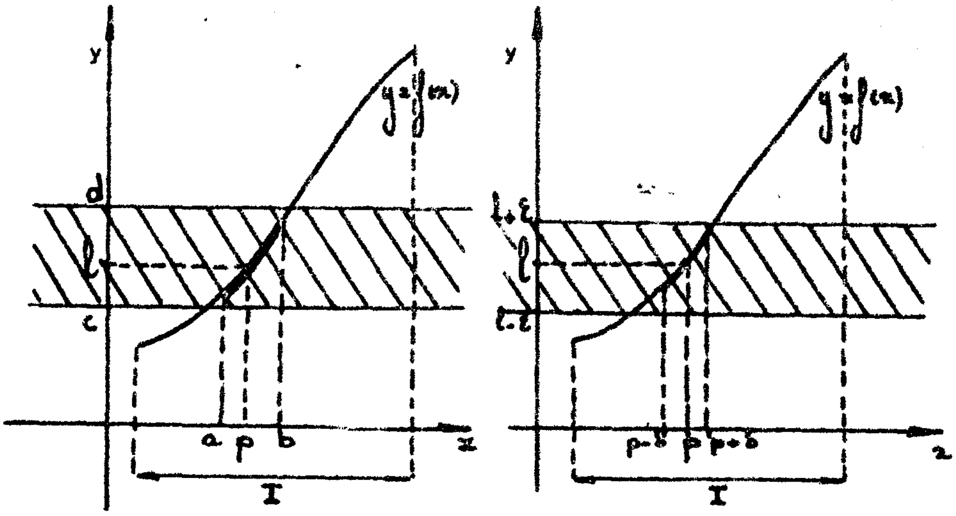
Et voici ce qu'est une limite !

On part d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ensemble I et d'un point p proche de I. Nous souhaitons que la limite de f en p ne dépende pas de f(p). Dès lors, si $p \in I$, nous remplaçons I par $I-[p]$ et f par sa restriction à cet ensemble $I-[p]$.

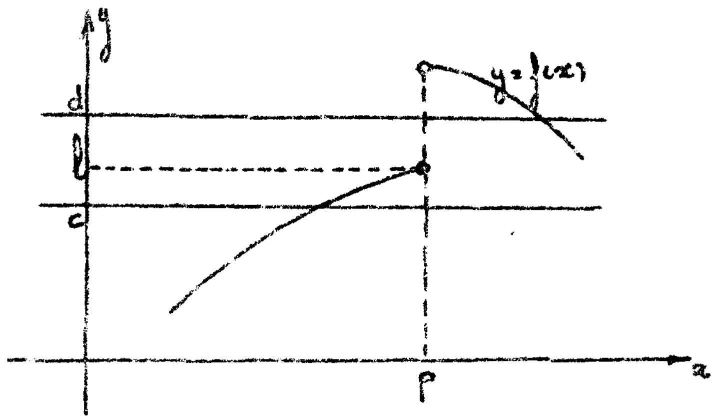
On dira que
$$\lim_{x \to p} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_p f = \ell$$
si pour tout voisinage $]c,d[$ de ℓ,
il existe un voisinage $]a,b[$ de p tel que
$$f(]a,b[\cap (I-[p])) \subseteq]c,d[.$$

Il revient au même d'exiger que

pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$0 < |x-p| < \delta$ et $x \in I$ implique $|f(x)-\ell| < \varepsilon$.



Cette définition difficile, qui fait appel à une logique subtile, traduit avec précision et correctement, l'intuition que nous avons acquise sur les limites. Illustrons-la par un autre dessin, dans le cas où ℓ n'est pas la limite de f en p.



Il n'y a pas de voisinage $]a,b[$ de p tel que

$$f(\,]a,b[\,\cap (I-\{p\})) \subseteq \,]c,d[$$

et si nous testons un~~e~~ autre "petit~~e~~" ~~valeur~~ voisinage de ~~ℓ~~ p (le faire), nous effectuons la même observation.

Il est à noter qu'un voisinage de ℓ suffisamment grand peut vérifier la relation demandée. Les deux petits mots "pour tout" dans la définition d'une limite ont donc une importance primordiale.

==

EXERCICES

3. Discutez la définition des limites qu'on vient de voir, en liaison avec les fonctions de l'exercice 1. L'intuition et la théorie sont-elles en accord ?

4. Quantificateurs

Il peut être utile de formuler la définition des limites en utilisant les symboles logiques ou quantificateurs:

$\forall$ qui signifie "pour tout"
$\exists$ qui signifie "il existe"

Ainsi, $\lim\limits_{p} f = \ell$ si et seulement si

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$

Pensez-vous qu'on pourrait plutôt adopter l'énoncé suivant :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(0 < |x-p| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell| < \delta)$?

5. Démontrez (pas de panique, ce n'est pas difficile) que si $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ existe, elle est unique.

6. Montrez un exemple de fonction f définie sur un intervalle I et d'un point p proche de I où f n'a pas de limite (on en a vu !)

7. Définir les notions de limite à gauche et de limite à droite. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie sur un ensemble I, introduire les ensembles

$I^- = \{x \in I \mid x < p\}$ et $I^+ = \{x \in I \mid x > p\}$

a) si p est proche de I^-, définir $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$;

b) si p est proche de I^+, définir $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$;

c) si $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$, montrez que f possède une limite en p et que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$

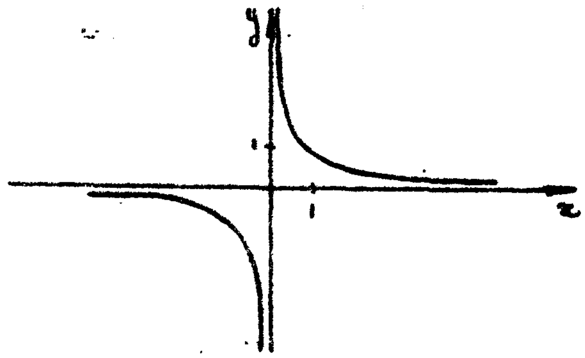
d) testez les définitions adoptées sur les exemples rencontrés auparavant.

==

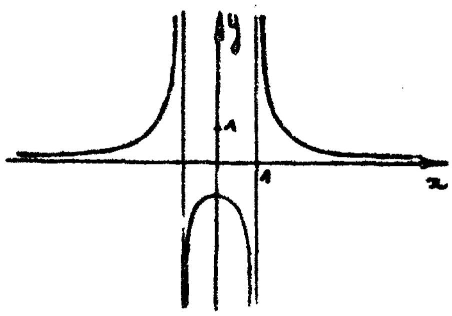
LE CORPS ACHEVE DES REELS

En examinant le graphique de fonctions telles que

$x \to \dfrac{1}{x}$



$x \to \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$



on est tenté d'introduire deux nouveaux nombres appelés "plus l'infini" et "moins l'infini" qu'on note $+\infty = \infty$ et $-\infty$.

Désignons par $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. On désire bien entendu prolonger la structure de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$. L'intuition qui nous a conduits à introduire ∞ et $-\infty$ indique comment traiter l'ordre.

Nous décidons que

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ , } -\infty < a < \infty \qquad \text{et } -\infty < \infty \text{ .}$$

Ainsi, $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble totalement ordonné.

L'intuition indique encore sans hésitation comment il convient de traiter certaines opérations. Ainsi

$a + \infty = \infty + a = \infty$

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$a \cdot \infty = \infty \cdot a = (-a)(-\infty) = (-\infty)(-a) = \infty$ (resp. $-\infty$) si $a \in \mathbb{R}_0^+$ (resp. $\mathbb{R}_0^-$)

$(-a) \cdot \infty = \infty \cdot (-a) = a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$ (resp. ∞) si $a \in \mathbb{R}_0^+$ (resp. $\mathbb{R}_0^-$)

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = \infty . \infty = \infty$

$(-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$

$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$ si $a \in \mathbb{R}$

En revanche, l'intuition conduit à plus d'un choix raisonnable pour des expressions telles que

$\infty - \infty$ (faut-il adopter $0, \infty$ ou $-\infty$?), $-\infty + \infty$

$0. \infty$ (est-ce 0 ou ∞ ?), $\infty .0$, $(-\infty).0$, $0.(-\infty)$

$\frac{0}{0}$ (est-ce 1, 0 ou ∞ ?)

$\frac{\infty}{\infty}$ (est-ce 1, 0 ou ∞ ?)

$\frac{a}{0}$ pour $a \in \mathbb{R}_0$ (est-ce ∞ ou $-\infty$?)

Il est convenu de ne pas définir les opérations dans ces cas. On dit parfois que les valeurs de ces opérations sont <u>indéterminées</u>. Nous verrons bientôt qu'on peut parfois contourner cet inconvénient grâce aux limites. Nous en avons déjà vu des exemples: $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas défini pour $x = 0$ (cas d'indétermination $\frac{0}{0}$) mais nous avons admis que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. De même, $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$ (cas d'indétermination $\frac{0}{0}$).

Pour couvrir tous les cas d'indétermination, nous devons permettre que dans

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

a et ℓ puissent également prendre les valeurs ∞ et $-\infty$

Ceci exige une définition des voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ ainsi qu'une définition de la proximité.

Les <u>voisinages de $+\infty$</u> sont les demi-droites $]a, \infty]$ où $a \in \mathbb{R}$ et les <u>voisinages de $-\infty$</u> sont les demi-droites $[-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Nous dirons que ∞ (ou $-\infty$) est proche de A si <u>tout</u> voisinage de ∞ (ou $-\infty$) contient au moins un point de A autre que ∞ (ou $-\infty$). Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ensemble I, $p \in \overline{\mathbb{R}}$ un point proche de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Comme auparavant,

$$\lim_{x \to p} f(x) = \ell$$

si pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage U de p tel que

$f(U \cap (I-\{p\})) \subset V$.

==

EXERCICES

8. Complétez les tableaux à double entrée ci-dessous où a est un réel positif et b, un réel négatif (écrire '?' pour indéterminé).

$+$	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$					
b					
0					
a					
$+\infty$					

$-$	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$					
b					
0					
a					
$+\infty$					

$\times$	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$					
b					
0					
a					
$+\infty$					

$:$	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$					
b					
0					
a					
$+\infty$					

9. a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $+\infty$ est proche de I si et seulement si I contient une demi-droite $]a,\infty]$. Vrai ou faux ? Démontrez.
b) Donnez un énoncé similaire où $-\infty$ remplace $+\infty$.

10. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie dans un intervalle I et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
a) Si ∞ est proche de I, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel a tel que

$$a < x \text{ et } x \in I \text{ implique } |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

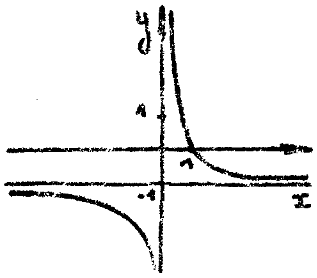
Vrai ou faux ? Démontrez.
b) Donnez un énoncé analogue pour

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

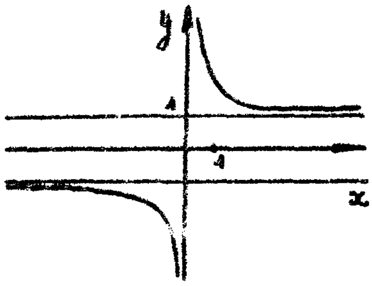
c) Quand aura-t-on $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$,etc...?

11. Voici des dessins de graphiques de fonctions. Quels sont ceux qui suggèrent une limite pour f(x) quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et quelle est cette limite ? Quels sont ceux qui suggèrent une limite ℓ égale à $\pm\infty$? Tenir compte aussi de limites à gauche et à droite.

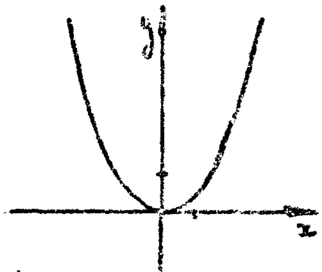
a)



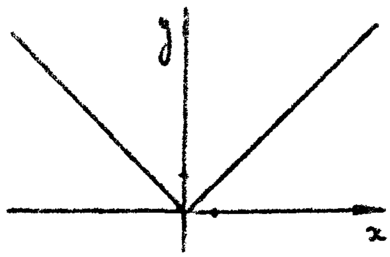
b)



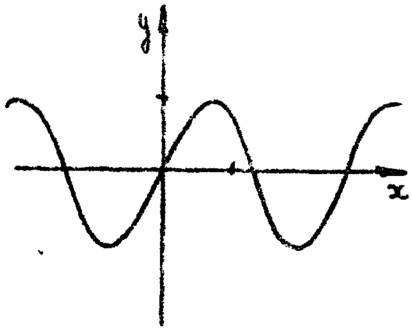
c)



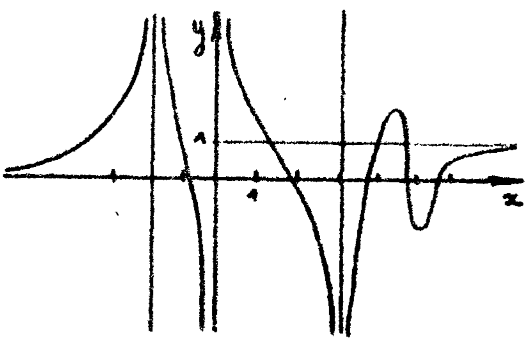
d)



e)



f)



12. Utilisez un graphique, le raisonnement, une calculatrice, les notions de croissance et de décroissance pour évaluer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

d) $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + \frac{1}{x})$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + \frac{1}{x})$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + \frac{1}{x})$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + \frac{1}{x})$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} 3x$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x$

13. a) Démontrez que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

b) Démontrez que $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ n'existe pas.

c) Démontrez que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin x}$ n'existe pas.

===

TECHNIQUES DE CALCUL

La détermination de limites est souvent possible grâce à un calcul simple, sur base des résultats suivants.

THEOREME 1 Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies sur un intervalle I, et p un point proche de I dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to p} g(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors:

1) $\lim\limits_{p} (f+g) = \lim\limits_{p} f + \lim\limits_{p} g$

2) $\lim\limits_{p} (f-g) = \lim\limits_{p} f - \lim\limits_{p} g$

3) $\lim\limits_{p} fg = \lim\limits_{p} f \cdot \lim\limits_{p} g$

4) $\lim\limits_{p} \frac{f}{g} = \lim\limits_{p} f \,/\, \lim\limits_{p} g$

sauf si les expressions du 2e membre sont indéterminées.

Démonstration : Les deux premiers cas sont les plus faciles. Nous les laisserons comme exercices, ainsi que le quatrième.
Attaquons donc la preuve de 3).

Posons $\lim_p f = \ell_1$; $\lim_p g = \ell_2$ et $\lim_p fg = \ell$. On doit prouver que $\ell = \ell_1 . \ell_2$.

Distinguons des cas selon que p ou/et ℓ ne sont pas dans $\mathbb{R}$.
a) Supposons que p, ℓ, ℓ_1, ℓ_2 sont réels. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Il faut prouver qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x-p| < \delta \text{ implique } |f(x)g(x) - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon \qquad (1)$$

Essayons d'introduire nos hypothèses dans la question. On peut transformer $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2|$ en

$$|f(x)g(x) - f(x)\,\ell_2 + f(x)\,\ell_2 - \ell_1\,\ell_2| \leq |f(x)g(x) - f(x)\,\ell_2| + |f(x)\ell_2 - \ell_1\,\ell_2|$$
$$= |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| .$$

Pour borner cette expression par ε, on peut chercher à borner chaque terme de la somme par $\frac{\varepsilon}{2}$. Commencons par le 2e terme.

Pour $\frac{\varepsilon}{2|\ell_2|}$ fixé, l'hypothèse nous apprend qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$0 < |x-p| < \delta_1 \text{ implique } |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|} \text{ donc } |\ell_2||f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Passons au premier terme. Pour $\varepsilon > 0$ donné, l'hypothèse nous apprend qu'il existe δ_2 tel que

$$0 < |x-p| < \delta_2 \text{ implique } |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

mais alors

$$-\varepsilon + \ell_1 < f(x) < \varepsilon + \ell_1$$

et

$$|f(x)| < M \text{ où M est le plus grand des deux nombres } |-\varepsilon + \ell_1|, |\varepsilon + \ell_1| .$$

De même, il existe $\delta_3 > 0$ tel que

$$0 < |x-p| < \delta_3 \text{ implique } |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Si δ est le plus petit des trois nombres δ_1, δ_2, δ_3,

$0 < |x-p| < \delta$ implique, comme nous le voulons,

$$|f(x)|.|g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| < M.\frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_2|.\frac{\varepsilon}{2|\ell_2|} = \varepsilon$$

donc

$$|f(x)g(x) - \ell_1\,\ell_2| < \varepsilon$$

et de ce fait

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = \ell_1 . \ell_2$$

b) Supposons que p soit réel et que $\ell = \infty$. Pour tout réel a, il faut montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $0 < |x-p| < \delta$ implique $f(x)g(x) > a$.

En ce qui concerne ℓ_1, ℓ_2, on peut avoir

$\ell_1 = \infty$, $\ell_2 > 0$; $\ell_1 = \infty$, $\ell_2 < 0$; $\ell_1 = -\infty$, $\ell_2 > 0$; $\ell_1 = -\infty$, $\ell_2 < 0$; $\ell_1 = \ell_2 = \infty$; $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$; $\ell_1 = \infty$, $\ell_2 = -\infty$

et les autres cas symétriques à ceux-ci, que nous ne devons donc pas traiter.

Dans le premier cas, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $0 < |x-p| < \delta_1$ implique $f(x) > a$ et il existe $\delta_2 > 0$ tel que $0 < |x-p| < \delta_2$ implique $|g(x) - \ell_2| < \ell_2 + 1$ donc $g(x) > 1$.

Si $\delta = \inf[\delta_1, \delta_2]$ et si $0 < |x-p| < \delta$, on a bien $f(x)g(x) > a$ comme souhaité.

Les trois autres cas se traitent pareillement, comme exercices.

c) Le cas où $p = +\infty$ ou $p = -\infty$ sera laissé comme exercice.

==

EXERCICES

14. Si f prend une valeur constante c sur I et si p est un élément proche de I, montrez que $\lim_p f = c$.

15. Si f est l'application de I dans $\mathbb{R}$ qui applique x sur x, et si p est un élément proche de I, montrez que $\lim_p f(x) = p$.

16. Utilisez le théorème ci-dessus et les exercices 14 et 15 pour déterminer les limites suivantes si elles existent (si elles n'existent pas, examinez les limites à gauche et à droite):

a) $\lim_{2} (2x^3 - 5x + 1)$

b) $\lim_{\pm\infty} (3x-3)$

c) $\lim_{\pm\infty} (-3x+3)$

d) $\lim_{\pm\infty} (2 - 9x^2 + 6x)$

e) $\lim_{\pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n)$ où $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$

f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-2}$

g) $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{2-x}$

h) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2-1}$

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x}{x^3-8}$

j) $\lim_{\pm\infty} \frac{3x^2-5x-1}{2x^2-x+11}$

k) $\lim_{\pm\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$

l) $\lim_{\pm\infty} \frac{x^7-x^6-4}{x^5+x^3-2}$

m) $\lim_{\pm\infty} \frac{2x-5}{x^2+x-5}$

17. Démontrez la propriété 1 du théorème.

18. Démontrez que

a) $\lim_{p} \sin x = \sin p$ b) $\lim_{p} \cos x = \cos p$

c) $\lim_{p} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} p$ si $\operatorname{tg} p$ est définie ; examinez les autres cas (limites à gauche et à droite).

19. Calculez

a) $\lim_{x \to \pi} \frac{-2x}{1+\cos x}$ b) $\lim_{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + \cos x}{2\sin x - 5}$

==

COMPOSEE DE FONCTIONS ET LIMITE

THEOREME 2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur I_1, g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $I_2 \supseteq f(I_1)$ et $g \circ f$, définie sur I_1. Soit p un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ proche de I_1. Si f a une limite ℓ_1 en p, si ℓ_1 est proche de I_2 et si g a une limite ℓ_2 en ℓ_1, alors

$$\lim_{x \to p} g \circ f(x) = \ell_2$$

Démonstration: soit U un voisinage de ℓ_2. Alors, il existe un voisinage V de ℓ_1, tel que $g(V) \cap (I_2 - \ell_1) \subset U$.

De même, il existe un voisinage W de p, tel que $f(W) \cap (I_1 - p) \subset V$

Alors $g \circ f(W) \cap (I_1 - p) \subset U$ et on a terminé.

==

EXERCICES

20. Montrez que $\lim\limits_{p} \sqrt{x} = \sqrt{p}$ si $p \in \mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

21. Appliquez le théorème ci-dessus pour calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{1} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}$

d) $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}$

e) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

f) $\lim\limits_{4} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \sin(3x-1)$

h) $\lim\limits_{0} \cos(2x+\pi)$

i) $\lim\limits_{\infty} \sqrt{\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{1} (x+5)^7$

k) $\lim\limits_{0} ((2x+5)^3 - 5x)^{29}$

l) $\lim\limits_{\pi^2} \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

22. Calculez les limites suivantes où les théorèmes conduisent à un cas d'indétermination (ce qui exige une idée supplémentaire):

A) cas 0/0

a) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$

b) $\lim\limits_{-1} \dfrac{3x^2-2x-5}{-x^2-3x-2}$

c) $\lim\limits_{-1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2}$

d) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

e) $\lim\limits_{3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}}$

f) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{-2} \dfrac{\sqrt{x+2}}{2-\sqrt{2x+8}}$

h) $\lim\limits_{\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{1-\sqrt{8x^2-1}}$

i) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}}$

j) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}}$!

B) cas $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{3x^3-2}$

b) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+3x+2}$

c) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{-3x^2+1}{x^2-4x+1}$

C) cas $\infty - \infty$ (entre autres)

a) $\lim\limits_{\pm\infty} (-x^3+3x^2-4)$

b) $\lim\limits_{\pm\infty} (\sqrt{x^2+4}-x)$

c) $\lim\limits_{\pm\infty} (3+x).\dfrac{1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{\pm\infty} (\sqrt{x^2+2}-x^2-1)$

e) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{-4x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

f) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{(1-x^2)(3x^2-3)}{x^4+5}$

g) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x-5}{x+3}$

h) $\lim\limits_{\pm\infty} (x+\sqrt{x^2+1})$

i) $\lim\limits_{\pm\infty} (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x})$

j) $\lim\limits_{\pm\infty} (\sqrt{x^2+2}+x^2-1)$

k) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x-3}}{x-1}$

l) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(4x - \sqrt{16x^2 - 12x}\right)$

m) $\lim\limits_{2} \left(\dfrac{2x - 7}{x^2 - x - 2} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$

n) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(x - \sqrt{4 - x^2}\right)$

o) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

p) $\lim\limits_{1} \dfrac{2x^3 + 1}{x^3 + 1}$

q) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}$

r) $\lim\limits_{-2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{2 - x} - \sqrt{x - 3}}$

s) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1}\right)$

t) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt{3 - 2x}}{\sqrt{2x^2 - 2}}$

u) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{3x + 1}$

D.

a) $\lim\limits_{x \to 2} E(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x.\sin x} =$

d) $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1 - \sin x} =$

e) $\lim\limits_{2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} =$

f) $\lim\limits_{\frac{3\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x} =$

h) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{1 - 3x^2} =$

i) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{(1 - x^2)(3x^3 - 2)}{x^5 - 5} =$

j) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2} =$

k) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 2x}} =$

l) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}} =$

m) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{\sqrt[3]{4x^3 + x}} =$

g) $\lim\limits_{2} \dfrac{x-1}{x^2-4x+4} =$

n) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{-2x+1}} =$

E.

a) $\lim\limits_{0} \left(\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{2}{x^2}\right) =$

b) $\lim\limits_{\pm\infty} (1 - 5x - 2x^2) =$

c) $\lim\limits_{3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-3}} =$

d) $\lim\limits_{-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3 + 8x^2 - 3x - 18}{2x^2 + 7x + 6} =$

e) $\lim\limits_{-b} \dfrac{2x^2 + 3bx + b^2}{x^3 + b^3} =$

f) $\lim\limits_{\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{x - \frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{8x^2 - 1}} =$

g) $\lim\limits_{-2} \dfrac{\sqrt{3x+7} - \sqrt{2x+5}}{x+2} =$

h) $\lim\limits_{1} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x}} =$

i) $\lim\limits_{2} \dfrac{\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2-2}} =$

j) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+5x+3}} =$

k) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{3x^2 - x} - \sqrt{4x^2+1}\right) =$

l) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{1}{2x^2 + 3x + 2} \cdot (x^2 - 1) =$

m) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}\right) =$

n) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) =$

o) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(x^2 - \sqrt{2x^2 - x}\right) =$

p) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^3 - x^2}\right) =$

q) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{3x^2 - x} + x - 2\right) =$

r) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x}\right) =$

s) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x} + \sqrt[3]{x^3+x}\right) =$

t) $\lim\limits_{\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x^2+1}\right) =$

ANALYSE D'UNE DEMONSTRATION

Nous avons utilisé et admis à plusieurs reprises que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

après en avoir donné une justification à l'aide d'une calculatrice, au début du chapitre. Cette démarche n'est évidemment pas rigoureuse. Qui peut garantir qu'avec une calculatrice beaucoup plus perfectionnée, affichant par exemple 50 chiffres, on arriverait encore à la même conviction ?

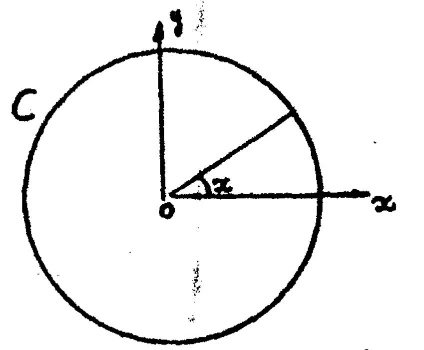
Voici une démonstration que nous demandons de lire avec un esprit critique en cherchant à relever les arguments qui exigent une justification supplémentaire.

Théorème : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Démonstration :

1) Rappelons que x exprime la mesure d'un angle en radians.

2) Considérons le cercle C de rayon 1 et d'origine o dans le plan. Ce cercle nous a permis d'introduire les fonctions trigonométriques.



Soit C(x) le secteur angulaire intérieur à C, délimité par les côtés de l'angle x et par C.

3) L'aire de C(x) est proportionnelle à x, donc

aire C(x) = kx

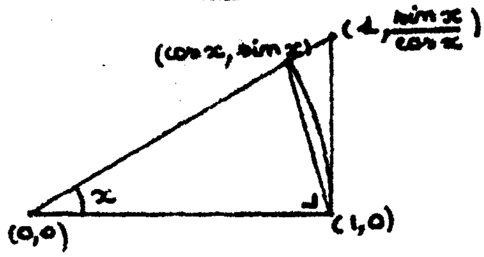
où k est une certaine constante.

4) Pour $x = 2\pi$, l'aire de C(x) est égale à $\pi r^2 = \pi$ donc la constante de proportionnalité est égale à ½.

5) Bornons-nous à des valeurs de x comprises entre 0 et $\pi/2$.

La corde joignant (1,0) au point (cos x,sin x) détermine un triangle intérieur à C(x), d'aire

$\frac{1}{2}.1.\sin x$



De même, la tangente au cercle en (1,0) rencontre le 2e côté de l'angle x en $(1\ ,\frac{\sin x}{\cos x})$ et détermine un triangle contenant C(x), d'aire

$$\frac{1}{2}.1.\frac{\sin x}{\cos x}$$

6) Dès lors, on a une inégalité liant les aires des deux triangles et de C(x), à savoir, grâce à 3) et 4) :

$$\frac{1}{2}.\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ou}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ou}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

7) Lorsque x tend vers 0, cos x tend vers 1 et dès lors $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1.

Analysons cette démonstration. De nombreuses questions surgissent.

a) Dans 6) et 7), on obtient au mieux une limite à droite, puisqu'on s'est restreint au cas où x parcourt $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$. Mais pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,0\right]$, on a

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin|x|}{|x|}$$

et

$$\cos x = \cos|x|$$

donc les inégalités de 6) demeurent valables.

Et si $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est agrandi à $\mathbb{R}$? La valeur de la limite ne change pas dans ce cas: il suffit d'appliquer la définition de limite.

Précisément, celle-ci n'a pas été utilisée en 7) où l'on se contente d'un langage imagé: " cos x tend vers 1, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 ". Redressons ce manquement, par un théorème général.

<u>Théorème :</u>

si f, g, h sont des fonctions définies sur un intervalle I telles que $f(x) < g(x) < h(x)$ pour tout $x \in I$ et si a est un point proche de I tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$, alors $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x)$.

<u>Démonstration :</u> soit $\ell = \lim_{a} f(x) = \lim_{a} h(x)$. Pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage $]b,c[$ de a et un voisinage $]b',c'[$ de a tels que f applique le premier dans V et h applique le second dans V. L'intersection $]b,c[\cap]b',c'[$ est un voisinage $]b'',c''[$ de a dont l'image par f et par h est contenue dans V. Comme $f(x) < g(x) < h(x)$, l'image de $]b'',c''[$ par g est également contenue dans V et dès lors $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$ en vertu de la définition de la limite.

b) Pourquoi l'aire de C(x) est-elle proportionnelle à x ? Abandonnons un moment le radian comme unité de mesure d'angle et adoptons plutôt la seconde. Soit x= 4235,43... la mesure de x en secondes. Le cercle C a une aire A et C est la réunion de 360x60x60 secteurs angulaires d'une seconde qui ont tous la même aire parce que la rotation d'angle égal à une seconde conserve l'aire.

Donc le secteur angulaire d'angle égal à une seconde a une aire comprise entre $4235\frac{A}{360\times60\times60}$ et $4236\frac{A}{360\times60\times60}$

Remplaçons la seconde par un dixième de seconde. Cette nouvelle unité livre un secteur angulaire d'aire $\frac{0,1.A}{360\times60\times60}$ et l'aire de C(x) est comprise entre $42354.\frac{0,1.A}{360\times60\times60}$ et $42355.\frac{0,1.A}{360\times60\times60}$.

Poursuivant de la sorte un raisonnement que nous avons déjà rencontré pour les mesures de longueurs (VM1) et d'angles (VM4), nous constatons que

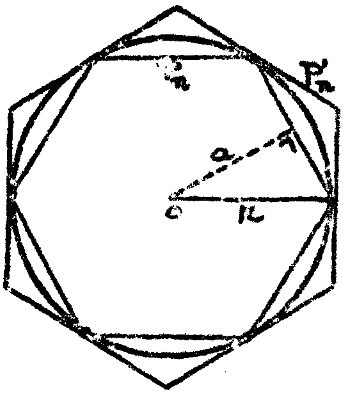
$$\text{aire } C(x) = \frac{x.A}{360\times60\times60}$$

ce qui livre bien la propriété annoncée.

c) Pourquoi l'aire d'un cercle C de rayon r est-elle égale à πr^2 ? Nous avons expliqué l'origine de cette formule dans VM3. Mais il faut bien dire qu'il ne s'agissait pas d'une démonstration rigoureuse. Reprenons la question.

Considérons un polygône régulier P_n, à n côtés, inscrit dans le cercle C de rayon r et un polygône P'_n, à n côtés, circonscrit à C. Nous admettons que

aire $P_n <$ aire $C <$ aire P'_n



De plus, il existe une similitude σ transformant P_n en P'_n où σ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$ et d'une homothétie de rapport $\frac{r}{a}$ où a est la distance de o à un côté de P_n.

Dès lors $\dfrac{\text{aire } P'_n}{\text{aire } P_n} = \dfrac{r^2}{a^2}$ et

$$\text{aire } P'_n - \text{aire } P_n = \text{aire } P_n.\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{r^2}{a^2} - 1$ tend vers 0 donc aire P'_n - aire P_n tend vers 0; aire P'_n et aire P_n ont donc la même limite et le théorème précédent montre que aire C tend vers $\lim\limits_{n\to\infty}$ aire P_n.

Ensuite, aire P_n = (périmètre P_n)x $\frac{a}{2}$

Lorsque n tend vers l'infini, périmètre P_n tend vers périmètre C, c'est-à-dire $2\pi r$ et a tend vers r; donc

$$\lim_{n\to\infty} \text{aire } P_n = \text{aire } C = \pi . r^2$$

d) Notre analyse comporte encore bien des failles. Ainsi, le recours au théorème précédent n'est pas tout-à-fait correct car celui-ci est établi pour des fonctions alors que nous l'appliquons à une suite de nombres. Il est possible de corriger ce défaut.

e) Nous voyons que la construction d'une démonstration peut être très laborieuse. Des remises en question incessantes peuvent amener à de très longs développements.

==

RESUME

*<u>Voisinage de $p \in \mathbb{R}$:</u> intervalle ouvert $]a,b[$ contenant p.

* p est <u>proche</u> de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ si <u>tout</u> voisinage de p contient au moins un point de A autre que p.

* <u>Limite d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ensemble I, en un point p :</u>

a) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{p} f = \ell$

si pour tout voisinage $]c,d[$ de ℓ, il existe un voisinage $]a,b[$ de p tel que
$f(]a,b[\cap (I-\{p\})) \subseteq]c,d[$

b) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{p} f = \ell$

si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$0 < |x-p| < \delta$ et $x \in I$ implique $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

*<u>Le corps achevé des réels $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$</u>

+	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{\infty-\infty}$?
b	$-\infty$	2b	b	a+b	∞
0	$-\infty$	b	0	a	∞
a	$-\infty$	a+b	a	2a	∞
∞	$\boxed{\infty-\infty}$?	∞	∞	∞	∞

$b \in \mathbb{R}_0^-$, $a \in \mathbb{R}_0^+$

.	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$	∞	∞	$\boxed{0.\infty}$?	$-\infty$	$-\infty$
b	∞	b^2	0	ab	$-\infty$
0	$\boxed{0.\infty}$?	0	0	0	$\boxed{0.\infty}$?
a	$-\infty$	ab	0	a^2	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{0.\infty}$?	∞	∞

$b \in \mathbb{R}_0^-$, $a \in \mathbb{R}_0^+$

:	$-\infty$	b	0	a	$+\infty$
$-\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$?	0	0	0	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$?
b	∞	1	0	a/b	$-\infty$
0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\boxed{0/0}$?	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
a	$-\infty$	b/a	0	1	∞
$+\infty$	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$?	0	0	0	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$?

Cas d'indétermination : a) $\infty - \infty$
b) $0 . \infty$
c) $\infty : \infty$
d) $\infty : 0$

* Si f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un intervalle I et p un point proche de I dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to p} g(x)$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

1) $\lim\limits_{p} (f+g) = \lim\limits_{p} f + \lim\limits_{p} g$

2) $\lim\limits_{p} (f-g) = \lim\limits_{p} f - \lim\limits_{p} g$

3) $\lim\limits_{p} f.g = \lim\limits_{p} f . \lim\limits_{p} g$

4) $\lim\limits_{p} \frac{f}{g} = \lim\limits_{p} f \,/\, \lim\limits_{p} g$

sauf si les expressions du second membre sont indéterminées.

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$