6. TRANSFORMATIONS LINEAIRES

7 h/s.

MATRICES

Nous avons vu au chapitre 4 comment les matrices peuvent être utilisées dans le maniement des transformations linéaires et comment le produit matriciel remplace la composition de transformations linéaires.

Une matrice pxq à coefficients réels est un tableau rectangulaire de nombres réels comprenant p lignes et q colonnes. On peut en donner une définition plus précise encore et plus générale mais celle-ci suffira à nos besoins actuels. Les nombres p et q sont des naturels strictement positifs. Nous admettons les cas particuliers où p et q valent 1.

En voici des exemples:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0{,}1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

matrice 1x3 matrice 2x1 matrice 2x6 matrice 3x3

Les matrices à 1 ligne ou 1 colonne sont au fond des vecteurs écrits de manière inhabituelle (des couples, des triples, des n-uples de nombres réels). Les matrices 1x1 ne sont autres que les nombres réels. La classe se demande si tout ceci est bien utile. Voici quelques illustrations.

Exemple 1: Le produit scalaire de deux vecteurs (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée s'écrit

$$x.x' + y.y' + z.z'$$

C'est aussi le produit matriciel

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.x' + y.y' + z.z' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

matrice 1x3 3x1 1x1

où le premier vecteur est traité comme matrice-ligne 1x3 et le deuxième comme matrice colonne 3x1.

Au fond, c'est ainsi que nous avons traité le produit matriciel auparavant.

Exemple 2: Examinons la transformation linéaire d'équations

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Ce système d'équations peut se représenter par une seule équation matricielle, à savoir

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

S'il faut composer deux transformations linéaires comme

$$L_1 \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{et} \quad L_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

cela se traduit très simplement par

$$L_2 \cdot L_1 \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Bref, les matrices conduisent vers des formes de calcul qui nous sont très familières pour les nombres mais sur des êtres bien plus généraux que les nombres.

Une question surgit ici. Peut-on additionner des matrices? C'est très facile ! Beaucoup plus facile que le produit matriciel.

<u>Exemple 3: Somme de matrices</u> (cela se fait comme pour les vecteurs)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -17 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -17 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5{,}2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 10 & 13 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 12 & 18 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$$

Chacun devrait deviner quelle est la définition générale de la somme matricielle. Cette opération est-elle utile ?. Voyons.

<u>Exemple 4: Représenter une affinité</u> par des matrices.

L'exemple 2 montre que dans les transformations, il est utile de représenter les points ou les vecteurs par des matrices-colonnes.

Prenons le cas d'une translation de l'espace:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \\ z' = z + r \end{cases}$$

Celle-ci peut se représenter par la somme matricielle

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

De même l'affinité du plan

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

se représente par

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Et la composée de deux affinités?

$$d_1 \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \qquad d_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By' + P \\ y'' = Cx' + Dy' + Q \end{cases}$$

Calculons $d_2 \circ d_1$:

$$x'' = Ax' + By' + P = A(ax + by + p) + B(cx + dy + q) + P$$

donc

$$\begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y + (Ap + Bq + P) \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y + (Cp + Dq + Q) \end{cases}$$ et de même (1)

Ceci semble assez compliqué. Essayons l'écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

ce qui livre effectivement le même résultat que (1).

Il faudrait tout de même s'assurer de cette distributivité. Ici, les deux calculs effectués montrent que la distributivité est légitime mais l'est-elle vraiment toujours?

===

EXERCICES

1. On donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) calculez A+B
b) calculez A−C
c) calculez −2A
d) vérifiez que A+(B−C) = (A+B)−C
e) trouvez la matrice D telle que A+D = 2B−C

2. Peut-on additionner deux matrices absolument quelconques, par exemple une matrice 3x3 et une matrice 2x2 ?

3. Soit $M_{p,q}$ l'ensemble des matrices p×q où p et q sont fixés.

a) montrez que $M_{p,q}$ est un groupe commutatif pour l'addition matricielle;

b) montrez que $M_{p,q}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition matricielle et pour la multiplication par un nombre réel que définit

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \cdots & ca_{1q} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \cdots & ca_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{p1} & ca_{p2} & ca_{p3} & \cdots & ca_{pq} \end{bmatrix} \qquad a_{i,j}, c \in \mathbb{R}$$

Il faut pour cela vérifier que

$c(m_1 + m_2) = cm_1 + cm_2$

$(c_1 + c_2)m = c_1 m + c_2 m$ pour $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$, $m, m_1, m_2 \in M_{pq}$

$c_1(c_2 m) = (c_1 c_2)m$

$1m = m$

4. Voici deux matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A-t-on $AB = BA$?

5. a) Le produit matriciel est-il associatif ?
   b) Admet-il un élément neutre ? (à discuter : réponse nuancée)

6. Considérons l'ensemble $M_{2,2}$ des matrices carrées 2x2 qui constituent un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a) Le produit de deux telles matrices est-il dans l'ensemble $M_{2,2}$?

b) Le produit est-il associatif ?

c) Le produit admet-il un neutre ?

d) Toute matrice 2x2 admet-elle un inverse ? (on dit qu'une matrice est <u>régulière</u> si elle admet un inverse).

e) Le produit est-il commutatif ?

f) A-t-on $A(B+C) = AB + AC$

et $(A+B)C = AC + BC$ (distributivités)

si A, B, C sont dans $M_{2,2}$?

g) $M_{2,2}, +, \cdot$ est-il un corps ?

h) Les matrices inversibles constituent-elles un groupe pour ~~l'addition~~ ?
la multiplication

7. Si $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, calculez A^5 .

8. Si $A = \begin{bmatrix} -15 & 3-3a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

trouvez les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

9. <u>Une application géométrique</u>

Si on donne 2 ou 3 transformations bien connues, qu'on les compose et qu'on demande de rechercher les points fixes de la composée, cela peut être une difficulté inextricable par le dessin. Le calcul matriciel en fait un jeu d'enfant.

On donne dans $\mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé,

a) la rotation $R \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de centre o et d'angle α ;

b) l'homothétie $H \begin{cases} x' - p = 5(x - p) \\ y' - q = 5(y - q) \end{cases}$ de centre (p,q) et de rapport 5;

c) la symétrie orthogonale $S \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ d'axe x=y

Trouvez les points fixes des similitudes suivantes:

a) $S \circ H \circ R$ b) $S \circ R \circ H$ c) R^2

d) H^2 e) $R^2 \circ S$ f) $R \circ H \circ S$

10. On donne la transformation linéaire de matrice $M_t \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Quelle est l'image de a(-1,1) par t ?
Quelle est l'image de l'axe x par t ?
Quelle est l'image de la droite D d'équation 3y+2x-4=0 par t ?

Les exercices qui suivent ont été posés lors des examens d'entrée à l'Ecole Polytechnique de l'U.L.B. ces dix dernières années.

11. On donne la transformation linéaire f qui est telle que $\begin{cases} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \dfrac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{2} \\ f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \dfrac{\vec{e}_2}{2} \end{cases}$

a) déterminez la matrice de cette transformation linéaire;
b) déterminez l'homothétie h de centre (0,1) et de rapport ½;
c) déterminez hof.

12. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine o et d'axes X,Y.

a) écrivez les équations de l'homothétie h de centre o et de rapport 2;
b) donnez l'équation du transformé C' du cercle C de centre c(6,0) et de rayon 1 par cette homothétie;
c) écrivez les équations de la symétrie centrale s de centre c(6,0);
d) écrivez les équations de la composée h∘s et caractérisez cette composée;
e) existe-t-il une homothétie différente de h transformant C en C' ? Justifiez.

13. Dans le plan π rapporté à un repère orthonormé, on donne:
a) le triangle abc : a(0,0) b(4,0) c(0,3)
b) la permutation T des points du plan définie par :

$$T\begin{cases} x' = -x - \frac{4}{3}y + 4 \\ y' = -\frac{4}{3}x + y \end{cases}$$

On demande:
a) de rechercher les points fixes éventuels pour T;
b) de vérifier que $T \circ T$ est une homothétie dont vous rechercherez le centre et le rapport;
c) de rechercher les coordonnées des sommets du triangle $a_ob_oc_o$ tel que $T(a_ob_oc_o)$ = abc et de représenter graphiquement $a_ob_oc_o$ et abc;
d) de rechercher les coordonnées des sommets du triangle $a_1b_1c_1$ tel que $T(abc)=a_1b_1c_1$ et de les représenter graphiquement (unité= 2 cm).

14. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine o, on donne les points fixes m(a,0), n(0,a) et p(a,a) avec $a \neq 0$.
1. écrivez les équations des rotations r_o, r_m, r_n et r_p de centres respectifs o,m,n,p et d'amplitude +90°;
2. déterminez les équations de la composée $r_n \circ r_o$ et la nature de cette transformation;
3. donnez la nature des composées $r_m \circ r_p \circ r_n \circ r_o$
$r_n \circ r_p \circ r_m \circ r_o$
et justifiez vos réponses.

15. Dans le plan rapporté à un repère d'origine o et d'axes X et Y, on considère :
l'homothétie h de centre o et de rapport 3;
la translation t amenant le point m(2,0) sur le point n(0,4).
On demande 1. de former les équations des transformations h, t, hot, toh;
2. de déterminer le(s) point(s) fixe(s) de hot et de toh;
3. de déterminer la nature des transformations hot et toh;
4. de transformer par toh le cercle de centre c(1,-2) comprenant o.
(figure: repère orthonormé, unité 1cm)

16. Dans le plan rapporté à un repère d'origine o et d'axes X et Y, on considère:
la rotation r_1 de centre o et d'amplitude 90°;
la rotation r_2 de centre c(2,4) et d'amplitude 90°.
On demande: 1. de former les équations des transformations r_1, r_2, r_1^{-1} et r_2^{-1};
2. de former les équations de la composée $s = r_2 \circ r_1$, de montrer que c'est une symétrie centrale et d'en déterminer le centre;
3. de former les équations de la composée $t = r_2^{-1} \circ r_1$, de montrer que c'est une translation et d'en déterminer le vecteur;

4. de construire sur une figure les transformées $r_1(m)$, $r_2(m)$, $s(m)$ et $t(m)$ où m est un point quelconque.

17. On donne le triangle de sommets a,b,c; soit i le centre du cercle inscrit à ce triangle. On désigne par s_1, s_2, s_3 les symétries orthogonales d'axes ai, bi, ci respectivement.

1. Quelle est l'image de la droite ac par la transformation $t = s_3 \circ s_2 \circ s_1$?
2. Quelle est l'image du point i par t ?
3. Déterminez un point de ac qui est fixe par t.
4. Donnez la nature de t et justifiez.

18. On donne le triangle de sommet a,b,c; soit h le point de rencontre des hauteurs (orthocentre) et a' le milieu du côté bc.

1. Démontrez que le symétrique de h par rapport au côté bc du triangle appartient au cercle C circonscrit au triangle (on désignera par 0 le centre de C et par R son rayon).
2. Caractérisez la figure symétrique de C par rapport au côté bc du triangle.
3. Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs $\vec{ah}$ et $\vec{oa'}$?
4. Caractérisez la figure symétrique de C par rapport au point a'.

19. Dans le plan euclidien rapporté à un repère d'origine o et d'axes X et Y, on donne les points m(a,0),n(0,b),p(a,b).
On demande:

1. les équations des symétries centrales s_o, s_m, s_n de centres respectifs o, m, n;
2. les équations de la composée $s_o \circ s_m \circ s_n$ et la nature de cette transformation;
3. les équations des symétries orthogonales s_x, s_y, s_{mp}, s_{np} d'axes respectifs x,y,mp et np;
4. les équations de la composée $s_x \circ s_y \circ s_{np} \circ s_{mp}$ et la nature de cette transformation.

20. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine o et d'axes X,Y, on considère
la translation t dont le vecteur a pour composantes a et b
la rotation r de centre o et d'angle 60°.
On demande :

1. les équations des transformations t et r;
2. les équations, les points fixes et la nature des transformations $t \circ r$ et $r \circ t$;
3. les équations, le point fixe et la nature de la transformation $t^{-1} \circ r \circ t$.

21. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine o et d'axes X et Y, on donne la transformation s d'équations :

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x - 5 \end{cases}$$

1. montrez que s est une similitude directe; déterminez les points transformés a' et b' des points a(2,0) et b(3,0) et le rapport de cette similitude;
2. déterminez l'angle formé par une droite quelconque D et sa transformée D'=s(D);
3. déterminez le(s) point(s) fixe(s) de s;
4. décrire s en tenant compte des résultats de 1),2) et 3);
5. établir les équations de deux cercles comprenant respectivement les points o,a,a' et les points o,b,b'; cherchez les points d'intersection de ces deux cercles.

22. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine o et d'axes X et Y, on considère l'application p associant à tout point m du plan sa projection m' sur la droite d'équation $y=2x$. On demande:
1. de former les équations et la matrice P de l'application p;
2. de former les équations de la transformation s de matrice $S = 2P-I$ où I est la matrice unité;
3. de déterminer les points fixes de s;
4. de déterminer s^2 et de caractériser s.

23. Dans le plan vectoriel rapporté à une base orthonormée, on donne une application linéaire α de matrice

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

1. écrivez les équations de α ;
2. écrivez les équations de $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$;
3. déterminez $\alpha(\vec{u})$ si $\vec{u}$ a pour composantes $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Trouvez les points fixes de α ;
4. déterminez $\alpha(\vec{v})$ si $\vec{v}$ a pour composantes $(\sin\varphi, -\cos\varphi)$; déterminez les points du plan qui ont pour image $\vec{o}(0,0)$;
5. tenant compte des résultats 2),3) et 4), quelle est la nature de l'application α ? Faites une figure si la mesure de φ est 30°.

24. Dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}$, π_α, + rapporté à une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, on donne les vecteurs:

$$\begin{cases} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ \vec{v} = \vec{e}_1.\sin\alpha - 2\vec{e}_2.\cos\alpha \qquad 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

Déterminez α pour qu'il existe une rotation φ telle que $\varphi(\vec{u}) = (\vec{v})$.
Pour chaque valeur trouvée, précisez l'angle et la matrice de la rotation.
Construire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (unité telle que $\sqrt{2}$ soit représenté par 4 cm)

25. On considère le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine o et d'axes X et Y. on demande:
1) d'écrire les équations de la rotation r de centre o et d'amplitude α et, en particulier, celles de la rotation r_1 correspondant à $\alpha = 1$ droit;
2) d'établir les équations de la symétrie orthogonale s par rapport à la droite d'équation
$x.\sin\beta - y.\cos\beta = 0$
et en particulier, celles de la symétrie s_1 dont l'axe a pour équation $y=x$;
3) d'établir les équations de la composée $r \circ s$ et, en particulier, celles de $r_1 \circ s_1$;
4) de caractériser $r \circ s$ et, en particulier, $r_1 \circ s_1$.

26. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine o, on donne les points a(1,0) et b(0,1) et on considère le carré abcd, de centre o et le carré oaeb.
1) Déterminez les coordonnées des points c,d,e.
2) Donnez la nature et les matrices de toutes les isométries du plan qui appliquent le carré abcd sur lui-même.
3) Etablissez les équations de la similitude du plan qui applique les points a,b,c,d respectivement sur a,e,b,o.

27. On considère dans le plan Π_0 rapporté à un repère orthonormé d'axes X et Y, la transformation linéaire T définie par

$$T\begin{cases} x' = x.\cos 2\theta + y.\sin 2\theta \\ y' = x.\sin 2\theta - y.\cos 2\theta \end{cases} \qquad \theta \neq k\frac{\pi}{2} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

On demande:

a) les équations de la transformation $T \circ T$;

b) l'ensemble des points fixes pour T;

c) les équations des droites P comprenant l'origine telles que T(P) soit perpendiculaire à P.

28. Dans le plan vectoriel rapporté à une base, on donne une application linéaire α de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

où m est un paramètre réel.

1. Ecrivez les équations de α.
2. Déterminez les droites vectorielles fixes ou propres dans α et discutez leur existence en fonction de m. pour quelle(s) valeur(s) de m ces droites sont-elles orthogonales? Décrivez l'application dans ce(s) cas.
3. Décrivez l'application α dans le cas où m=-1.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'application α^2 est-elle l'identité ? Décrivez α dans ce(s) cas.

RESUME

Soit a la matrice pxq

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

soit b la matrice pxq

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

soit c la matrice qxt

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \dots & c_{qt} \end{bmatrix}$$

Somme de deux matrices: la somme de deux matrices pxq est une matrice pxq.

$$(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Produit de deux matrices: le produit d'une matrice pxq et d'une matrice qxt est une matrice pxt.

$$(a.c)_{ij} = a_{i1}.c_{1j} + a_{i2}.c_{2j} + a_{i3}.c_{3j} + \dots + a_{iq}.c_{qj}$$

Produit d'une matrice par un réel r : le produit d'une matrice pxq par un réel r est une matrice pxq.

$$(r.a)_{ij} = r.a_{ij}$$

L'ensemble des matrices mxn forment un espace vectoriel de dimensions mxn.
L'ensemble des matrices régulières nxn forment un groupe non commutatif.
A toute transformation linéaire correspond une matrice (dans une base donnée).