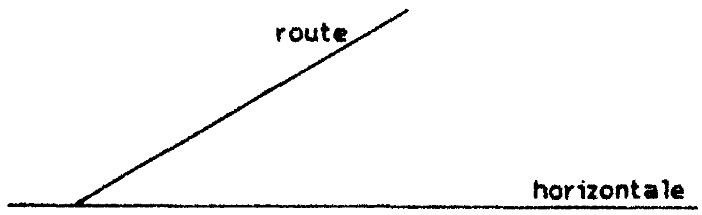
5. LE CONTROLE DE LA PENTE

3 h/s, 5 h/s, 7h/s

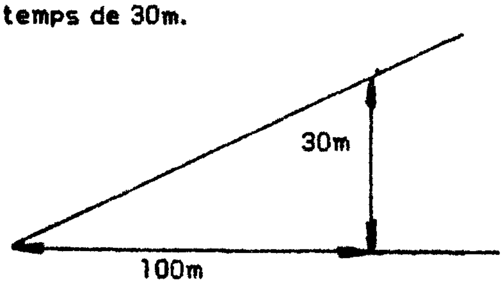
PENTES

Imaginons une route qui monte. Bien sûr, elle descend aussi comme le disait déjà Héraclite, un précurseur de la relativité. Le plus simple est de la voir comme une droite qu'on situe par rapport à l'horizontale. Voici



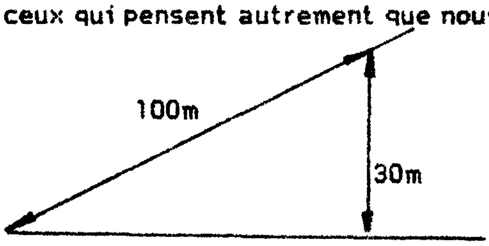
(1)

Comment exprime-t-on la difficulté que rencontre le cycliste escaladant cette route? Celle que nous avons dessinée ferait des ravages dans les mollets: une côte de 30% environ. Comment interpréter cette situation ? ...Un déplacement horizontal de 100m vous élève en même temps de 30m.



(2)

Ici la bagarre éclate dans le peloton de la classe car les supporters chauvins - ce sont ceux qui pensent autrement que nous - préfèrent une image qu'ils jugent plus réaliste:



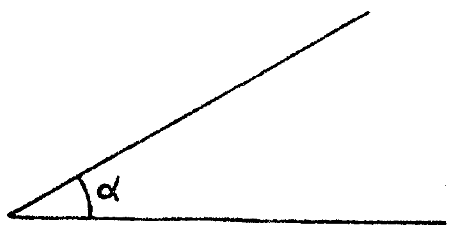
(3)

Ils disent qu'on sait évaluer la distance sur la route plus facilement que sur l'horizontale qui se trouve à l'intérieur de la colline. Juste! Mais les mathématiques ne sont-elles pas l'art d'y voir clair sans faire des mesures sur le terrain ?

Le professeur qui fait cette tentative de philosophie est interrompu par une élève qui n'aime pas couper les cheveux en quatre: " De toute façon, quelle est la différence?"

Le professeur demeure bien en selle et répond prudemment:" Voyons!"

Appelons α l'angle de la route et de l'horizontale. Tiens, on n'y avait pas pensé à celui-là !



(4)

(4)

Alors, l'image (2) combinée à (4) livre $tg\alpha = 30/100 = 0,3$ et sur la TI58, la manoeuvre 0.3 INV 2nd tan fournit $\alpha = 16,7$ degrés. Par contre l'image (3) combinée à (4) livre $\sin\alpha = 30/100 = 0,3$ et la manoeuvre 0.3 INV 2nd SIN donne $\alpha = 17,4$ degrés.

Ainsi tout le monde a raison: (2) et (3) ne sont pas pareils du tout mais dans l'exemple considéré, la différence n'est pas grande.

==

EXERCICES

1. Utilisez une calculatrice et un programme pour montrer que $\sin\alpha$ et $tg\alpha$ sont de plus en plus proches lorsque α est un angle positif qui tend vers 0.

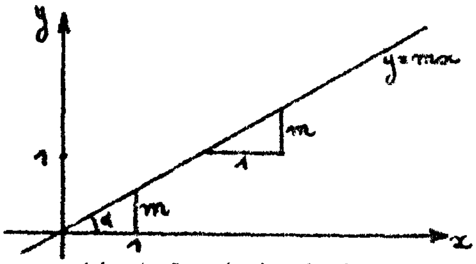
2. Comment s'explique l'observation faite dans l'exercice 1, si on se souvient que $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$?

==

LA PENTE EN MATHEMATIQUE

On vient de voir que deux interprétations de la mesure d'une pente sont possibles pour les routes et que la différence est faible lorsque l'angle est petit, ce qui est le cas de toute route bien concue.

En mathématique, une seule interprétation est retenue et ce pour une raison très simple. Dans un repère orthonormé bien choisi (comment?), la droite possède une équation



$y = m.x$

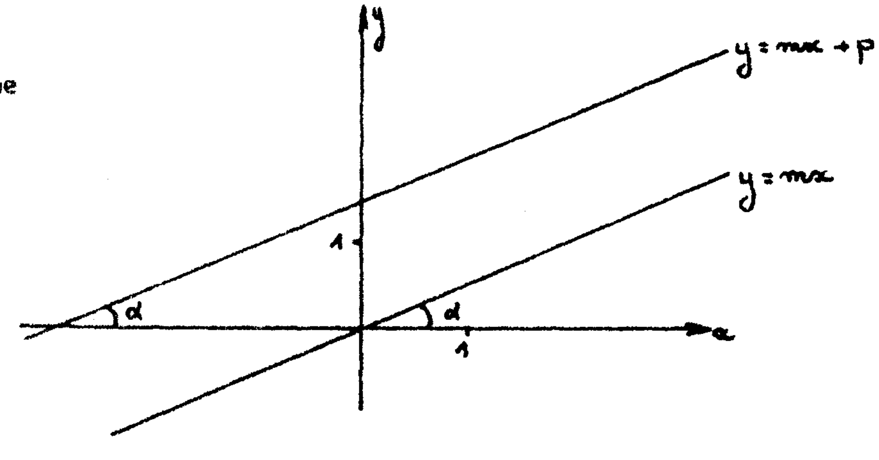
et il est bien clair que

$m = tg\alpha$.

Ainsi, le choix de $tg\alpha$ pour mesurer la pente est-il tout indiqué et nous nous en tiendrons à ce choix. On dit que m est <u>la pente</u> ou <u>le coefficient angulaire</u> de la droite. Ceci demeure valable pour

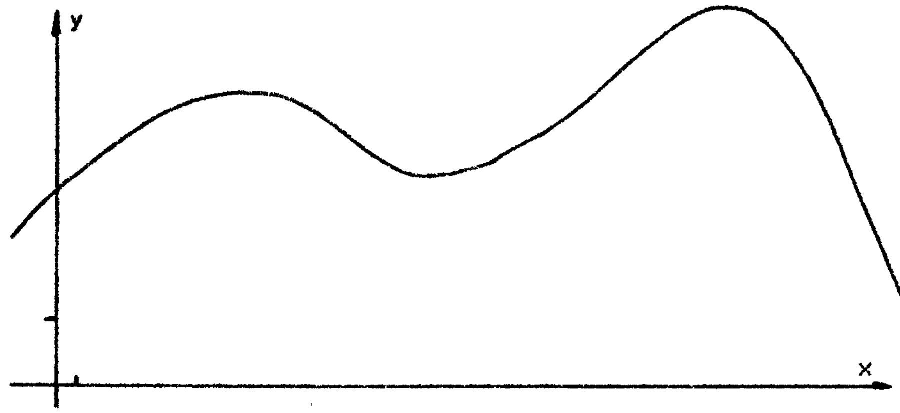
$y = m.x + p$

car cette droite est parallèle à $y = m.x$ et elle a donc la même pente.



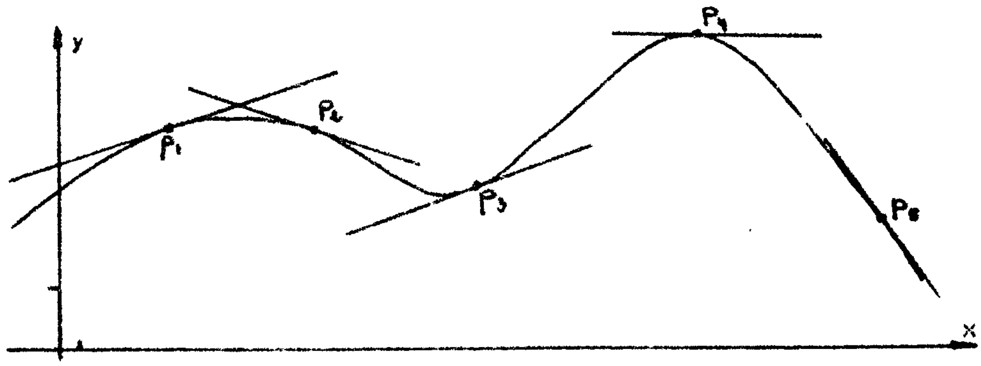
Désormais, pente et coefficient angulaire seront synonymes pour une droite dans un repère orthonormé.

Mais déjà se profile une nouvelle question. Les routes qui montent- et qui descendent- sont rarement des droites. Dans les cols du Tour de France, on aurait plutôt des profils du style suivant (mais en repères non-orthonormés):



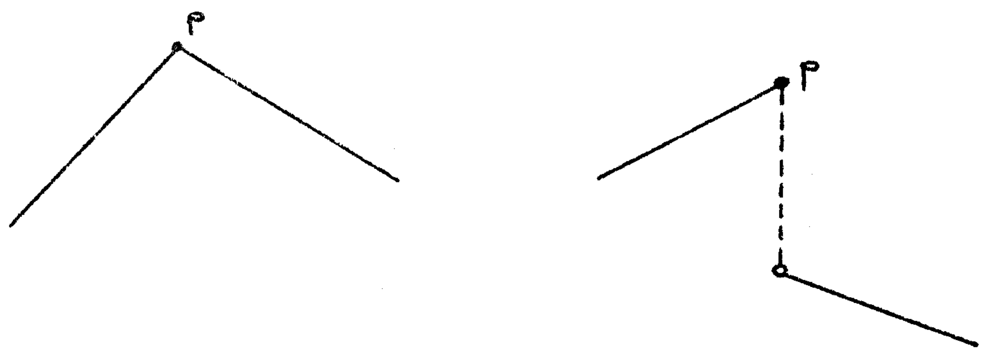
On en vient à songer à une pente variable. La pente est au fond une propriété locale de la route. Un peu plus loin, elle peut augmenter ou diminuer (exemple typique: le faux-plat des cyclistes). Comment contrôler cette notion? Par la droite tangente à la courbe qu'on appelle brièvement la tangente et qu'il ne faut pas confondre avec la tangente d'un angle bien que ces deux notions soient liées.

Voici les droites tangentes à la courbe déjà rencontrée:

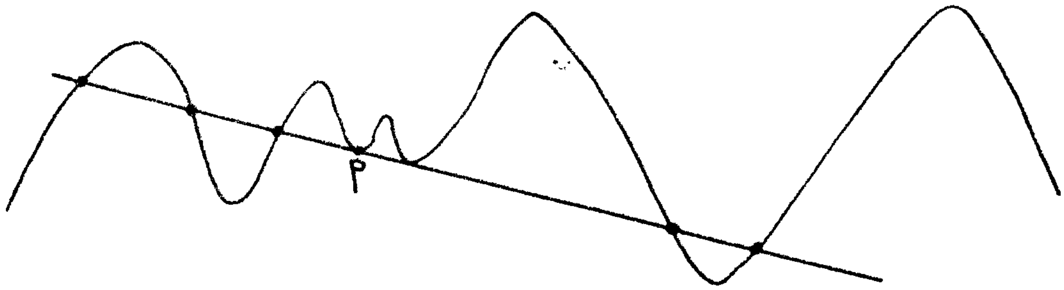


En tout point p de la courbe C nous avons une tangente, une droite qui colle bien à la courbe, et nous dirons que cette droite est la tangente à C en p, et que p est le point de contact de la tangente et de la courbe.

Bien entendu, il faut pour cela que la courbe soit bien gentille. Voici des courbes et des points p où la tangente n'est pas facile à décrire (en fait, il n'y a pas de tangente !):



On a parfois tendance à dire qu'une tangente à une courbe coupe celle-ci en un seul point. C'est parfait pour le cercle et pour d'autres courbes qui lui ressemblent, comme l'ellipse. Mais c'est inexact en général. Voici une tangente qui recoupe la courbe en d'autres points que le point de contact :



Il n'est donc pas facile d'exprimer ce qu'est une tangente en termes d'intersection sauf pour des courbes particulièrement "gentilles".

==

EXERCICES

3. a) Si C est un cercle et si $p \in C$, la tangente à C en p est l'unique droite qui ".....". (Complétez la phrase. Il y a plus d'une réponse correcte).

b) Vérifiez votre définition a) sur un dessin.

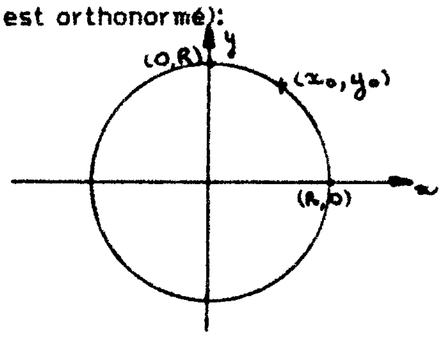
c) La définition adoptée en a) s'applique-t'elle à d'autres courbes que vous connaissez ? (ceci dépend de la réponse adoptée en a)).

4. Voici un cercle C de centre o et d'équation (le repère est orthonormé):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Voici un point $p = (x_0, y_0)$ sur C.

Trouvez l'équation de la tangente à C par p.



5. Voici une parabole P d'équation

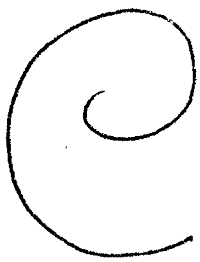
$$y = ax^2 + bx + c$$

a) Quelles sont les droites qui coupent P en un seul point ? Essayez de deviner, sur un dessin, puis de le prouver pour un cas particulier simple comme $y=ax^2$, puis de généraliser (exercice assez long mais qui mérite le détour).

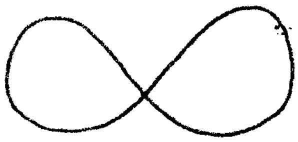
b) Comment pourrait-on définir les tangentes à P en termes d'intersection ?

6. Dessinez des tangentes aux courbes suivantes :

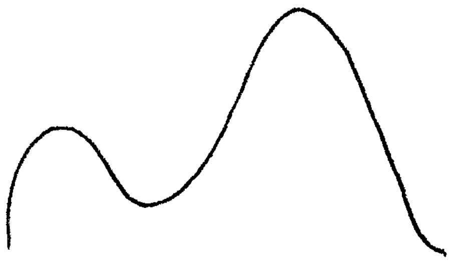
a)



b)



c)



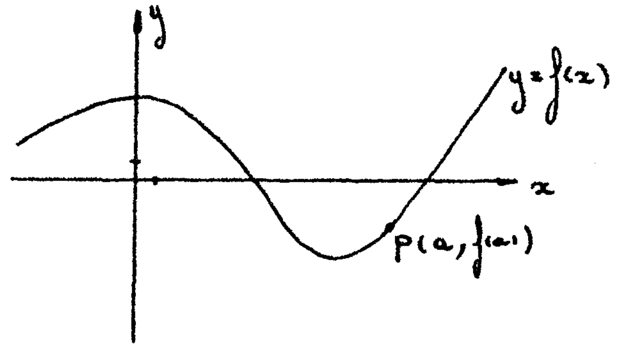
Cauchy (1789 - 1857)

EQUATIONS DE TANGENTES

Considérons une courbe C d'équation

$$y = f(x)$$

et un point $p = (a, f(a))$.



Comment déterminer l'équation de la tangente à C en p ?

Cette tangente est une droite d'équation

$$y - f(a) = m(x - a)$$

et il s'agit d'en trouver la pente m. Ce serait facile si on disposait d'un deuxième point sur la droite. Voici comment on peut aborder la question.

Exemple 1 :

Considérons la parabole P d'équation

$$y = x^2$$

et un point $p = (a, a^2)$ sur P. Pour rechercher la tangente en p, considérons d'abord un 2e point $u = (x, x^2)$ sur P. La droite pu admet une pente

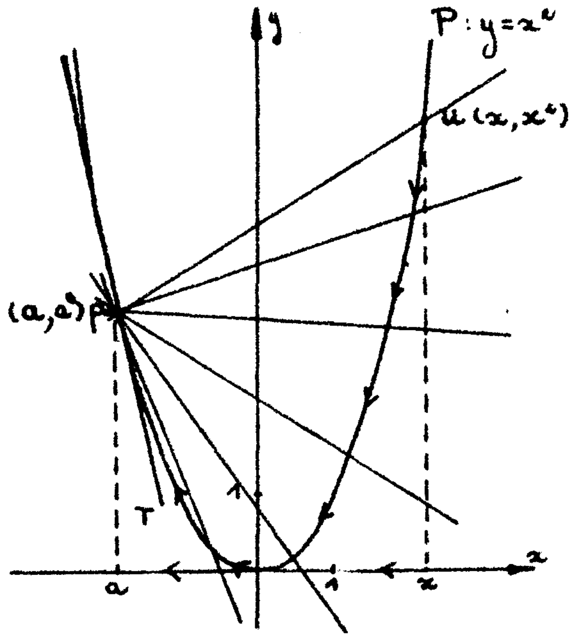
$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = x + a$$

si $x \neq a$. Lorsque x se rapproche de a, la droite pu se rapproche de la tangente à P en p et la pente de cette droite se rapproche de a+a= 2a.

Nous admettons que la tangente à P en p a pour équation

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

Nous testons ceci par le dessin: c'est convaincant.



Exemple 2 : C est la courbe d'équation y = sin x. Cette fois, la sécante pu a une pente

$$\frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

Quelle est la limite de celle-ci, vers quoi tend-elle lorsque x tend vers a ?

Notons ceci
$$\ell = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

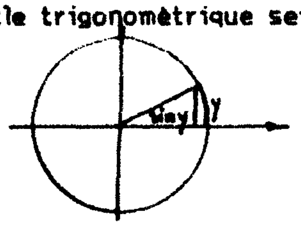
On a $\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}.\sin\frac{x-a}{2}$ et il semble naturel de poser

$$\ell = \lim_{x \to a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

Cette expression va tendre vers un produit de deux facteurs: $\cos\frac{2a}{2} = \cos a$ d'une part et $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$ d'autre part.

Ainsi, nous prévoyons que $\ell = \cos a . \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$.

Que vaut cette dernière limite? L'examen d'un cercle trigonométrique semble indiquer que pour y proche de 0, l'arc y et le segment sin y ont même longueur.



Ainsi aurait-on

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pour rappel, x mesure un angle en radians (afin de l'identifier à une longueur d'arc) et non en degrés.

La pente de la courbe $y = \sin x$ en $(a, \sin a)$ serait donc $\ell = \cos a$. Un tracé point par point de la courbe C et l'application du résultat obtenu au tracé des tangentes rend tout ceci plausible. Il n'empêche que nous n'avons pas travaillé très rigoureusement et qu'une vérification supplémentaire serait la bienvenue.

Une calculatrice est programmée pour livrer $\frac{\sin x}{x}$ à partir d'une valeur initiale, par exemple x=0,1 et puis en x=0,1 - 0,01 et x=(0,1 - 0,01)- 0,01 , etc...

Voici le programme pour une TI58:

LRN
2nd Label A .... servira au cours de l'exécution à introduire un premier nombre
STØ 00 (par exemple, x=0,1) qui est stocké dans la mémoire 00
R/S .... le programme s'arrête et ...
2nd label B .... l'accroissement qu'on veut donner à la variable x, par exemple 0,01 peut être introduit puis stocké dans la
STØ 01 mémoire 01
2nd label C .... nom donné à la partie du programme qu'on veut répéter (boucle) à la fin de l'instruction GTØ C
RCL 00-RCL 01=STØ 00 ... on rappelle x stocké en 00, on en soustrait l'accroissement rappelé de 01 et on remplace x par cette nouvelle valeur dans 00
2nd RAD .... le nombre x est considéré comme un angle mesuré en radians
2nd SIN .... on en calcule le sinus
÷ .... on divise celui-ci ...
RCL 00 .... par x
= .... le résultat obtenu ...
R/S .... s'affiche grâce à l'arrêt du programme
RCL 00 .... x est rappelé et affiché pour voir à quelle distance de 0 on

```
R/S                            se trouve
GTØC     .................     la boucle reprend
LRN
```

On essaye en introduisant 0.1A 0.01B. La machine affiche un nombre proche de 1. En prenant R/S pour remettre chaque fois le programme en marche, on voit que x se rapproche de 1 et, à notre surprise, lorsque x=0 la machine affiche 1 en vacillant.

Un calcul séparé de 0 2nd RAD 2nd SIN ÷ 0 = livre également la valeur 1 en vacillant. Nos présomptions se confirment.

Voici un programme sur HP34C:

```
h LB A        Mise en route   0.1 STØ 0
RCL 0                         0.01 STØ 1
ENTER                         A
RCL 1
  -
STØ 0
g RAD
f SIN
RCL 0
h PSE
  ÷
h PSE
GTØ A
```

La HP est moins gentille que la TI. Quand on arrive à 0, elle affiche ERROR parce qu'on divise par 0.
Mais on voit que la valeur de $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 si x tend vers 0.

Voici un programme en BASIC:

```
10  input A
20  input B
30  let C = sin A/A
40  print A,C
50  let A=A-B
60  goto 30
```

<u>Exemple 3:</u> C est une courbe d'équation $y = 2^x$

Cette fois, la sécante pu a une pente

$$\frac{2^x - 2^a}{x - a}$$

et nous voulons $\lim\limits_{x \to a} \frac{2^x - 2^a}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} 2^a . \frac{(2^{x-a} - 1)}{x - a}$

$$= 2^a . \lim_{y \to 0} \frac{2^y - 1}{y}$$

Un programme sur TI58 nous permet d'estimer cette limite :

```
LRN                                          0.01 A    0.001 B
2nd Label A
STØ 00
R/S
2nd label B
STØ 01
2nd label C   RCL 00-RCL 01 = STØ 00
((2 y^x RCL 00) - 1) ÷ RCL 00 =
R/S
RCL 00
R/S
GTØ C
LRN
```

En BASIC, un programme possible est :

```
10  input A
20  input B
30  let C=(2 A - 1)/A
40  print A,C
50  let A=A-B
60  goto 30
```

Ceci est beaucoup moins clair et concluant. Il faudra reprendre la question. Au fond, la difficulté est que nous ne parvenons pas à deviner quelle est la limite.

<u>Cas général :</u> C est donnée par $y = f(x)$.
La pente de pu est donnée par

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et nous voulons

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad \text{(notation)}$$

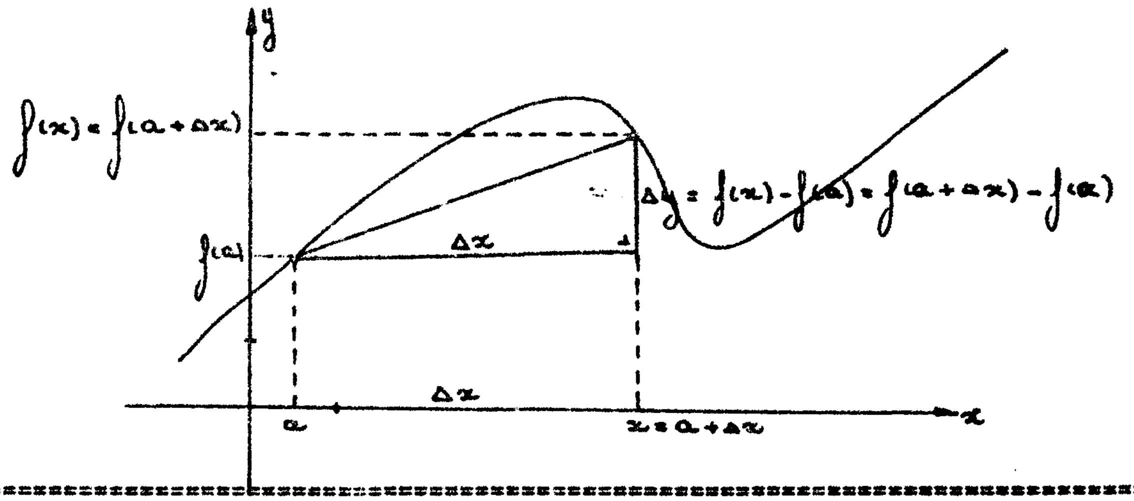
qu'on appelle <u>la dérivée de la fonction f en a.</u>

On peut la traduire autrement: introduisons l'accroissement $\Delta x = x - a$ donc $x = a + \Delta x$.
Si x tend vers a, Δx tend vers 0 et nous admettons que

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

donc la dérivée apparaît comme la limite du taux d'accroissement relatif de la fonction: rapport de l'accroissement de la fonction et de la variable.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



EXERCICES

7. Utilisez la méthode des limites et dérivées pour calculer et dessiner des tangentes aux courbes suivantes en les valeurs de x citées:

a) $f(t) = 2t^3 - 5t^2 - 9$ en $t = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$

b) $f(x) = 5.\cos x$ en $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Rédigez un programme pour faciliter cette tâche.

8. Le mouvement d'un point sur une droite est contrôlé par la loi
$x = f(t)$ où t est le temps et x, la distance du point à un point origine.
Montrez que la notion de <u>vitesse instantanée</u> conduit à la dérivée de f.

9. a) Reprendre la dérivée de $y=2^x$ en complétant le tableau ci-dessous à l'aide d'une calculatrice:

Δx	$\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}$
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	

On observe que la dérivée de $f(x) = 2^x$ en a est proche de $2^a.(0{,}6931)$. La base 2 est donc gênante pour étudier la dérivée d'une fonction exponentielle, puisqu'elle fait apparaître un nombre "tordu" tel que 0,6931.

b) Essayons $y = 3^x$. Montrez que sa dérivée en a est $3^a.\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Complétez le tableau:

Δx	$\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}$
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	

et observez que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ est proche de 1,0986.

c) Il doit exister un nombre remplaçant 2 et 3 ci-dessus qui livre une limite égale à 1. Essayez 2,7 . Montrez que la limite cherchée se rapproche de 0,9933.

d) Essayez 2,72.

e) On définit le nombre réel e par la propriété

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

et on admet son existence.

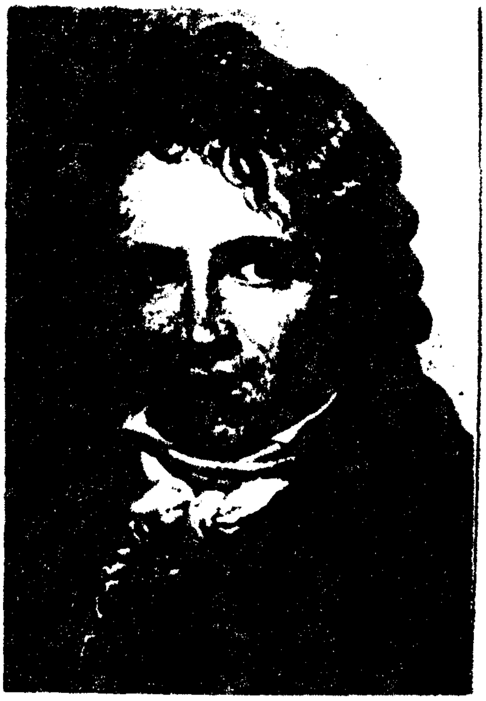
Par définition, $e^{\Delta x} - 1 \simeq \Delta x$ pour Δx petit. Donc

$$e = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Estimez cette dernière limite, par n= 5000.

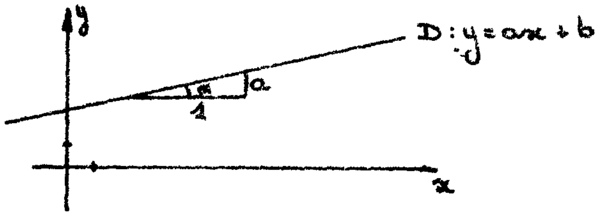
==+==

Bessel (1784- 1846)



RESUME

- Pente d'une droite: la pente de D ou le coefficient angulaire de D vaut a = tg α

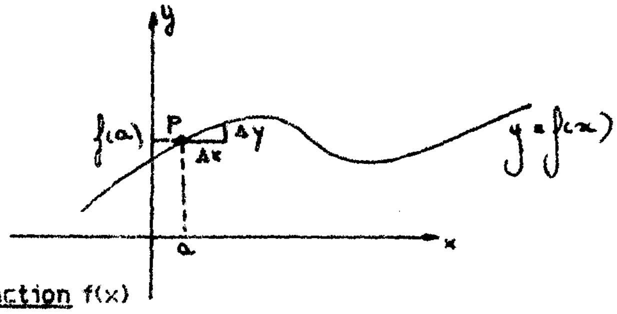


- Pente de la tangente à une courbe en un de ses points :

La pente de T vaut

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Le nombre ci-dessus est appelé <u>dérivée de la fonction</u> f(x) <u>en x=a</u> et se note f'(a).

- Lors des exercices, nous avons rencontré un nombre qui va prendre une place de plus en plus importante:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Poincaré (1854-1912)