4. TRANSFORMATIONS ET COORDONNEES | 7 h/sem

SYNTHESE DE TRANSFORMATIONS DE LA DROITE ET DE FONCTIONS NUMERIQUES

Depuis la première année, nos progrès dans le domaine des transformations et dans celui des nombres, ont souvent été liés.

1) Les nombres naturels sont représentés sur une droite graduée:

0 1 2 3 4 ...

2) Les nombres naturels nous aident à comprendre la translation qui fait passer sur la droite, du point d'abscisse 0 au point d'abscisse 1.

3) Cette translation est la fonction $t: x \to x+1$.

4) La translation réciproque t^{-1} est la fonction $t^{-1}: x \to x-1$.

5) Quand on examine cette translation t^{-1}, on voit qu'elle applique 5 sur 4, 4 sur 3, 3 sur 2, 2 sur 1, 1 sur 0 et on est tout naturellement conduit à poursuivre comme suit.

6) t^{-1} applique 0 sur -1, -1 sur -2, etc...De cette manière, on découvre et on construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers. La symétrie de centre o, $s_o: x \to -x$, participe à cette construction. Nous pourrions poursuivre ce tour d'horizon de nos acquisitions mais il est temps de poursuivre notre progression.

7) Transformations de la droite

Dès que la droite est munie d'un repère constitué d'une origine o et d'un point unité e, tout point p s'identifie à un nombre réel, l'abscisse ou la coordonnée de p. Réciproquement, tout nombre réel s'identifie à un point. La droite repérée s'identifie au corps ordonné $\mathbb{R}$ car la structure de celui-ci possède une signification géométrique. Ceci doit être clair pour la structure d'ordre de $\mathbb{R}$ qui correspond à la présence de demi-droites et d'intervalles sur la droite.

Et l'addition? La fonction $x \to x+a$ n'est autre qu'une translation et toute translation s'identifie à une telle fonction.

L'addition s'identifie donc largement à la notion de translation: en tout cas, la donnée de l'une livre l'autre.

Et la multiplication? C'est pareil à l'addition. Seuls le langage et les notations sont différentes: $x \to ax$ est une homothétie de centre o et de rapport a. De plus, toute homothétie de centre o se représente de cette manière.

A noter le rôle particulier de $x \to 0x = 0$ qu'on appelle homothétie constante parce que cette fonction prend la même valeur en tout point.

En composant les homothéties non constantes de centre o et les translations, on obtient le groupe des similitudes (ou affinités) de la droite, ou encore le groupe des transformations

$x \to ax + b \qquad a,b \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$

Et les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to f(x)$? Il est tout à fait légitime de les considérer, elles aussi, comme des transformations de la droite. Ainsi, les fonctions croissantes sont des transformations qui conservent l'ordre sur la droite.

C'est le cas de $x \to x^3$, $x \to \text{arc tg } x$, par exemple.

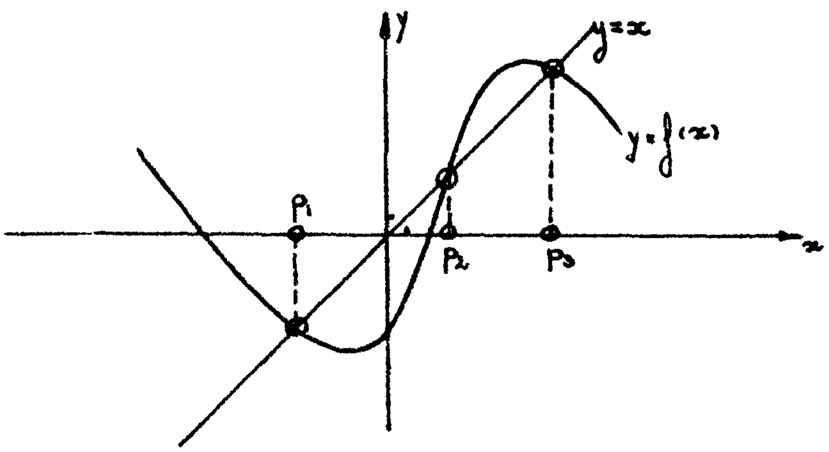
Les fonctions décroissantes sont celles qui renversent l'ordre; elles conservent la notion de demi-droite et la notion d'intervalle mais elles renversent l'orientation de ceux-ci. Quant aux fonctions qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, nous verrons peu à peu que celles-ci peuvent malgré tout conserver une certaine structure de la droite dite topologique, mais il n'en va pas nécessairement de la sorte.

On s'intéresse souvent aux <u>points fixes</u> d'une transformation f, c'est-à-dire aux solutions de l'équation $f(x) = x$.
Ces solutions se lisent facilement sur un graphique de f (s'il est diponible): elles sont livrées par les points d'intersection du

graphique d'équation $y=f(x)$

et de la droite $y=x$.

<u>Exemple</u> La fonction f représentée ci-dessous admet 3 points fixes p_1, p_2, p_3.



==

<u>**EXERCICES**</u>

1. Trouvez les points fixes des transformations suivantes de la droite. On s'exercera à faire des calculs et à raisonner sur base d'un graphique, pour obtenir une solution qui est tantôt exacte, tantôt approchée.

a) $x \to 2x$ f) $x \to \sqrt{x-1}$

b) $x \to 2x+1$ g) $x \to E(x)$

c) $x \to -x+5$

d) $x \to x$

e) $x \to 6x^5 - 5$

h) $x \to \sin x$ (difficile)

i) $x \to ax + b$

j) $x \to x^2 + \frac{1}{x}$

2. Trouvez les transformations $f: x \to ax+b$ (c'est-à-dire trouvez a et b dans $\mathbb{R}$) par un calcul et une méthode graphique, pour que

a) $f(0) = 5$, $f(2) = -9$
b) $f(4) = 3$, $f(1) = 7$
c) $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ si $x_0 \neq x_1$

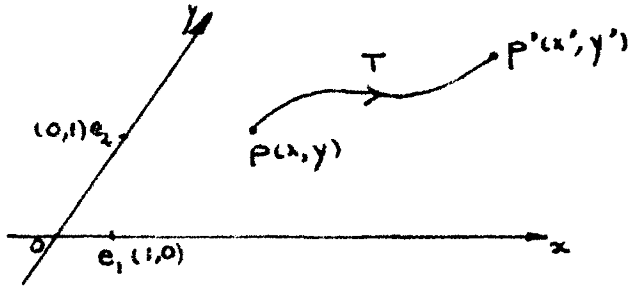
3. La fonction $x \to x^2$ de $\mathbb{R}$ transforme-t-elle tout intervalle fermé de la droite en un intervalle fermé ?

==

PASSONS AU PLAN ET A L'ESPACE

Dans le plan, nous disposons d'un arsenal de transformations, étudiées en géométrie, beaucoup plus étendu que sur la droite. Peut-on, ici aussi, ramener l'étude de ces transformations à celles de fonctions numériques ? Ce serait bien pratique pour les confier à un ordinateur ou pour communiquer à grande distance.

Nous identifions le plan à $\mathbb{R}^2$, grâce au choix d'un repère constitué d'une origine o et de deux points unités e_1, e_2 non alignés avec o.



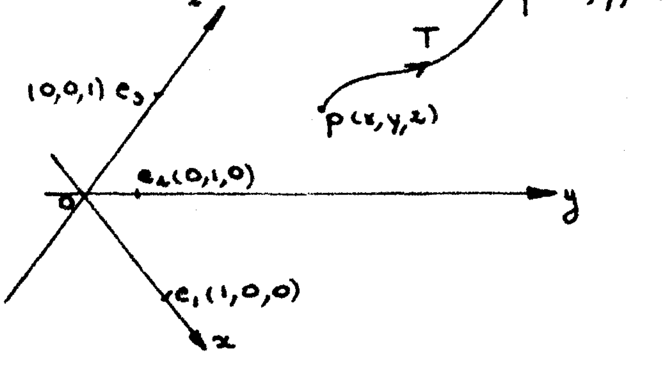
Si T est une transformation du plan, elle transforme tout point $p=(x,y)$ en un point $p'=(x',y')$ et

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

sont donnés par des fonctions f et g qui dépendent de x et de y. La transformation T s'exprime donc à l'aide de deux fonctions de deux variables.

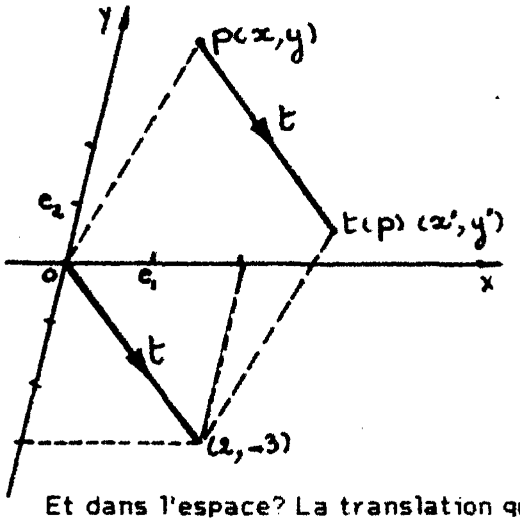
De même, dans l'espace, T s'exprime à l'aide de trois fonctions de trois variables

$$\begin{cases} x' = f(x,y,z) \\ y' = g(x,y,z) \\ z' = h(x,y,z) \end{cases}$$



Examinons quelques transformations familières.

Exemple 1 Translation Soit t la translation du plan $\mathbb{R}^2$ qui transforme o en (2,-3). Quelles sont les coordonnées de t(p) si p=(x,y)?



Il suffit de construire le quatrième sommet du parallélogramme dont (2,-3), o et (x,y) sont des sommets consécutifs ou d'additionner les vecteurs (2,-3) et (x,y).

Donc t(p)=(x',y') = (x,y) + (2,-3)

ou

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

De manière générale, la translation qui transforme o en (p,q) est contrôlée par

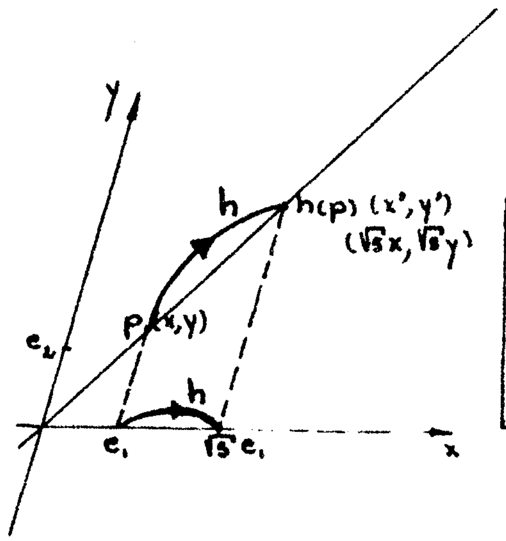
$$\boxed{t \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}} \qquad p,q \in \mathbb{R}$$

Et dans l'espace? La translation qui transforme o en (p,q,r) est

$$t: (x,y,z) \longrightarrow (x',y',z') \text{ où } \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \\ z' = z + r \end{cases} \qquad p,q,r \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 Homothétie de centre o

Soit h l'homothétie de $\mathbb{R}^2$, de centre o et de rapport $\sqrt{5}$. Quelles sont les coordonnées de h(x,y)?



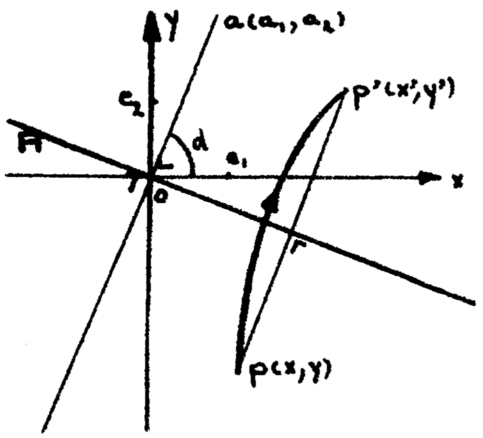
Grâce au théorème de Thalès,

$$h(x,y) = (x',y') = (\sqrt{5}.x, \sqrt{5}.y)$$

Si h est l'homothétie de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ de centre o et de rapport r, elle s'exprime par

$$\boxed{\begin{array}{l} h(x,y) = (x',y') \\ \text{où} \\ \begin{cases} x' = r.x \\ y' = r.y \end{cases} \quad r \in \mathbb{R} \\ \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} h(x,y,z) = (x',y',z') \\ \text{où} \\ \begin{cases} x' = r.x \\ y' = r.y \\ z' = r.z \end{cases} \quad r \in \mathbb{R} \\ \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{array}}$$

<u>Exemple 3</u> <u>La symétrie orthogonale</u> dont l'axe est la droite passant par o et orthogonale au vecteur $a=(a_1,a_2) \neq 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.



L'axe de la symétrie est la droite A d'équation

$$a_1x + a_2y = 0$$

Comment déterminer x' et y' ? On sait que

(1) $\vec{pp'}$ est multiple de $\vec{a}$

(2) le milieu de pp' est sur l'axe A

La condition (2) donne

$$a_1.\frac{x+x'}{2} + a_2.\frac{y+y'}{2} = 0 \qquad (3)$$

La condition (1) donne

$$(x'-x,y'-y) = k.(a_1,a_2)$$

ou

$$\frac{x'-x}{a_1} = \frac{y'-y}{a_2} \qquad (4)$$

(3),(4)
$$\begin{cases} a_1x' + a_2y' = -a_1x - a_2y & (5) \\ a_2x' - a_1y' = a_2x - a_1y & (6) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} (5).a_1 + (6).a_2 & \left\{ \begin{array}{l} (a_1^2 + a_2^2)x' = (a_2^2-a_1^2)x - 2a_1a_2y \\ (a_2^2 + a_1^2)y' = -2a_1a_2x + (a_1^2-a_2^2)y \end{array} \right. \\ (5).a_2 - (6).a_1 & \end{array}$$

Comme $(a_1,a_2) \neq (0,0)$, on a $a_1^2+a_2^2 \neq 0$ et dès lors on obtient le résulat recherché:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2 + a_2^2}.x - \dfrac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2}.y \\ \\ y' = \dfrac{-2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2}.x + \dfrac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}.y \end{cases} \qquad (7)$$

Ces expressions peuvent sembler compliquées. Pourtant, il s'agit de fonctions somme toutes fort simples, à savoir des polynômes du premier degré en x et en y. Ce sont les coefficients de x et de y qui sont un peu compliqués mais il est possible de les voir de manière plus agréable.

La transformation ne change pas si $a=(a_1,a_2)$ est remplacé par le point d'intersection de la demi-droite [oa avec le cercle de centre o et de rayon 1. Ce point est de la forme $a=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ où α est un certain angle (voir figure précédente). Alors (7) livre

$$\begin{cases} x' = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).x - 2.\sin\alpha.\cos\alpha.y \\ y' = -2.\sin\alpha.\cos\alpha.x + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).y \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x' = -\cos 2\alpha \, .x - \sin 2\alpha .y \\ y' = -\sin 2\alpha \, .x + \cos 2\alpha .y \end{cases} \qquad (8)$$

qui présente peut-être un aspect plus agréable que (7).

<u>Exemple 4</u> <u>Transformation linéaire et affinité du plan $\mathbb{R}^2$</u>

La symétrie orthogonale et l'homothétie étudiées ci-dessus sont des cas particuliers de

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \text{ où } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

qu'on appelle une <u>transformation linéaire</u> de $\mathbb{R}^2$.

Les translations et les transformations linéaires sont des cas particuliers de

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \text{ où } \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \quad a,b,c,d,p,q \in \mathbb{R}$$

qu'on appelle <u>affinités</u> de $\mathbb{R}^2$.

Par composition de transformations linéaires on obtient des transformations linéaires. En voici la preuve.

$$L_1 : (x,y) \longrightarrow (x',y') \quad \text{avec} \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

$$a,b,c,d,A,B,C,D \in \mathbb{R}$$

$$L_2 : (x',y') \longrightarrow (x'',y'') \quad \text{avec} \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

Alors

$$L = L_2 \, .L_1 : (x,y) \longrightarrow (x'',y'') \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} x'' = A(ax+by) + B(cx+dy) = (Aa+Bc)x + (Ab+Bd)y \\ y'' = C(ax+by) + D(cx+dy) = (Ca+Dc)x + (Cb+Dd)y \end{cases}$$

donc $L = L_2 \, . \, L_1$ est une tranformation linéaire.

Un calcul tout-à-fait analogue, montre que la composée de deux affinités est une affinité. Ce même calcul s'applique encore aux transformations linéaires et aux affinités de $\mathbb{R}^3$.

Considérons la transformation linéaire $T: (x,y) \longrightarrow (x',y')$ où $\begin{cases} x' = 2x-y \\ y' = x+y \end{cases}$

Tentons de trouver son inverse $T^{-1}: (x,y) \longrightarrow (x',y')$ où $\begin{cases} x = 2x'-y' \\ y = x'+y' \end{cases}$

ou encore $\qquad T^{-1}: (x,y) \longrightarrow (x',y')$ où $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$

qui est une autre transformation linéaire.

Un élève s'écrie:"Les tranformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ constituent un groupe". C'est une idée qu'il fallait avoir mais qui est néanmoins inexacte. L'obstacle est qu'il existe des transformations linéaires qui ne sont pas inversibles, par exemple

$(x,y) \longrightarrow (3x+y,\ 6x+2y)$

En effet, $T^{-1}: (x,y) \longrightarrow (x',y')$ où

$$\begin{cases} x = 3x'+y' \\ y = 6x'+2y' \end{cases}$$

Dans ce système, on ne peut tirer une expression de x' et y' en fonction de x et de y. T^{-1} n'existe donc pas et T n'est pas une transformation linéaire inversible. En effet, par T tous les points du plan sont envoyés sur la droite d'équation y=2x. Un point qui n'est pas sur cette droite n'a donc certainement aucune image par T^{-1}.

Cet obstacle est facilement surmonté.

__Théorème__ (1) les transformations linéaires inversibles du plan $\mathbb{R}^2$ constituent un groupe qu'on appelle le __groupe linéaire__ $GL_2(\mathbb{R})$.

(2) les transformations linéaires inversibles de l'espace $\mathbb{R}^3$ constituent un groupe qu'on appelle le __groupe linéaire__ $GL_3(\mathbb{R})$.

(3) les affinités inversibles du plan $\mathbb{R}^2$ constituent un groupe qu'on appelle le __groupe affin__ $GA_2(\mathbb{R})$.

(4) les affinités inversibles de l'espace $\mathbb{R}^3$ constituent un groupe qu'on appelle le __groupe affin__ $GA_3(\mathbb{R})$.

__Démonstration__

Dans chacune des situations (1) à (4), nous disposons d'un ensemble de points E et d'une famille de transformations, mettons $\mathcal{T}$, dans E.

Si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ nous avons vu que $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{T}$.

L'identité $1_E \in \mathcal{T}$ (pourquoi ?).

Soit $G(\mathcal{T})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{T}$. Alors $G(\mathcal{T})$ est un groupe. En effet:

1) si $T_1 \in G(\mathcal{T})$ et $T_2 \in G(\mathcal{T})$, on voit que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$ car

$$(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) \circ (T_2 \circ T_1) = 1_E \quad \text{et} \quad (T_2 \circ T_1) \circ (T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) = 1_E$$

Donc $T_2 \circ T_1 \in G(\mathcal{T})$.

2) L'associativité est immédiate (elle est toujours vérifiée par la composition).

3) $1_E \in G(\mathcal{T})$ car $1_E^{-1} = 1_E$

4) si $T \in G(\mathcal{T})$, alors $T^{-1} \in G(\mathcal{T})$ car $(T^{-1})^{-1} = T$ donc T^{-1} est inversible.

De nouvelles questions se posent: étant donnée la transformations linéaire T

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (9) \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

comment s'assurer si elle est inversible et comment déterminer les équations de T^{-1} ?

Souvenons-nous de la définition de T^{-1} :

$$T^{-1}(x',y') = (x,y) \Leftrightarrow T(x,y) = (x',y')$$

En (9), il suffit donc de calculer x et y en fonction de x' et de y' (si c'est possible). Pour ce faire, nous devons résoudre un système linéaire:

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx + bdy = dx' \\ bcx + bdy = by' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (ad - bc)x = dx' - by' \qquad (10)$$

et si $ad - bc \neq 0$, on a $x = \dfrac{d}{ad-bc}.x' - \dfrac{b}{ad-bc}.y'$

et de même $\quad y = \dfrac{-c}{ad-bc}.x' + \dfrac{a}{ad-bc}.y'$

Nous voyons que si $ad - bc \neq 0$, T est inversible car

$$a(\frac{d}{ad - bc}.x' - \frac{b}{ad - bc}.y') + b(\frac{-c}{ad - bc}.x' + \frac{a}{ad - bc}.y') = \frac{ad - bc}{ad - bc}.x' = x'$$

et de même

$$c(\frac{d}{ad - bc}.x' - \frac{b}{ad - bc}.y') + d(\frac{-c}{ad - bc}.x' + \frac{a}{ad -bc}.y') = y'$$

En revanche, si $ad - bc = 0$, on voit en (10) que

$$0 = dx' - by'$$

donc T ne peut pas être inversible puisque pour tout point p, T(p) est sur la droite d'équation

$$dx - by = 0$$

En conclusion, on a le

<u>Théorème</u> (1) La transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \text{ où}$$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

(2) L'affinité de $\mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \text{ où}$$

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \qquad a,b,c,d,p,q \in \mathbb{R}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

La preuve de (2) est en tout point analogue à celle de (1).

Une démarche analogue pour $\mathbb{R}^3$ est possible. L'expression qui remplace $ad - bc$ est alors nettement plus compliquée. Nous y reviendrons.

Exemple 5 Similitudes du plan et de l'espace

Toute rotation, isométrie ou similitude du plan ou de l'espace est une composée de symétries orthogonales fixant l'origine, d'homothéties fixant l'origine et de translations. Dès lors, nous pouvons affirmer grâce aux exemples 1,2,3 que

(1) Toute similitude de centre o de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$).

(2) Toute similitude du plan $\mathbb{R}^2$ (ou de l'espace $\mathbb{R}^3$) est une affinité du plan $\mathbb{R}^2$ (ou de l'espace $\mathbb{R}^3$).

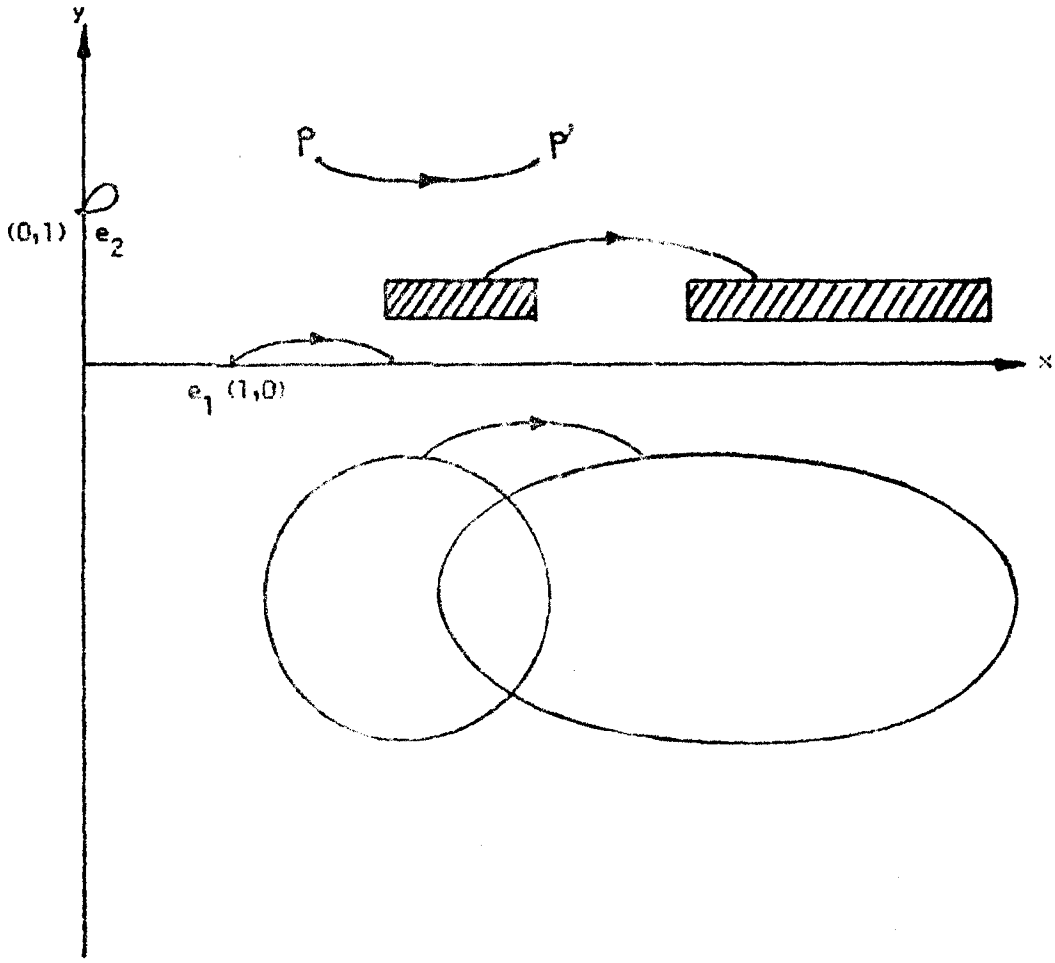
(3) Le groupe des similitudes est un sous-groupe du groupe affin.

Et la réciproque ? Non! Il existe des affinités qui ne sont pas des similitudes. En voici un exemple.

Exemple 6 Etirement fixant l'axe des y

$$(x,y) \to (x',y') \quad \text{où} \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$$

Cette transformation n'est certainement pas une similitude. En effet, elle ne conserve pas le rapport des distances puisque oe_1 et oe_2 de longueur 1 sont transformés en $2oe_1$ et oe_2 de longueurs 2 et 1. Elle offre un des moyens les plus simples pour construire une ellipse à partir d'un cercle.



<u>Exemple 7</u> Il existe des transformations non linéaires que nous n'étudierons guère, comme

$$\begin{cases} x' = \sin xy \\ y' = 2^x \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{-x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

==

EXERCICES

4. Ecrivez les équations des transformations suivantes dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

a) $\mathbb{R}^2$; symétrie d'axe oe_1

b) $\mathbb{R}^3$; symétrie fixant o, e_1, e_2

c) $\mathbb{R}^2$; symétrie d'axe $y = 2x$

d) $\mathbb{R}^2$; symétrie d'axe $y = 2x + 3$

e) $\mathbb{R}^2$; symétrie d'axe $x = -7$

f) $\mathbb{R}^2$; symétrie de centre o

g) $\mathbb{R}^3$; symétrie de centre o

h) $\mathbb{R}^2$; rotation de centre o, appliquant e_1 sur e_2

i) $\mathbb{R}^3$; rotation d'axe oe_3, appliquant e_1 sur e_2

j) $\mathbb{R}^2$; symétrie de centre (p,q)

k) $\mathbb{R}^2$; homothétie de centre (p,q) et de rapport r

l) $\mathbb{R}^3$; symétrie orthogonale d'axe orthogonal au vecteur $a=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ passant par o

m) $\mathbb{R}^2$; rotation de centre o qui transforme e_1 en $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

n) $\mathbb{R}^2$; rotation de centre (p,q) d'angle 60°

5. $\mathbb{R}^2$, trouvez les points fixes des affinités suivantes (par résolution d'un système d'équations):

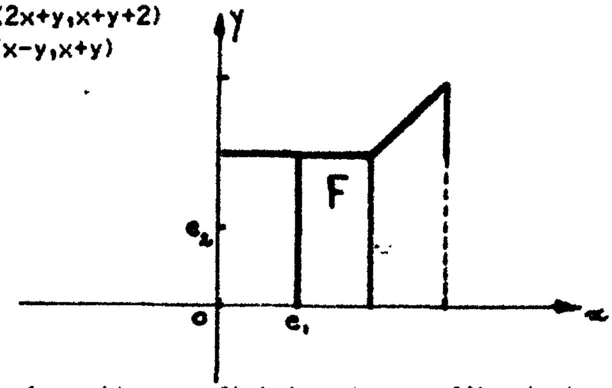
a) $(x,y) \to (2x-y, -7x+2y-5)$
b) $(x,y) \to (x+1, x-y+9)$
c) $(x,y) \to (x,-y+3)$
d) $(x,y,z) \to (x+y-z, 2x+z, 3z-5)$ $(\mathbb{R}^3)$

6. Prouvez que l'affinité de $\mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (ax+by+p, cx+dy+q)$ $\qquad a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$
est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$.

7. Voici une transformation linéaire ou une affinité t et un dessin de figure F dans .
Déterminez et dessinez t(F) et $t^{-1}(F)$ par un calcul de points.

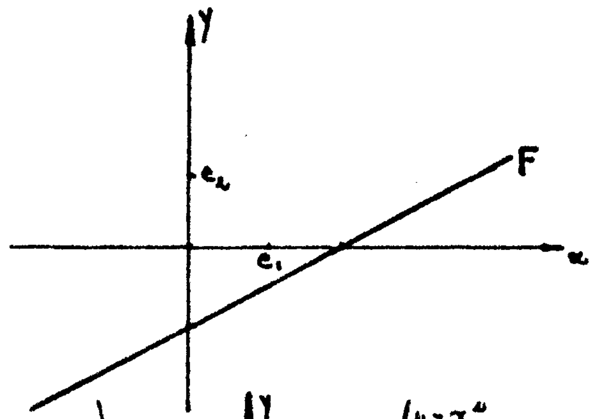
a) $(x,y) \rightarrow (2x+y, x+y+2)$

b) $(x,y) \rightarrow (x-y, x+y)$

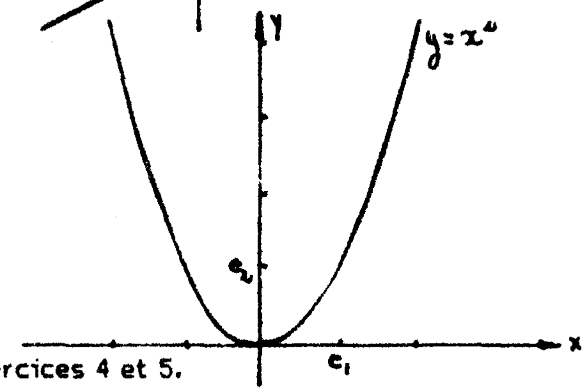


8. Voici une transformation non linéaire et non affine t et un dessin de figure F dans $\mathbb{R}^2$. Déterminez et dessinez t(F) et t^{-1}(F) par un calcul de points.

a) $(x,y) \longrightarrow \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$



b) $(x,y) \rightarrow (x-y, x^2+y)$



9. Elaborez un programme facilitant les exercices 4 et 5.

==

<u>**MATRICES**</u>

Examinons une transformation linéaire de

L_1 : $(x,y) \rightarrow (x',y')$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Moyennant des conventions évidentes, L_1 est déterminée par le tableau de nombres

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

qu'on appelle <u>matrice 2x2</u>. On dit que cette matrice possède <u>deux lignes</u> qui sont les vecteurs (a,b) et (c,d) et qu'elle possède <u>deux colonnes</u> qui sont les vecteurs (a,c) et (b,d). on parle ainsi de la première ou deuxième ligne, de la première ou deuxième colonne. Les réels a,b,c,d sont appelés <u>coefficients</u> de la matrice.

La matrice fournit un moyen rapide et précis de représenter L_1. Pour l'introduire dans un ordinateur, on la traite comme un vecteur (a,b,c,d) en donnant des indications qui permettent de briser celui-ci en deux lignes..

Si on donne une deuxième transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$, soit

$$L_2 : (x,y) \longrightarrow (x',y')$$

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases} \qquad A,B,C,D \in \mathbb{R}$$

ou

$$L_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

la composée

$$L = L_2 \circ L_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

livre ce qu'on appelle <u>un produit matriciel</u> et celui-ci s'écrit sans le symbole $\circ$, parce qu'aucune confusion n'est possible.

Nous avons vu plus haut que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa+Bc & Ab+Bd \\ Ca+Dc & Cb+Dd \end{pmatrix}$$

Quel est ce mécanisme ?

Chaque coefficient du produit apparaît comme un produit scalaire, le produit scalaire d'une ligne de la première matrice et d'une colonne de la deuxième matrice. Le coefficient du produit situé dans la ligne i (i=1 ou 2) et dans la colonne j (j=1 ou 2) est le produit scalaire de la i^e ligne de la première matrice et de la j^e colonne de la deuxième matrice.

Le produit matriciel peut paraître un peu bizarre mais on voit bien son origine géométrique (la composition) et son mécanisme se mémorise rapidement.

==

EXERCICES

10. En s'inspirant du produit des matrices 2x2, on devine comment s'effectue le produit d'une matrice 3x2 et d'une matrice 2x2, d'une matrice 3x3 et d'une matrice 3x2, etc....
Calculez les produits matriciels suivants ou indiquez qu'ils n'ont pas de sens.

a) $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1{,}1 & 9 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 46 & 5 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} =$

11. A-t-on

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ? \qquad a,b,c,d,A,B,C,D \in \mathbb{R}$$

12. Voici une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

a) L'image du vecteur de base $e_1 = (1,0)$ est ....
b) L'image du vecteur de base $e_2 = (0,1)$ est ....
c) Généralisez pour $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$,...

13. Etant donnée la matrice A, trouvez les matrices B telles que $AB = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Soit t une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $t(1,0) = (2,3)$ et $t(0,1) = (5,4)$. Que vaut $t(4,3)$ et $t(5,4)$?

15. Soit T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$T(x_1,x_2,x_3) = (-x_1+2x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2+x_3,\ -3x_1-6x_2-6x_3)$$

Ecrivez la matrice de T.

16. Soit t une transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ telle que $t(2,1) = (3,-1)$ et $t(1,3) = (-1,2)$. Ecrire la matrice de t.

==

RESUME

$\boxed{t : \text{transformation linéaire de } \mathbb{R}^2 :}$

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$\boxed{t : \text{transformation linéaire de } \mathbb{R}^3 :}$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x',y',z') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = dx + ey + fz \\ z' = gx + hy + iz \end{cases} \qquad a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R}$$

$\boxed{t : \text{affinité de } \mathbb{R}^2 :}$

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \qquad a,b,c,d,p,q \in \mathbb{R}$$

$\boxed{t : \text{affinité de } \mathbb{R}^3 :}$

$$(x,y,z) \longrightarrow (x',y',z') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = ax + by + cz + p \\ y' = dx + ey + fz + q \\ z' = gx + hy + iz + r \end{cases} \qquad a,b,c,d,e,f,g,h,i,p,q,r \in \mathbb{R}$$

<u>Cas particuliers :</u>

<u>translation de vecteur (p,q) dans $\mathbb{R}^2$:</u>

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \qquad p,q \in \mathbb{R}$$

<u>translation de vecteur (p,q,r) dans $\mathbb{R}^3$:</u>

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \\ z' = z + r \end{cases} \qquad p,q,r \in \mathbb{R}$$

<u>homothétie de centre o et de rapport r dans $\mathbb{R}^2$:</u>

$$\begin{cases} x' = r.x \\ y' = r.y \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}$$

<u>homothétie de centre o et de rapport r dans $\mathbb{R}^3$:</u>

$$\begin{cases} x' = r.x \\ y' = r.y \\ z' = r.z \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}$$

symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ (axes orthonormés):

$$\begin{cases} x' = -\cos 2\alpha \, .x - \sin 2\alpha \, .y \\ y' = -\sin 2\alpha \, .x + \cos 2\alpha \, .y \end{cases}$$

Théorèmes :

(1) la transformation linéaire (affinité) de $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \to (x',y')$ où

$$\begin{cases} x' = ax + by \ (+p) \\ y' = cx + dy \ (+q) \end{cases} \quad a,b,c,d,(p,q) \in \mathbb{R}$$

est inversible ssi $ad-bc \neq 0$.

(2) les transformations linéaires (affinités) inversibles de $\mathbb{R}^2$ constituent un groupe.

Matrice d'une transformation linéaire :

$$t: (x,y) \to (x',y') \text{ où } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

livre

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

produit matriciel de deux matrices 2x2 :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa+Bc & Ab+Bd \\ Ca+Dc & Cb+Dd \end{pmatrix} \quad A,B,C,D,a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

==

Isaac Newton

(1643 - 1727)