3. FONCTIONS ET GRAPHIQUES

3 h/sem, 5 h/sem, 7 h/sem

Rappels: VM3, chapitres 15 et 19; M4, chapitres 9 et 17; M5: fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses.

MACHINES A FONCTIONS

En cinquième, la notion de fonction doit être devenue familière. Depuis la première année au moins, on en a rencontré des exemples à l'occasion de divers problèmes tels que: grandeurs proportionnelles, aires et volumes, intérêts composés, etc... L'étude des nombres réels a fait naître une foule de fonctions telles que:

$x \to x^2 \qquad x \to \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad x \to x^3$

$x \to \sqrt{x} \qquad x \to ax+b \qquad x \to ax^n$

$x \to |x| \qquad x \to \cos x \qquad x \to \arcsin x$

$x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Les polynômes offrent le premier exemple d'une véritable machine à fonctions basée sur l'exploitation systématique de l'addition et de la multiplication. En effet, à partir des fonctions triviales que sont $x \to x$ et $x \to k$ où $k \in \mathbb{R}$, on fabrique par sommes et produits: $x \to x^2$, $x \to x^3, \dots, x \to x^n$, $x \to ax^n$,
$x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$.
En y adjoignant la division, on obtient l'ensemble des fonctions rationnelles

$$x \to \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots\dots + b_1 x + ab_m}$$

On a beau additionner, multiplier, soustraire et diviser celles-ci, on n'obtient pas de nouvelles fonctions. En fait, on a engendré le corps commutatif des fonctions rationnelles d'une variable réelle, un corps qu'on note $\mathbb{R}(x)$.

Le même mécanisme peut être appliqué à de nouvelles fonctions et opérations, pour créer par exemple

$x.\sin x \ , \ \frac{\cos(x^3 - x)}{\sin^2 3x} \ , \ \arccos x + x^5$

$|x^4 - 2x^2 + 1| \ , \ 2^x \ , \ \sqrt{x^3 + 1} \ , \ \cos(\sin(x))$

$\left| 2^{\cos \frac{x+1}{x-1}} \right|$

Essayons de pousser un peu plus loin notre compréhension des mécanismes de création de fonctions.

Un de ces mécanismes est constitué d'**opérations**. Quand on dispose d'un ensemble F de fonctions, définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut soumettre des éléments f, g de F à diverses opérations. Voici les principales.

L'**addition** livre la fonction somme $\boxed{f+g}$ qui est définie par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (1)$$

Exemple: la somme de "élever au carré" et de "prendre le cosinus" applique x sur $x^2 + \cos x$. Sur des exemples comme celui-ci, on écrit rarement $f+g$; on se bornera à écrire $f(x)+g(x)$, précisement parce qu'on dispose de (1). Dans la théorie et dans la compréhension des fonctions, il est par contre indispensable de bien saisir la nature de $f+g$.

Le caractère apparemment anodin de (1) cache tout de même un piège dont il faudra se souvenir dans toute étude de fonction. Il s'agit du domaine de définition de $f+g$. Celui-ci est constitué par tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ et $g(x)$ sont définis. Donc le domaine $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.

La **soustraction** livre la fonction différence $\boxed{f-g}$ définie par

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad (2)$$

Exemple : $x \to x^2 + \cos x$. Ceci n'est pas une erreur. Il faut lire que $g(x) = -\cos x$ et $-(-\cos x) = +\cos x$. Le but de cette petite plaisanterie est de rappeler que toute différence de réels est aussi une somme de réels: $a-b = a+(-b)$.
On a $\mathrm{Dom}\,(f-g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.

La **multiplication** livre la fonction produit $\boxed{fg}$ définie par

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad (3)$$

Exemple : si $f(x) = x^3$ et $g(x) = \cos x$, alors $(fg)(x) = x^3.\cos x$. En combinant (2) et (3), on obtient encore $x^3.\cos x - x^5$, etc, etc.
On a donc $\mathrm{Dom}\,(fg) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$.

La **division** livre la fonction quotient $\boxed{\frac{f}{g}}$ définie par

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (4)$$

Exemple : si $f(x) = 1$ et $g(x) = x$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$; on obtient de même $\frac{\sin x}{x}$, $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, etc...

Rappelons que toute division se ramène à une multiplication car $\frac{a}{b} = a.b^{-1}$

En examinant l'opération de division, il faut surtout retenir que $\frac{a}{b}$ n'est pas défini pour $b=0$, alors que $a+b$, $a-b$, ab sont définis quels que soient les réels a et b. Dès lors $f+g$ est défini en x dès que $f(x)$ et $g(x)$ sont définis. Par contre $\frac{f}{g}$ est défini en x si et seulement si $f(x)$, $g(x)$ sont définis et $g(x) \neq 0$. On a donc

$$\mathrm{Dom}\, \frac{f}{g} = \mathrm{Dom}\, f \cap \{ x \in \mathrm{Dom}\, g \mid g(x) \neq 0 \}$$

La **composition** livre la fonction composée $\boxed{f\circ g}$ définie par

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (5)$$

Attention à ne pas confondre $f\circ g$ et fg.

Exemple : si $f(x) = \cos x$ et si $g(x) = x^3$, alors $(f\circ g)(x) = \cos x^3$, $(g\circ f)(x) = \cos^3 x$ et $(fg)(x) = x^3.\cos x$.
Il ne faut pas chercher à décrire le domaine de définition de $f\circ g$ par une opération ensembliste d'intersection sur les domaines de f et de g. Dom $(f\circ g)$ est l'ensemble des x tels que $f(g(x))$ est défini. C'est donc une partie de Dom g.

La composition donne lieu à la notion de **réciproque**. Si f est une fonction **bijective** de Dom f vers Im f, alors la **fonction réciproque** f^{-1} est définie par

$$f^{-1}(x) = y \text{ si et seulement si } x = f(y)$$

(ou encore $f^{-1}\circ f = 1_{\mathbb{R}}$, $f\circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$)

En pratique, la condition "f est bijective" est souvent ramenée à une condition qui implique la précédente comme "f est strictement croissante" ou "f est strictement décroissante".
C'est ainsi que nous avons obtenu les fonctions :

f	f^{-1}
$x \to x^2$, $x \geq 0$	$x \to \sqrt{x}$
$x \to x^3$	$x \to \sqrt[3]{x}$
$x \to \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x \to \text{arc sin } x$
$x \to \cos x$, $x \in [0, \pi]$	$x \to \text{arc cos } x$
$x \to \text{tg } x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x \to \text{arc tg } x$

Citons encore l'**exponentiation** qui livre f^g définie par

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$$

Exemple : x^x, $(\sin x)^{\cos x}$, etc...

Enfin, des fonctions nouvellement acquises peuvent donner lieu à de nouvelles opérations.
Exemple: ayant acquis $\sqrt{x}$, toute fonction f donne lieu à l'opération $\sqrt{f}$ qu'on peut voir aussi comme une composée de deux fonctions: $\sqrt{}$ et f . On voit par là, qu'une opération dissimule souvent une fonction (somme et produit sont des fonctions de deux variables). Il ne suffit pas de disposer d'opérations pour que la machine à fonction puisse fonctionner.

Il faut aussi de la matière première, un stock de fonctions sur lesquelles les opérations peuvent s'exercer.

Dans l'enseignement secondaire, un petit nombre de fonctions permettent d'engendrer toutes celles dont on aura l'usage, à de très rares exceptions près. On a déjà rappelé que les modestes fonctions $x \to x$ et $x \to k$ (constante réelle) livrent à elles seules, toutes les fonctions rationnelles. Si on utilise, en outre, l'exponentiation, on obtient encore :

$$x^x\,,\ 3^x\,,\ \left(\frac{x^7-1}{5x}\right)^{2x-6}\,,\ x^{2x+59\frac{x}{x+2}}\,,\ \text{etc...}$$

La fonction $x \to x$ est donc très précieuse, de même que $x \to k$, $k \in \mathbb{R}$.

D'autres fonctions principales (cette terminologie n'est pas classique):

$x \to |x|$

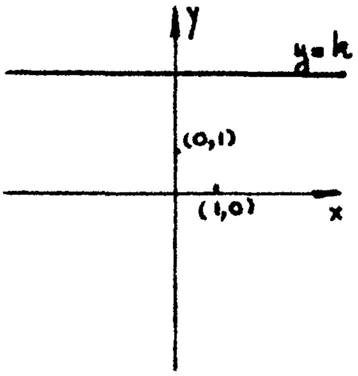
$x \to \sin x$

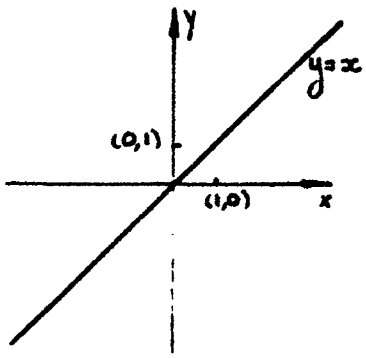
$x \to E(x)$ ($E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier plus petit ou égal à x).

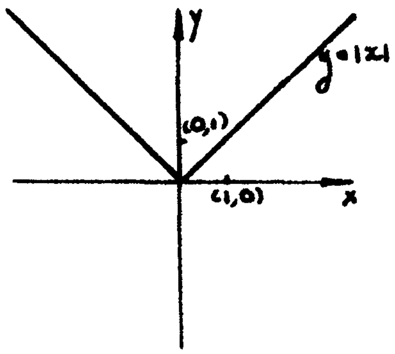
Nous n'avons pas mentionné $x \to \cos x$ parce que $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ peut s'obtenir à partir des fonctions principales citées. Les fonctions élémentaires sont les fonctions qu'on peut obtenir à partir des fonctions principales (5 types cités) et des opérations d'addition, multiplication, composition, réciprocation, exponentiation discutées plus haut.

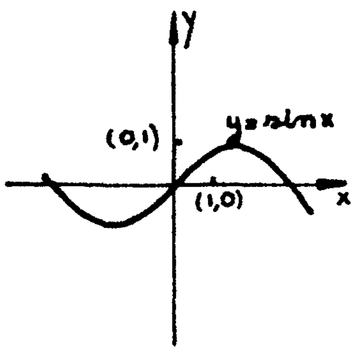
Il existe évidemment d'autres fonctions, comme la fonction qui associe la valeur 1 à tout $x \in \mathbb{Q}$ et la valeur -1 à tout $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Le développement de l'étude des fonctions élémentaires conduit à des fonctions non-élémentaires mais ceci se situe aux frontières de la matière étudiée dans le secondaire.

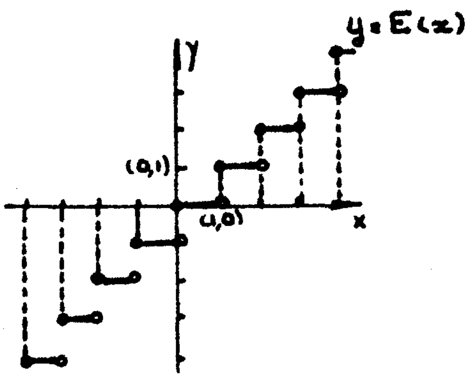
Il importe de connaître de mémoire, l'allure des graphiques des 5 types de fonctions principales.











Une remarque mérite d'être faite à nouveau (voir VM3, VM4). A côté des fonctions d'une variable qui nous occupent de manière prioritaire, il y a des fonctions de deux, trois,... variables comme

$(u,v) \longrightarrow u^2 + v^2$
$(u,v) \longrightarrow u^v$
$(x,y,z) \longrightarrow x^2 + y^2 - 3z^2 + \dfrac{x^y}{z-6}$
$(x,y) \longrightarrow \cos(x+y)$

Enfin, deux observations devraient nous permettrent de mieux comprendre et intégrer la matière présentée ici. D'une part, nous avons insisté sur l'idée d'<u>engendrer</u> un ensemble de fonctions (les fonctions élémentaires) au moyen des 5 fonctions principales (ou génératrices). L'idée d'engendrement se retrouve dans les espaces vectoriels (combinaison linéaire), les groupes (produits d'éléments donnés), la géométrie (plan par trois points non alignés) et dans une foule d'autres sujets que nous n'avons pas encore abordés. C'est une des idées les plus puissantes de la mathématique.

D'autre part, nous prenons conscience de l'immensité de l'univers des fonctions. Il importe d'y mettre de l'ordre, de développer des outils s'appliquant à toutes les fonctions élémentaires, de se dégager de l'habitude qui consiste à n'étudier qu'une seule fonction à la fois. La mathématique s'efforce à la généralité.

==

EXERCICES

1. Pour bien contrôler les principales opérations sur les fonctions, voici des fonctions h,g,f

$h(t) = 4.t^2 - 1 \qquad g(t) = 3.\sin(5t - 6) \qquad f(t) = 4^{t^3}$

(Rappel: $4^{t^3} = 4^{(t^3)}$ d'après les conventions de l'exponentiation).
Calculez F(t) dans les cas suivants :

a) $F = f+g-3h$ e) $F = f\circ g$

b) $F = gf$ f) $F = h^g$

c) $F = fg$ g) $F = g^h$

d) $F = g\circ f$ h) $F = f\circ(h\circ g)$

2. Pour s'habituer à une fonction principale peu familière, dessinez un graphique des fonctions suivantes:

a) $x \longrightarrow E(x)$ g) $x \longrightarrow E(x^2)$

b) $x \longrightarrow x - E(x)$ h) $x \longrightarrow \sqrt{(E(x))^2}$

c) $x \longrightarrow E(\sin x) = (E\circ\sin)(x)$ i) $x \longrightarrow E(x-a) \quad a \in \mathbb{R}$

d) $x \longrightarrow |E(x)|$ j) $x \longrightarrow E(x) - a$

e) $x \longrightarrow E|x|$

f) $x \longrightarrow (E(x))^2$

k) $x \longrightarrow E(ax)$

l) $x \longrightarrow aE(x)$

m) $x \longrightarrow E(ax + b)$

3. **Un peu d'analyse chimique ! Nous préparons ici l'algorithmique ainsi que le calcul de dérivées et de primitives.**

Voici des fonctions plutôt compliquées. Décomposez-les en fonctions principales au moyen d'opérations judicieusement choisies.

Exemple: $F(x) = x^3 + \frac{E(x-5)}{\operatorname{tg} x}$

Posons $f_1: x \to x$, $f_2: x \to E(x)$, $f_3: x \to \sin x$, $f_4: x \to 5$, $f_5: x \to \pi/2$. Alors

$$E(x-5) = (f_2 \circ (f_1 - f_4))(x)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{f_3}{f_3 \circ (f_1 - f_5)} \right)(x)$$

$$x^3 = f_1 f_1 f_1 = f_1^{\,3} \quad \text{et}$$

$$F = f_1^{\,3} + (f_2 \circ (f_1 - f_4))\left(\frac{f_3 \circ (f_1 - f_5)}{f_3}\right)$$

La décomposition n'est pas forcément unique.

a) $x^2 + |x-5|$

b) x^x

c) $\frac{x^x}{x} - x$

d) $3^{2\sin x}$

e) $\sin(3x)$

f) $\sin(x+9)$

g) $a.\sin(bx+c)$

h) $x - E(x\sin x)$

4. Coup d'oeil sur les fonctions de deux variables:
représentez graphiquement (modèle, dessin en perspective ou courbe de niveau)

a) $(u,v) \longrightarrow u.v$

b) $(u,v) \longrightarrow u+v$

c) $(u,v) \longrightarrow E(u+v)$

d) $(x,y) \longrightarrow \sin(x-y)$

e) $(u,v) \longrightarrow u^2+v^2$

==

PAS DE PANIQUE !

On vient de voir que le monde des fonctions dès à présent accessible à notre travail est immense et sauvage. Il n'est pas question de collectionner des fonctions ou d'en dresser des listes complètes.

Nous pouvons en revanche, apprendre à connaître à fond les principales fonctions et leurs combinaisons les plus simples, celles qu'on retrouve le plus souvent dans les problèmes et les applications.

Nous pouvons aussi apprendre des méthodes d'étude de fonctions nouvelles qui permettent de faire face à des situations encore inexplorées. De telles méthodes existent.

Les combinaisons simples des fonctions principales seront traitées dans les exemples et les exercices.

Abordons les méthodes. Celles-ci sont évidemment destinées à répondre à des questions. Voici une des principales.

Quelle est l'allure du graphique de la fonction ? C'est une question qui doit demeurer un peu vague: comment définir l'allure si ce n'est par des synonymes tout aussi vagues comme la forme, le comportement.

L'expression "du graphique" est un peu dangereuse: en fait, le graphique dépend de la fonction et du repère choisi. Mais quand il s'agit d'allure, on voit par l'expérience que le choix du repère n'a pas une importance primordiale. Il n'empêche qu'une exploitation habile du changement de repère est souvent réalisée à des fins commerciales ou politiques afin de faire apparaître une progression de manière plus spectaculaire ou un déclin de manière plus bénigne. Nous verrons comment.

Bref, il serait préférable de parler d'un graphique de la fonction. Lorsque nous parlons du graphique, nous sous-entendons que le repère est orthonormé.

Il peut arriver que l'on soit impuissant à dire de prime abord quoique ce soit au sujet de l'allure du graphique. C'est le cas lorsque la fonction est très compliquée, comme par exemple $3^x-\sin(E(\frac{x}{3x+5}))$. Comme toujours, il est possible que de nouvelles questions aident à construire le graphique. Voici quelques unes de ces questions:

- quel est le domaine de définition de la fonction f ?
- sur quels intervalles f est-elle croissante ou décroissante?
- quels sont les points remarquables du graphique : des points d'intersection avec les axes, des maxima, des minima, des points d'intersection avec l'une ou l'autre courbe auxiliaire, etc...?
- quelles sont les symétries du graphique? A-t-on pour tout x appartenant au domaine de f $f(-x)=-f(x)$ (l'origine est centre de symétrie), $f(-x)= f(x)$ (l'axe des y est un axe de symétrie), $f(x+a)= f(x)$ pour tout x et un certain réel a (f est dite périodique de période a et la translation $x \to x+a$ conserve le graphique)?

Enfin, il arrive souvent que le graphique soit disponible à bon compte, dès le départ, grâce à une décomposition de la fonction en fonctions dont le graphique est déjà bien connu. Dans ce cas, c'est lui qui livre les réponses à la plupart des questions que nous venons de poser, mais pas forcément à toutes.

Une bonne règle de conduite est de considérer que le graphique d'une fonction en offre une vue globale à suivre tout au long de l'étude de la fonction.

Cette attitude s'oppose à la mauvaise habitude qui consiste à reléguer l'examen du graphique après l'étude de la fonction.

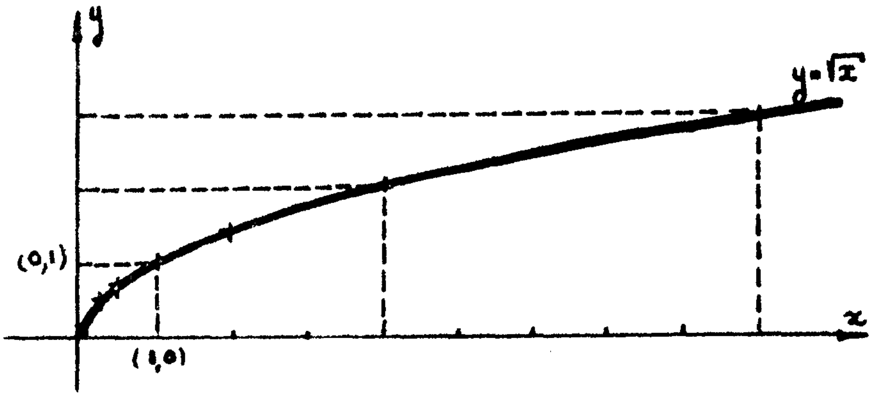
Venons-en à l'examen de quelques méthodes pour obtenir un graphique. D'autres viendront par la suite.

1)Méthode pour calculateur ... et par calculatrice

On donne à la variable x successivement des valeurs choisies avec plus ou moins de fantaisie, par exemple -5,-4,-3,-2,-1,0,1,5,7 et on calcule f(x) pour ces valeurs de x. On représente ensuite tous les points (x,f(x)) et on relie ou non ceux-ci par une courbe.

Exemple 1 étudiez $x \to \sqrt{x}$. On dresse le tableau

x	$\sqrt{x}$
-4	pas défini
0	0
1	1
2	1,4...
4	2
9	3
0,5	0,7...
0,25	0,5



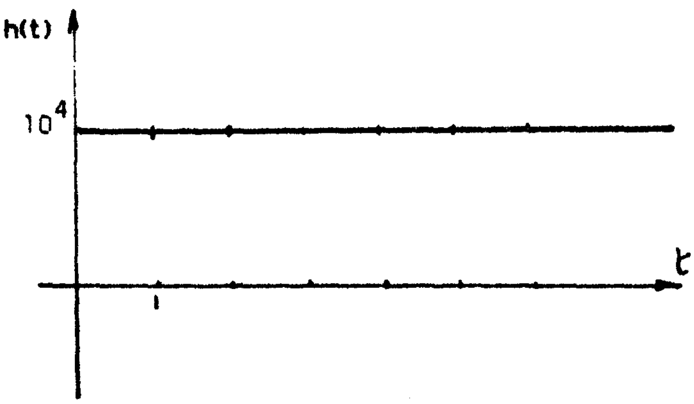
C'est ainsi qu'on obtient le graphique des fonctions les plus simples comme $x \to x^2$, $x \to 1/x$, $x \to \sqrt{x}$ ...

Avantages de la méthode : elle est facile à exécuter et facile à comprendre; elle se laisse facilement programmer en donnant des résultats très précis.
Désavantages de la méthode : elle est tellement facile que beaucoup d'élèves sont tentés de n'en jamais assimiler une autre, malgré les inconvénients qui suivent. La méthode exige le choix d'un intervalle dans lequel les valeurs choisies sont situées; rien ne dit que cet intervalle donnera une idée valable pour tout le domaine de définition de la fonction. Bref, on risque de passer à côté de l'essentiel comme nous allons le voir sur quelques exemples.

Exemple 2 Un mobile lancé à la verticale et à une altitude de 10.000 m avec une vitesse initiale de 5 m/s, se situe à une altitude h(t) à l'instant t. On voit en physique que

$$h(t) = -5.t^2 + 5.t + 10^4$$

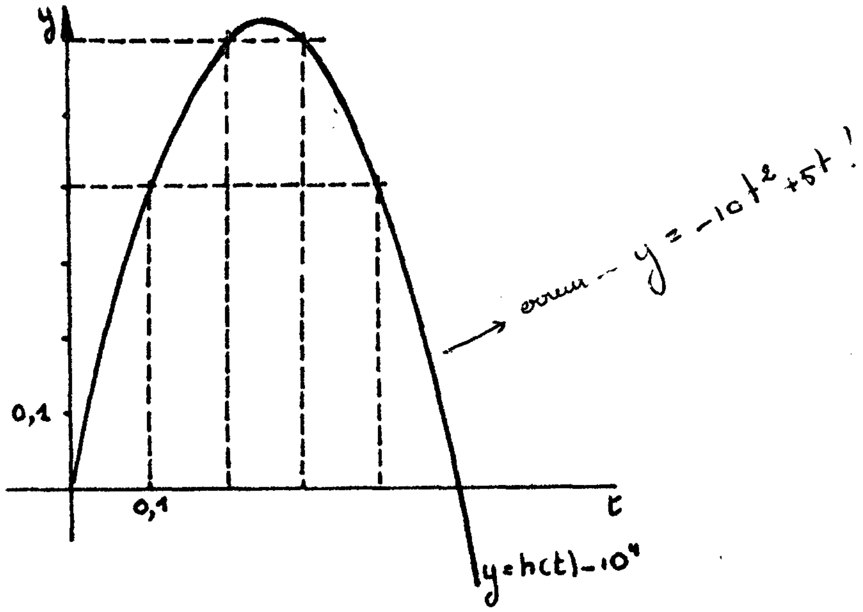
(l'accélération due à la pesanteur, ou constante g, a été arrondie à 10 m/s^2)
Si nous travaillons sans réfléchir, nous allons peut-être choisir des valeurs de t égales à 0,1,2,3,4,5,... Nous obtenons le graphique suivant:



et ce travail conduit de manière stupide, nous mène à une conclusion qui ne l'est pas moins: le mobile semble flotter à l'altitude de 10^4 m . Le graphique ressemble à une droite parce que l'unité est trop petite en ordonnée pour que nous puissions la distinguer. Mieux vaut représenter $-5t^2 + 5t$; on ajoutera 10^4 ensuite.

Cette fois le graphique semble échapper à tout contrôle. Il faut bien conclure que le choix de 0,1,2,3,4,5, n'est pas heureux: la maille est trop grande. En essayant une maille de 1/10 et les valeurs 0;0,1;0,2;0,3 on obtient un résultat bien meilleur. Ensuite on pourrait ajouter 10^4 partout.

t	$h(t)-10^4$
0	0
0,1	0,4
0,2	0,6
0,3	0,6
0,4	0,4
0,5	0
0,6	-0,6



Exemple 3 Soit $x(t) = -t^2 + 10^5.t$. En travaillant dans l'intervalle [0,5], même avec les précautions prises ci-dessus, on ne verra pas grand chose. L'allure du graphique est celle de la droite représentant $x = 10^5 t$ parceque le terme $-t^2$ est négligeable en regard de $10^5 t$ lorsque t est petit. La théorie du trinôme du second degré, vue en 4e, montre que des choses intéressantes se situent en $t = 10^5/2 = 5.10^4$ où se présente un maximum valant $-25.10^8 + 5.10^9 = 25.10^8$. On s'intéresse aussi aux points où x s'annule ce qui livre t=0 et $t = 10^5$. En procédant à une exploration à l'aveuglette, on n'a aucune chance de découvrir ces particularités.

En résumé, La méthode du tracé d'un graphique point par point ne peut suffire seule à nos besoins. Il s'agira d'en développer d'autres qui la complètent ou la remplacent.

==

EXERCICES

5. Construire point par point un graphique des fonctions suivantes, dans deux repères assez différents, de votre choix, à l'aide d'une calculatrice, dans l'intervalle indiqué et avec la maille donnée.

	fonction	intervalle	maille
a)	$\sqrt[3]{x}$	[-5 , 5]	0 , 4
b)	10^x	[-20, 20]	0 , 5
c)	cos 4x	[-2π , 3π]	π/20
d)	$\dfrac{5}{t-1}$	[-4 , 6]	0 , 25

6. Etudiez les courbes d'équations suivantes :

a) $ax + by + c = 0$

b) $y = ax^2 + bx + c$

c) $y = \cos x$, $y = \sin x$ (sur un même graphique)

d) $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (sur un même graphique)

e) $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}_0$

f) $y = \text{tg } x$, $y = \text{cotg } x$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a,b \in \mathbb{R}_0$

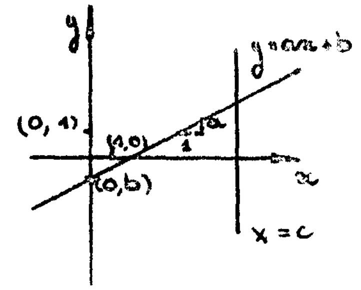
h) $xy = a$ $\quad a \in \mathbb{R}$

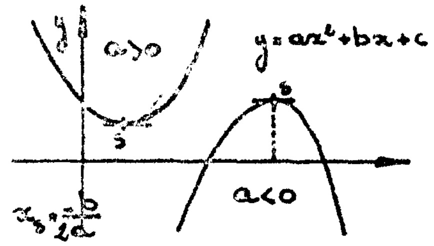
i) $y = a^x$ $\quad a \in \mathbb{R}^+$

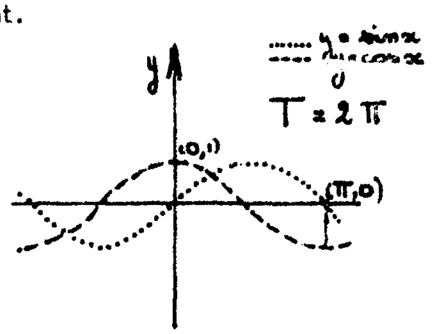
j) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad a,b \in \mathbb{R}_0$

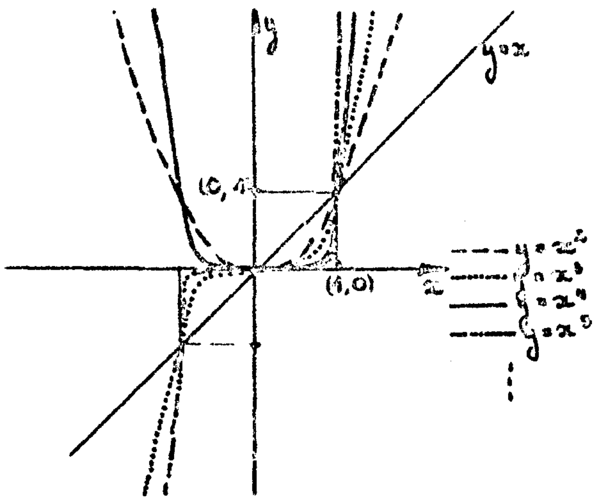
QUELQUES GRAPHIQUES A MEMORISER

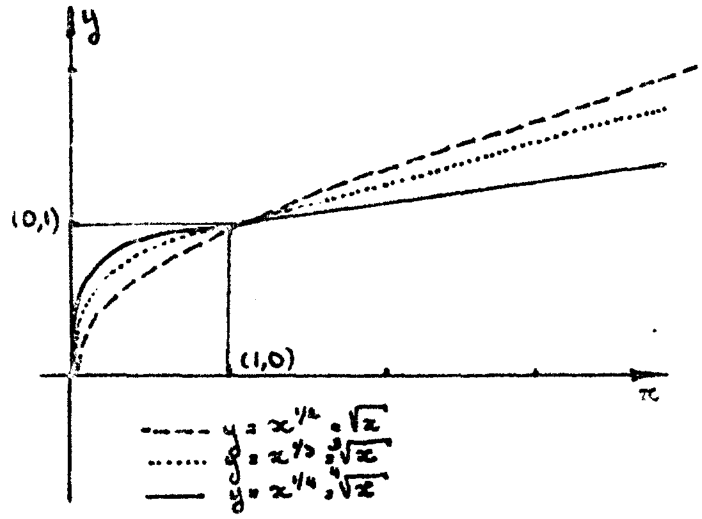
Les fonctions et les courbes qui apparaissent dans l'exercice 6 sont d'un emploi tellement fréquent, qu'il vaut la peine de les conserver en mémoire ou de pouvoir les retrouver rapidement dans un aide-mémoire ou par le raisonnement.

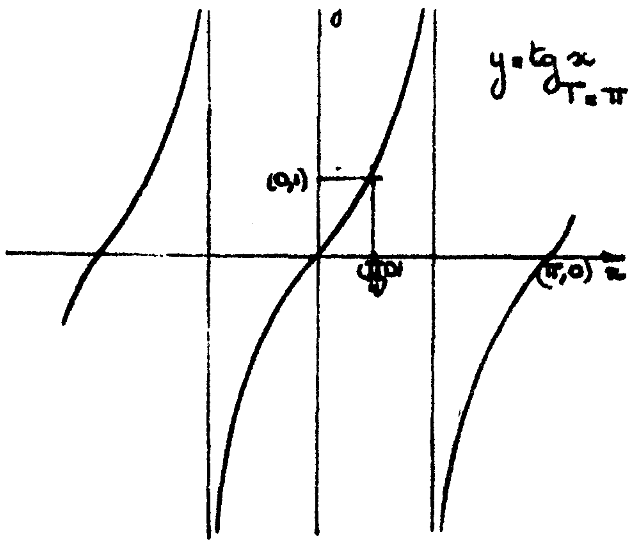


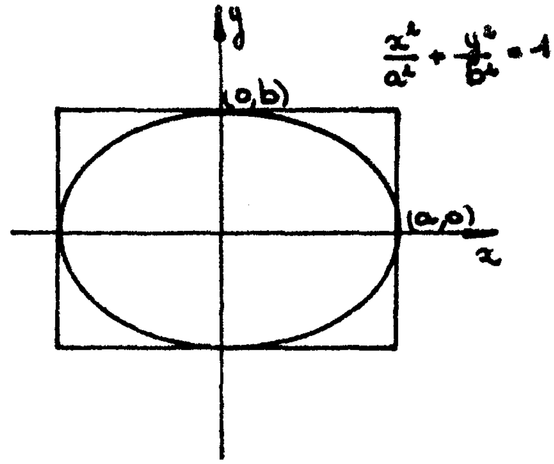


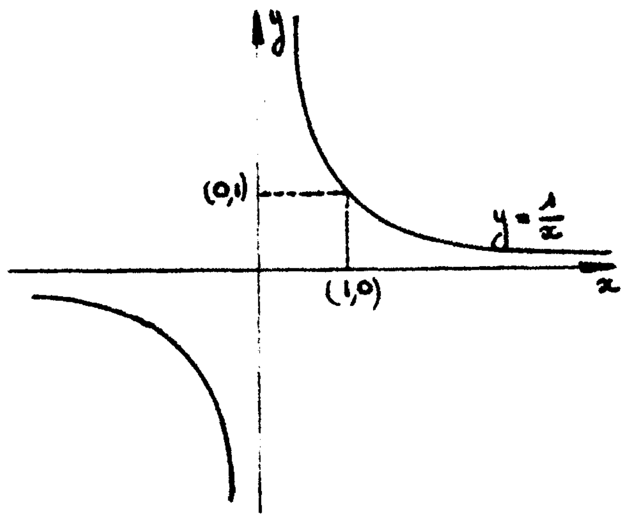


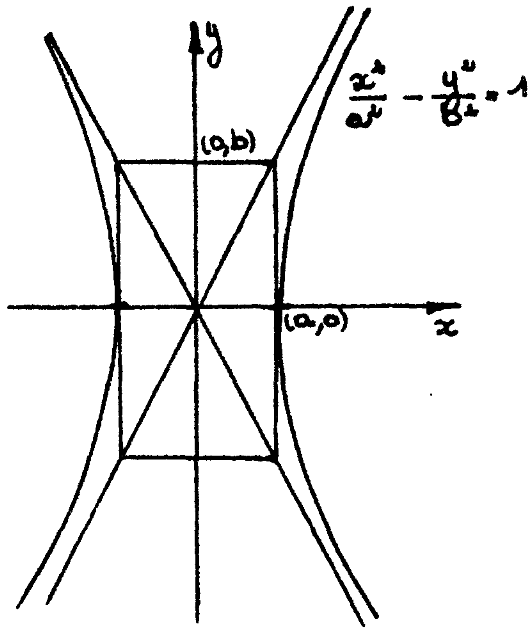


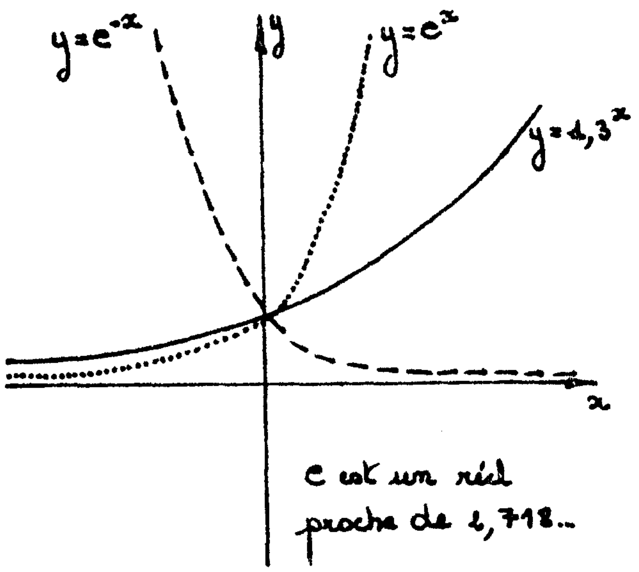


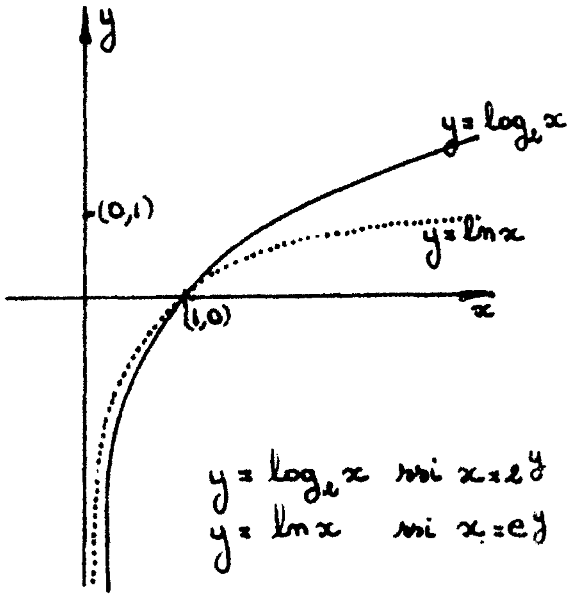

y = tg x
T = π
(0,1)
(π/4,0)
(π,0)
x


y
x²/a² + y²/b² = 1
(0,b)
(a,0)
x


y
(0,1)
y = 1/x
(1,0)
x


y
x²/a² − y²/b² = 1
(0,b)
(a,0)
x


y = e^-x
y
y = e^x
y = 1,3^x
x
e est un réel
proche de 2,718..

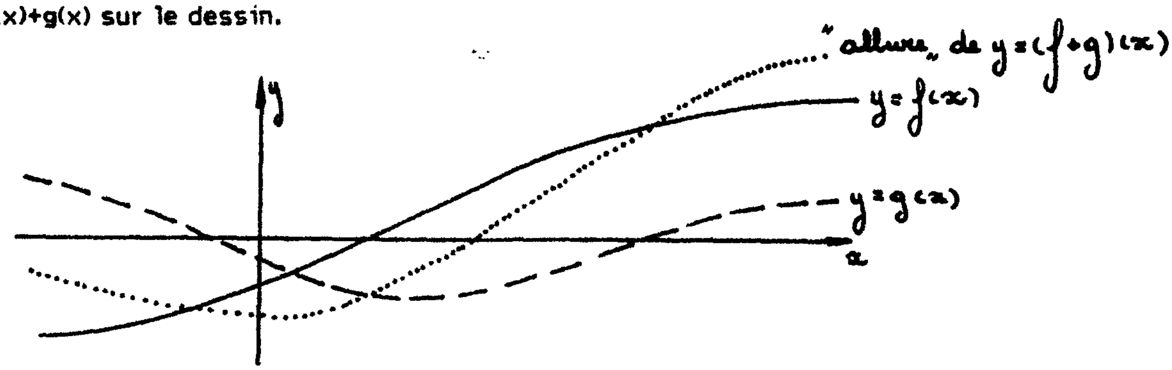

y
y = log_e x
(0,1)
y = ln x
(1,0)
x
y = log_e x ssi x = e^y
y = ln x ssi x = e^y

TECHNIQUES GRAPHIQUES ET OPERATIONS

Supposons que les graphiques de $x \longrightarrow f(x)$ et de $x \longrightarrow g(x)$ sont déjà connus, quelle que soit la méthode utilisée auparavant pour les obtenir. Comment en déduire le graphique de $x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$?

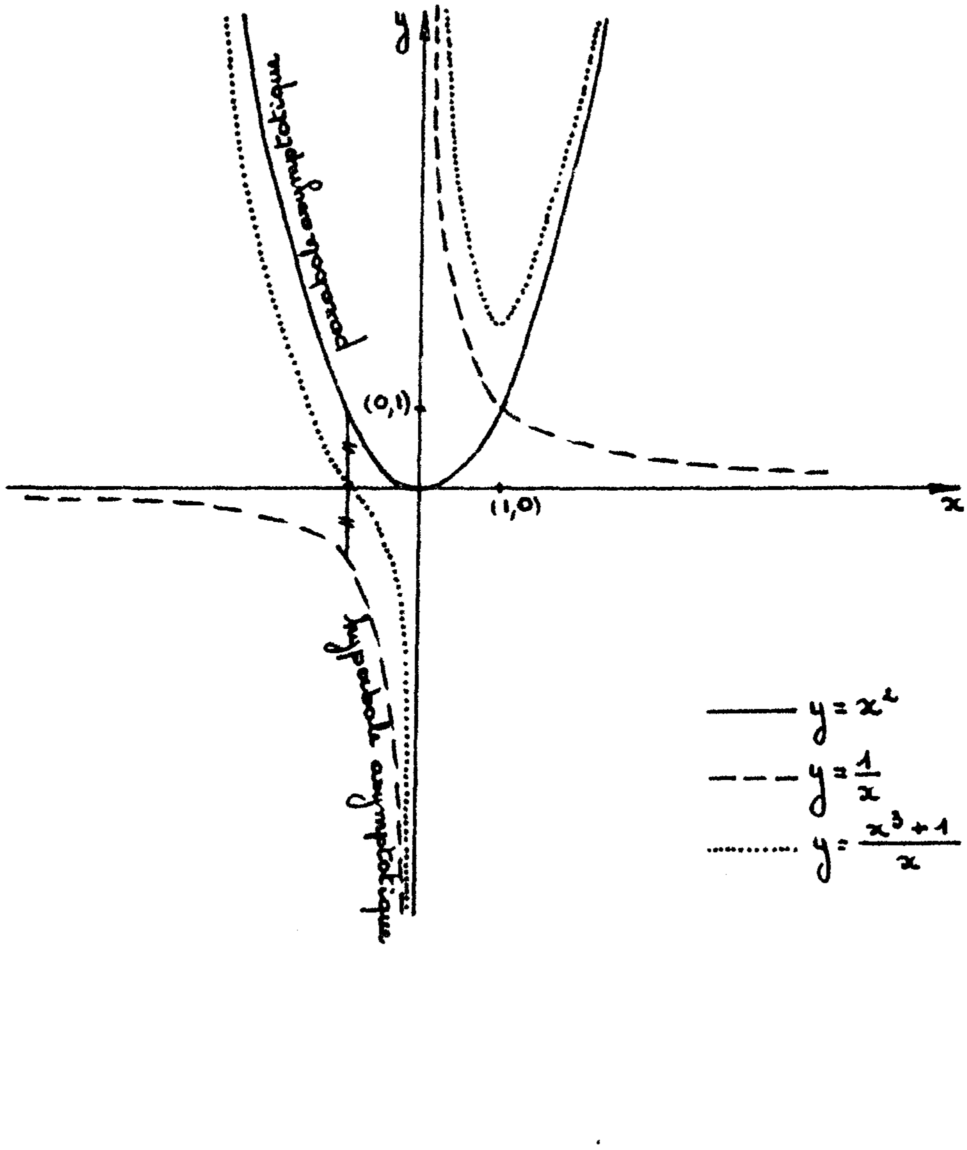
Tout simplement, en représentant f et g sur un même graphique et en effectuant l'addition f(x)+g(x) sur le dessin.

Exemple 4

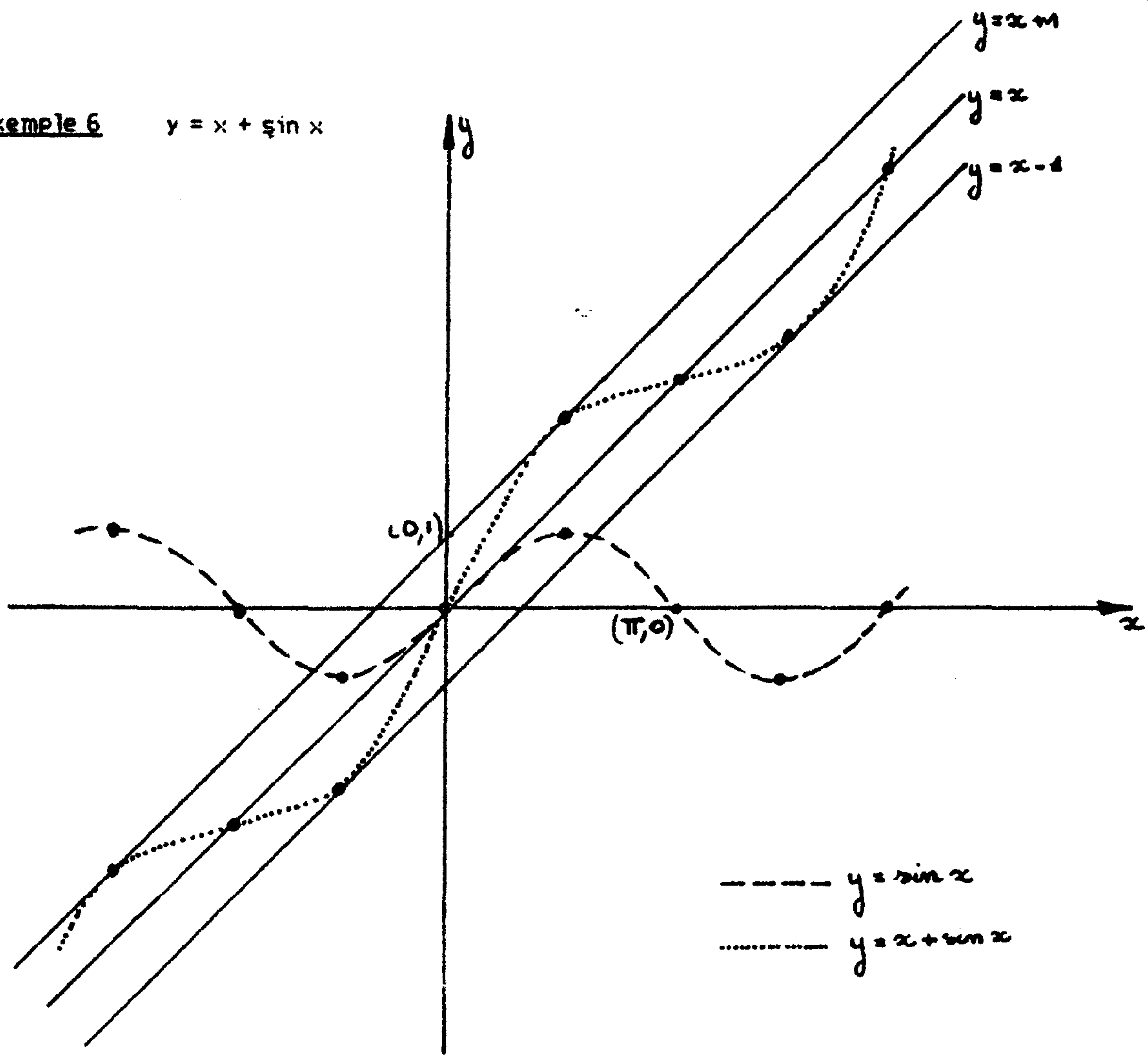


Exemple 5 $y = \frac{x^3+1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$

On décompose cette fonction en $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1/x$ puis on applique la méthode d'addition graphique. Voici le résultat:



Exemple 6 y = x + sin x

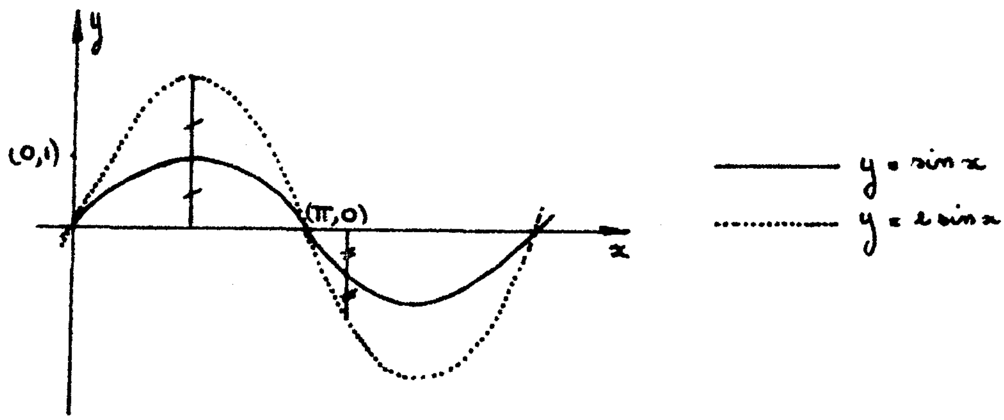


$-1 \leqslant \sin x \leqslant +1 \Leftrightarrow -1 + x \leqslant \sin x + x \leqslant 1 + x$

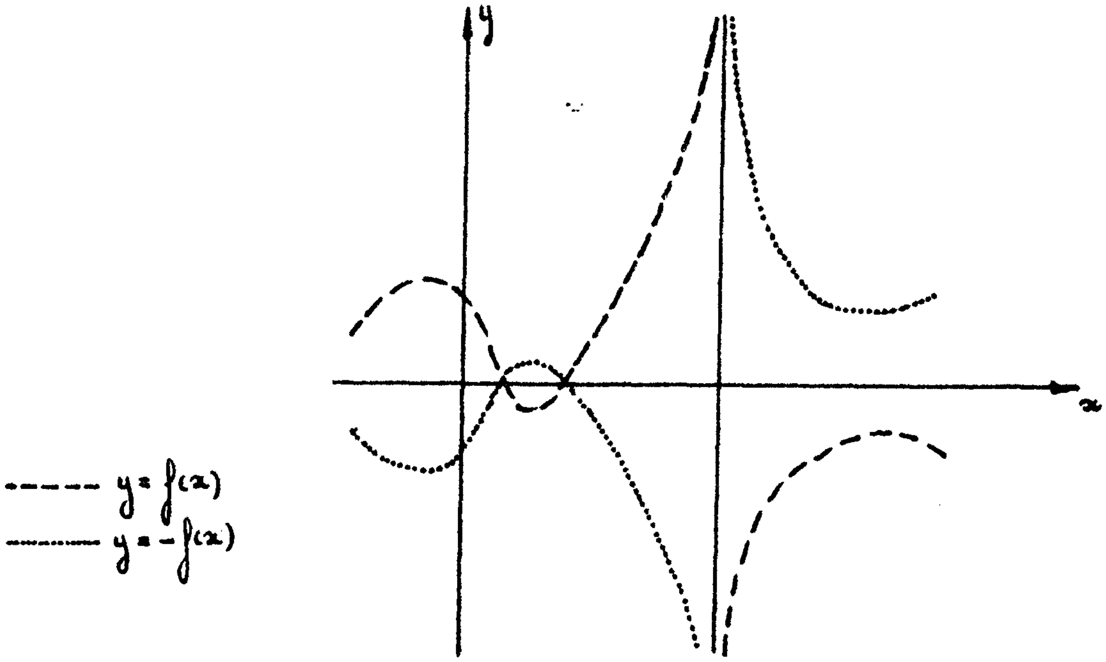
Ceci force la courbe à se situer dans une bande limitée par deux droites parallèles.

L'idée qui consiste à effectuer une opération sur un graphique s'étend à d'autres opérations que l'addition.
Celle-ci se traite avec grande facilité parce qu'elle consiste, au fond, en un report de distances. Il en va de même pour traiter la multiplication d'une fonction f et d'une constante k, c'est-à-dire y= k.f(x), en particulier si k est un entier positif.

Exemple 7 y = 2.sin x



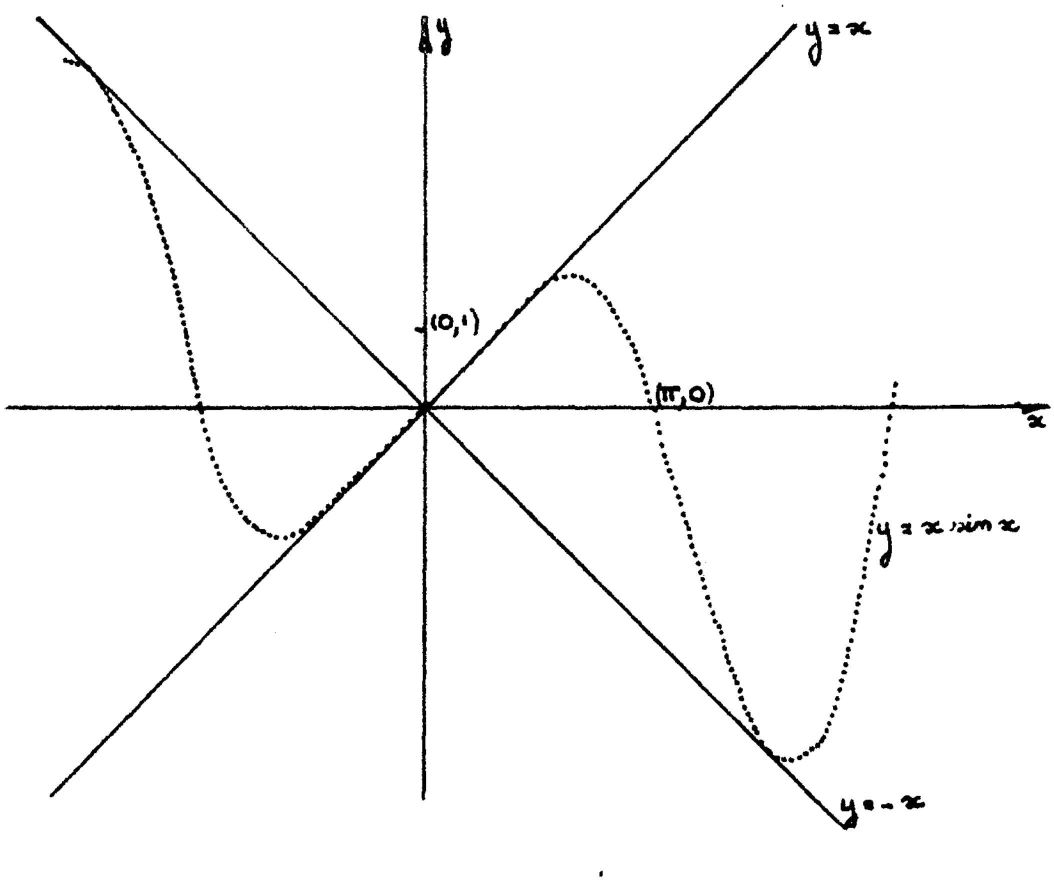
Exemple 8 $y = -f(x)$



On peut traiter aussi le produit de deux fonctions f et g mais cela devient plus difficile. Il y a tout de même des cas assez spectaculaires.

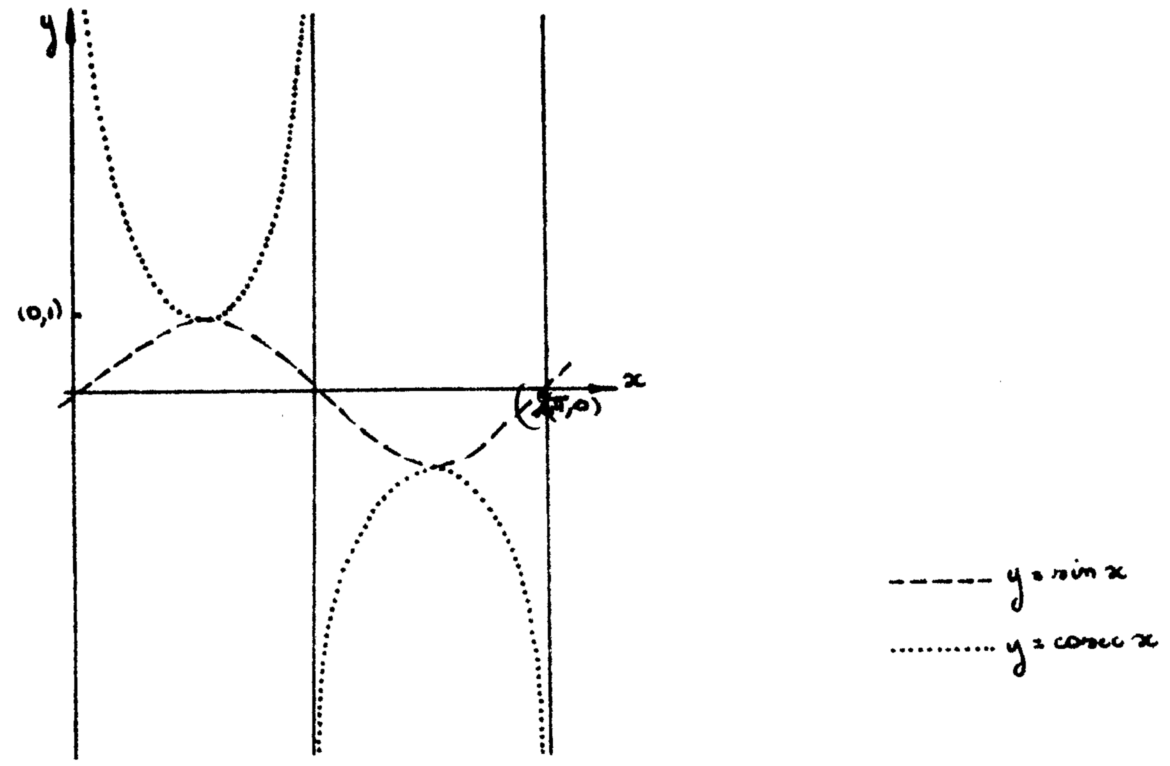
Exemple 9 $y = |x| \sin x$

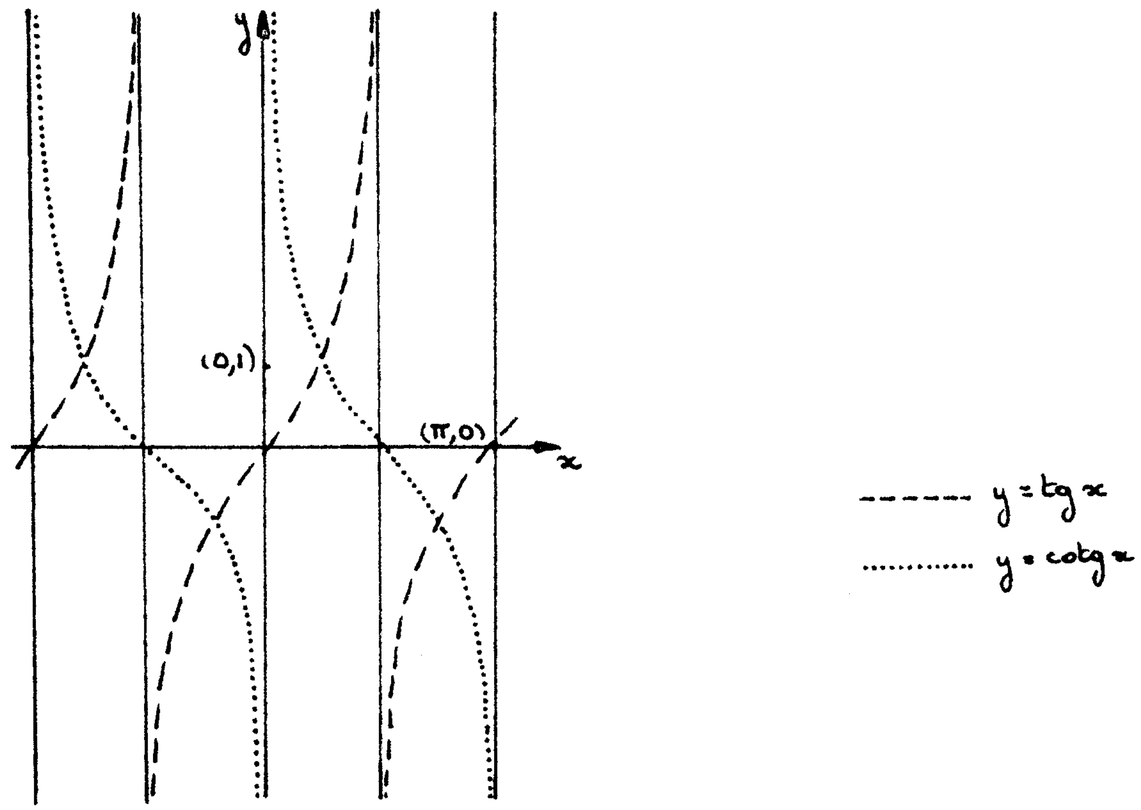
Ici $-x \leqslant f(x) \leqslant x$ donc la courbe s'inscrit dans l'angle des droites $y=x$ et $y=-x$ contenant l'axe des x.



A partir du graphique de $y = f(x)$, on peut encore construire celui de $y = \frac{1}{f(x)}$

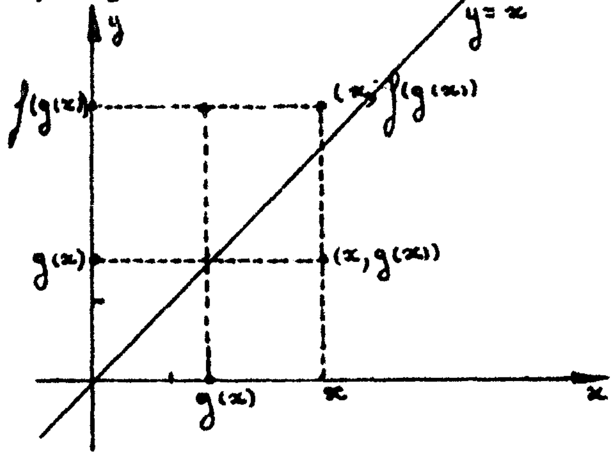
Exemple 10 $\quad y = \frac{1}{\sin x} = \text{cosec } x \quad$ et $\quad y = \text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$





Il est plus difficile de traiter la composition de manière graphique. C'est pourtant possible. En voici le principe, pour un seul point

y = f(g(x))

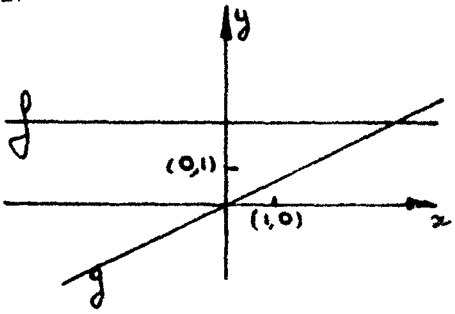


En revanche, on passe facilement du <u>graphe de f à celui de la fonction f^{-1}</u>, grâce à une <u>symétrie par rapport à la droite $y = x$</u> (en axes orthonormés). Nous en avons fait l'illustration à plusieurs reprises : passage de x^2 à $\sqrt{x}$, de sin x à arc sin x. Rappelons qu'il ne faut pas confondre f^{-1} et 1/f.

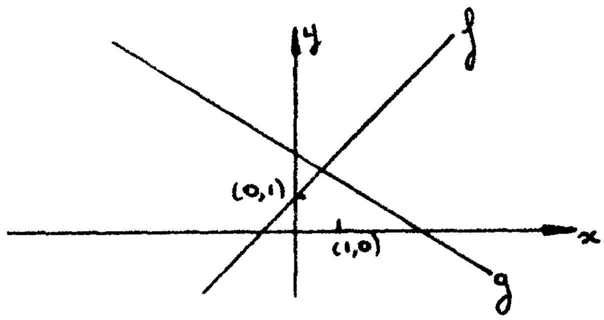
EXERCICES

7. Additionnez les fonctions f et g représentées ci-dessous. <u>Essayez</u> de deviner une formule correspondant au dessin.

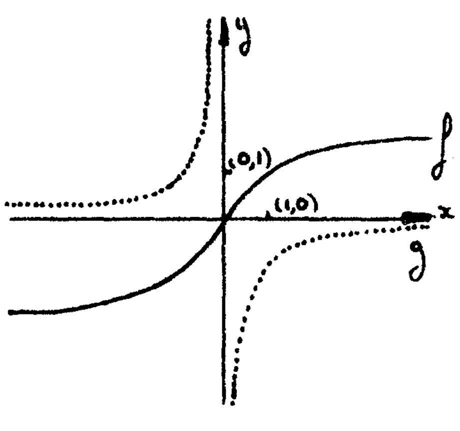
a)



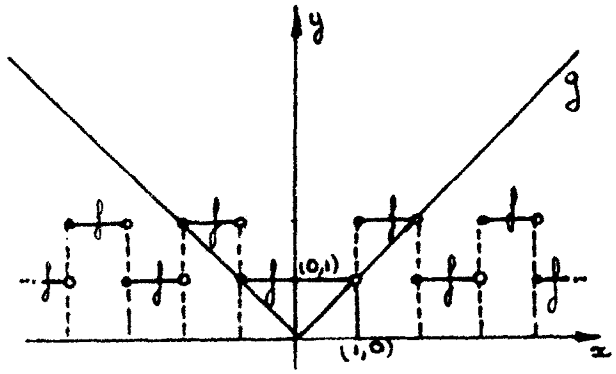
b)



c)



d)



8. Représentez graphiquement, par addition graphique:

a) $t^2 + 1$

b) $t^2 + 5t + 1$

c) $x^2 - \sin x$

d) $\sin x - \cos x$

e) $E(x) + |x|$

f) $x^3 + x^2$

9. Représentez par des opérations graphiques :

a) $-t^2$

b) $\frac{1}{t^2}$

c) $(t - a)^2$

d) $\frac{1}{(t-a)^2}$

e) at^2

f) $at^2 + bt + c$

g) $2.\sin x$

h) $\frac{\sin x}{x}$

i) $|\sin x|$

j) $x - E(x)$

10. Déterminez un intervalle sur lequel la fonction suivante f possède une réciproque f^{-1} et représentez à la fois f et f^{-1}. Calculez $f^{-1}(x)$.

a) t^5

b) $x^3 + 1$

c) $\frac{1}{x^2-1}$

d) $\frac{1}{x}$

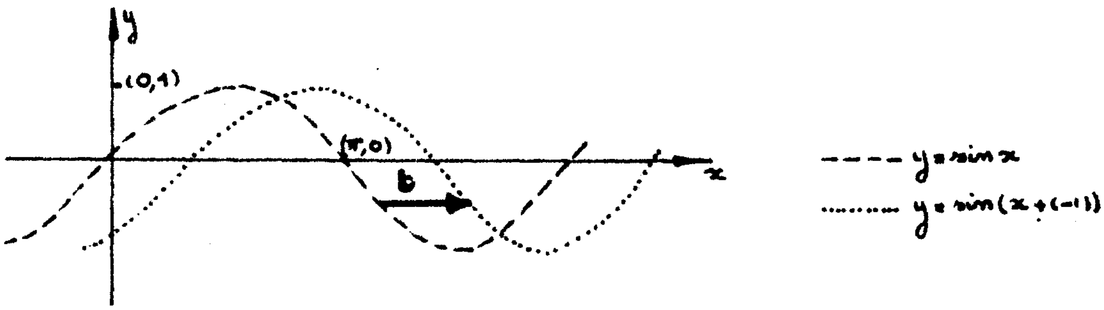
e) 2^x (la réciproque s'appelle <u>logarithme en base 2</u> et se note $\log_2 x$)

<u>TECHNIQUES GRAPHIQUES ET TRANSFORMATIONS</u>

Dans la section précédente, des tranformations familières apparaissent déjà (en axes orthonormés):
1) passage de $y=f(x)$ à $y=f(x)+k$ par une translation de k unités, parallèle à l'axe des y.
2) passage de $y=f(x)$ à $y=-f(x)$ par une symétrie orthogonale d'axe x.

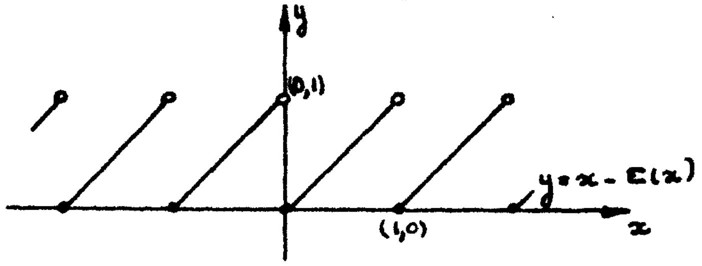
Voici quelques autres situations qu'on rencontre fréquemment.
3) passage de $y=f(x)$ à $y=f(x+k)$ par une translation de $-k$ unités parallèlement à l'axe des x.

<u>Exemple 11</u> $y = \sin(x-1)$



Il peut arriver que les deux graphiques coïncident. Dans ce cas, $\boxed{f(x+k) = f(x)}$ pour tout x et on dit que f est <u>périodique</u> de <u>période k</u>. Les exemples les plus importants de fonctions périodiques sont les fonctions trigonométriques. Mais il y en a d'autres.
Ne confondons pas $f(x+k)$ et $f(x)+k$.

<u>Exemple 12</u> $y = x - E(x)$ est périodique de période 1.

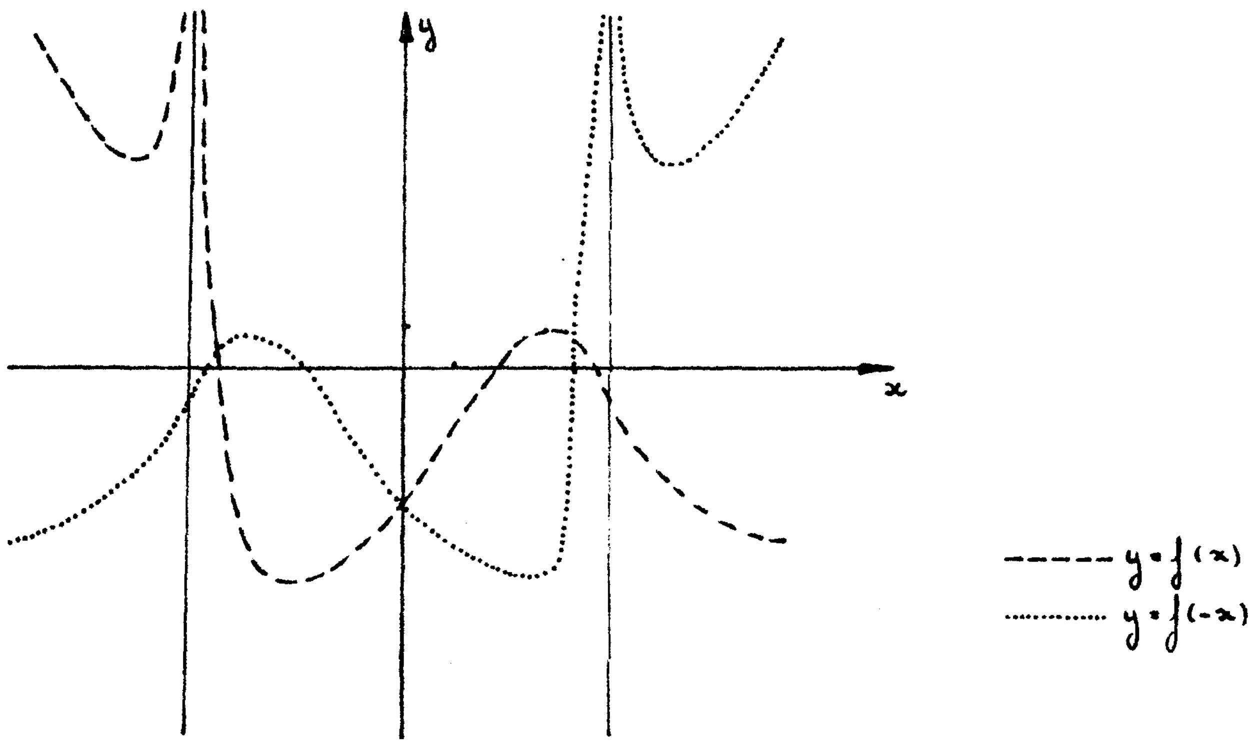


A noter que si k est une période de f, alors tous les multiples entiers de k sont aussi des périodes de f. Dès lors, on peut se préoccuper de <u>la plus petite période strictement positive</u> de f, pour autant que celle-ci existe. Voici un exemple où il n'y a pas de plus petite période.

<u>Exemple 13</u> $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

Tout nombre rationnel est une période.
Et plus fort encore:
<u>Exemple 14</u> $f(x) = k$ pour tout x. Cette fonction constante admet tout réel pour période.

4) passage de $y=f(x)$ à $\boxed{y=f(-x)}$ par une symétrie par rapport à l'axe des y.

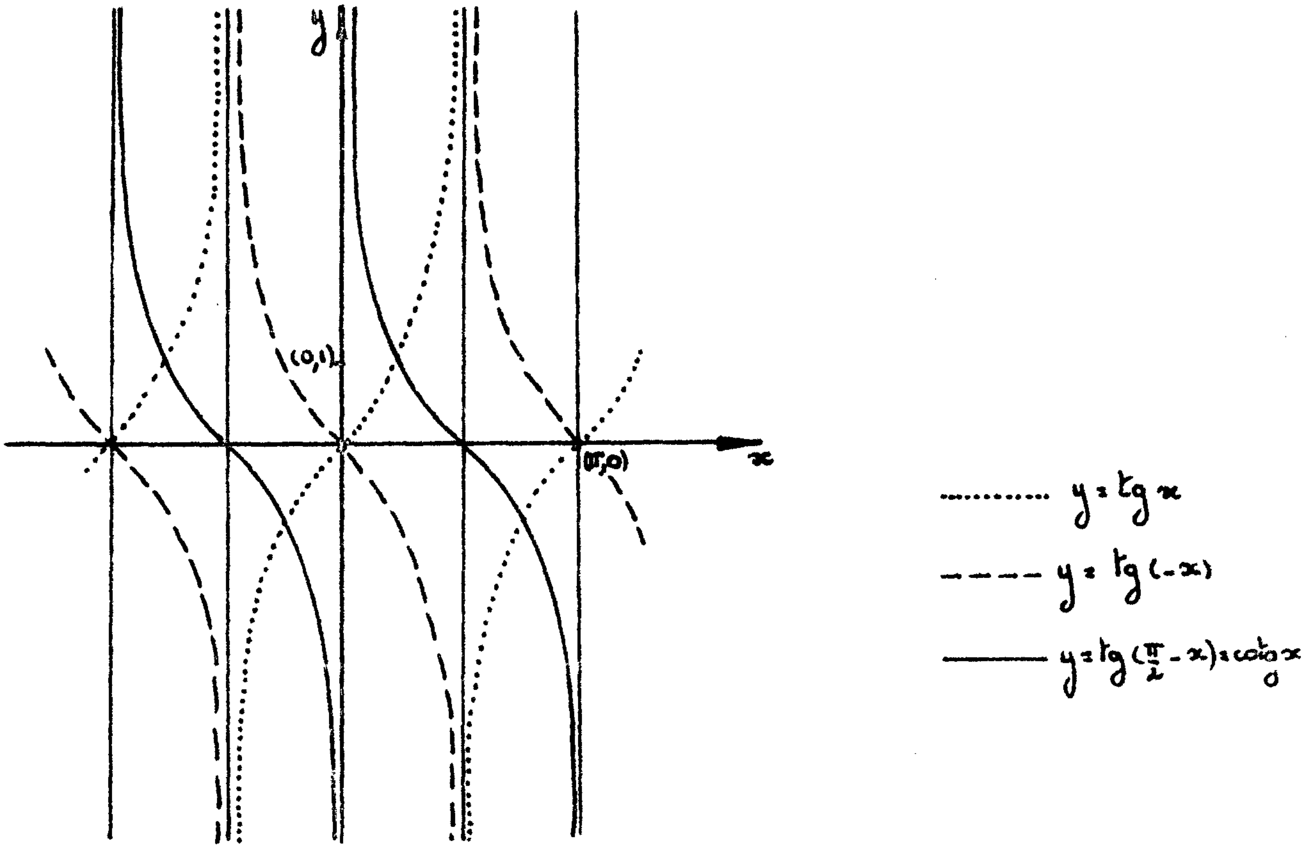


Il peut arriver que les deux graphiques coïncident. Dans ce cas on dit que f est une <u>fonction paire</u> et on a donc $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{dom} f$.

Nous en connaissons de nombreux exemples: x^2, $|x|$, x^2-k, x^{2n} $n \in \mathbb{Z}$, $\cos x$. Une somme de fonctions paires est paire.

5) On peut combiner la translation $x \to x+k$ et la symétrie $x \to -x$.

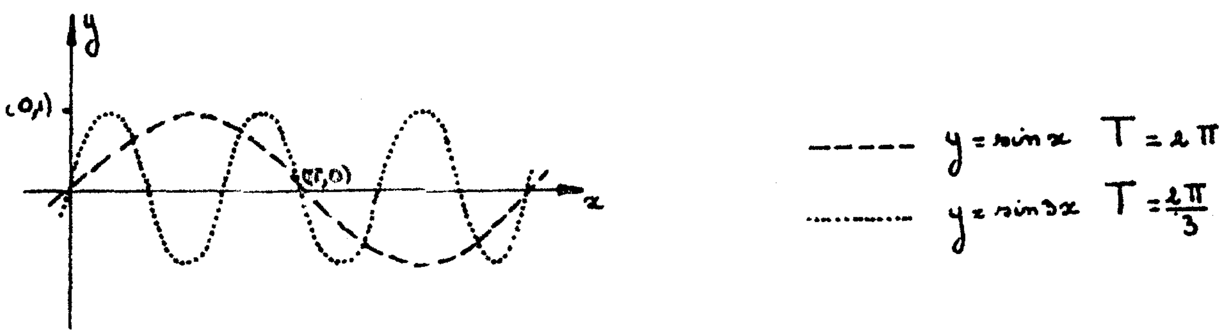
<u>Exemple 15</u> $y = \mathrm{cotg}\, x = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$



6) passage de $y=f(x)$ à $y=f(kx)$. La transformation est un étirement (ou une compression) dans la direction de l'axe des x, qui fixe tout point de l'axe des y, c'est-à-dire

$$(x,y) \longrightarrow (x',y') \text{ où } \begin{cases} x' = \frac{1}{k}x \\ y' = y \end{cases}$$

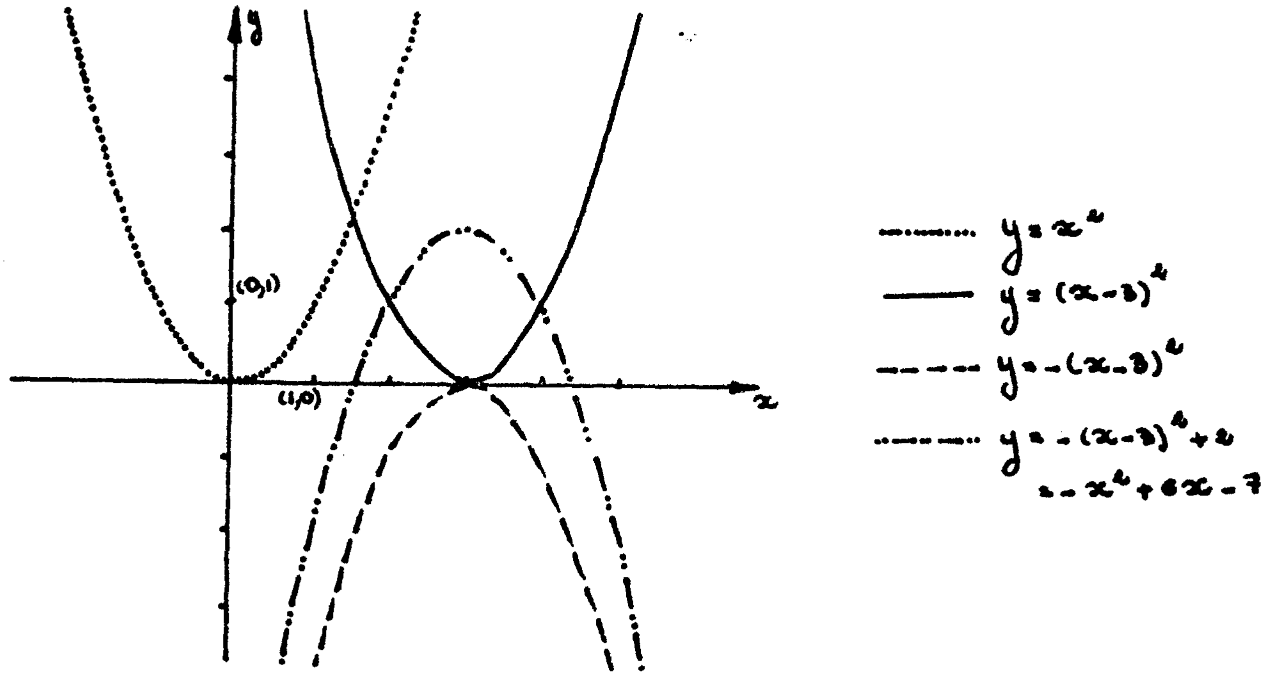
<u>Exemple 16</u> $y = \sin 3x$ (T représente la période)



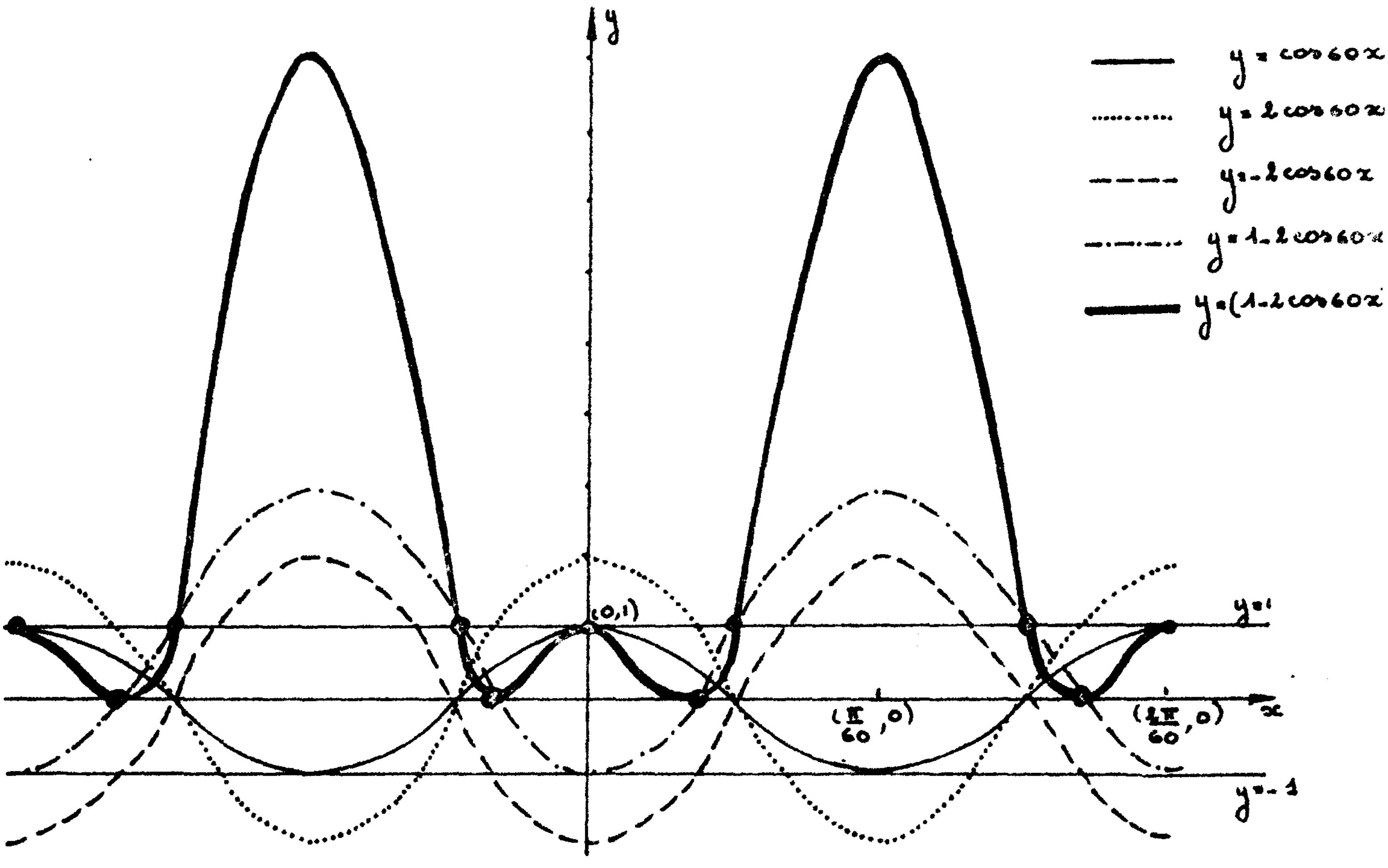
7) enfin, on peut combiner diverses techniques rencontrées jusqu'ici.

Exemple 17 Rappelons-nous que c'est par des méthodes graphiques que nous avons représenté toutes les fonctions $x \mapsto ax^2+bx+c$ en 4e. Voici un cas particulier:

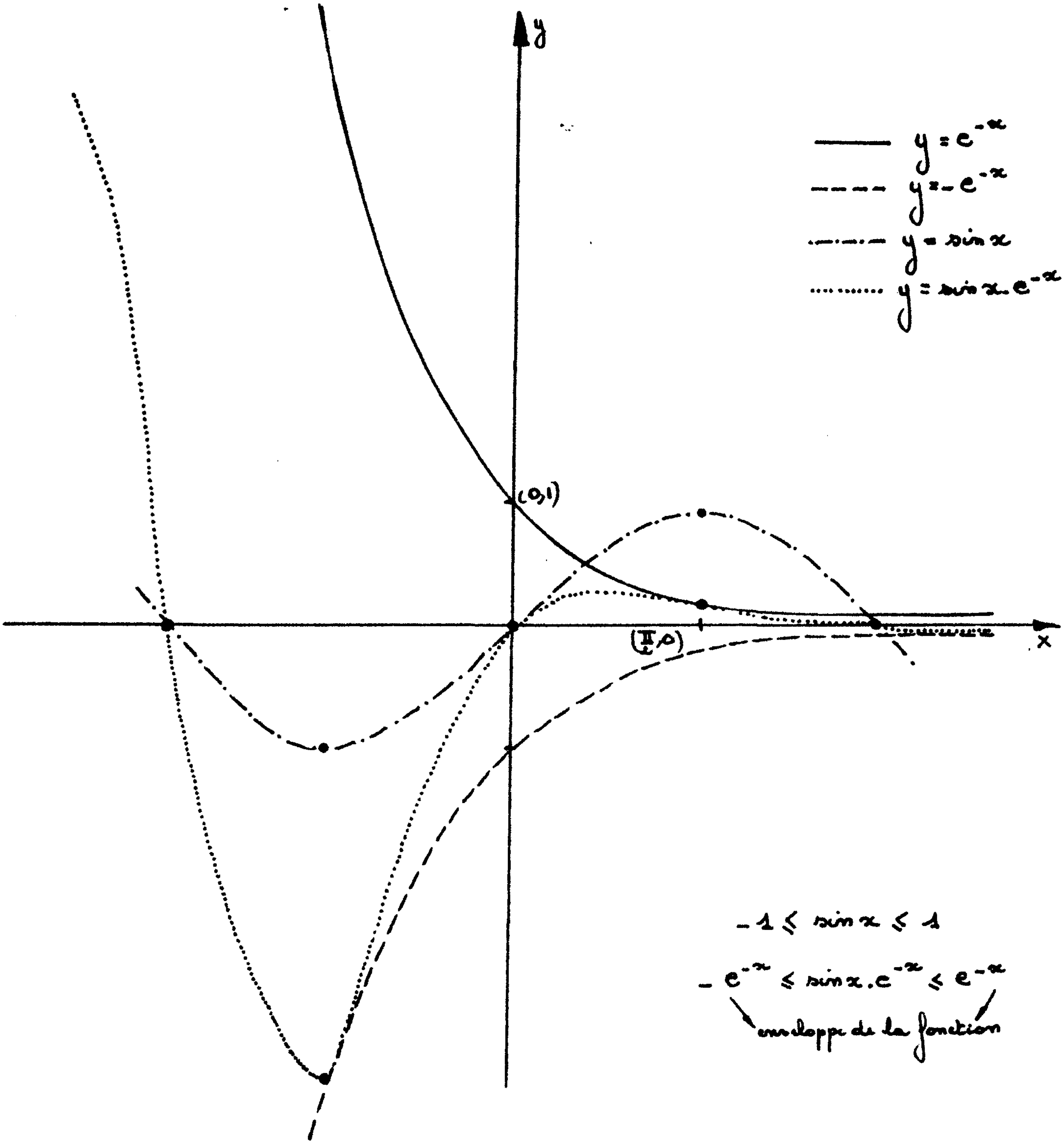
$y = -(x-3)^2 + 2$



Exemple 18 $y = (1-2.\cos 60x)^2$

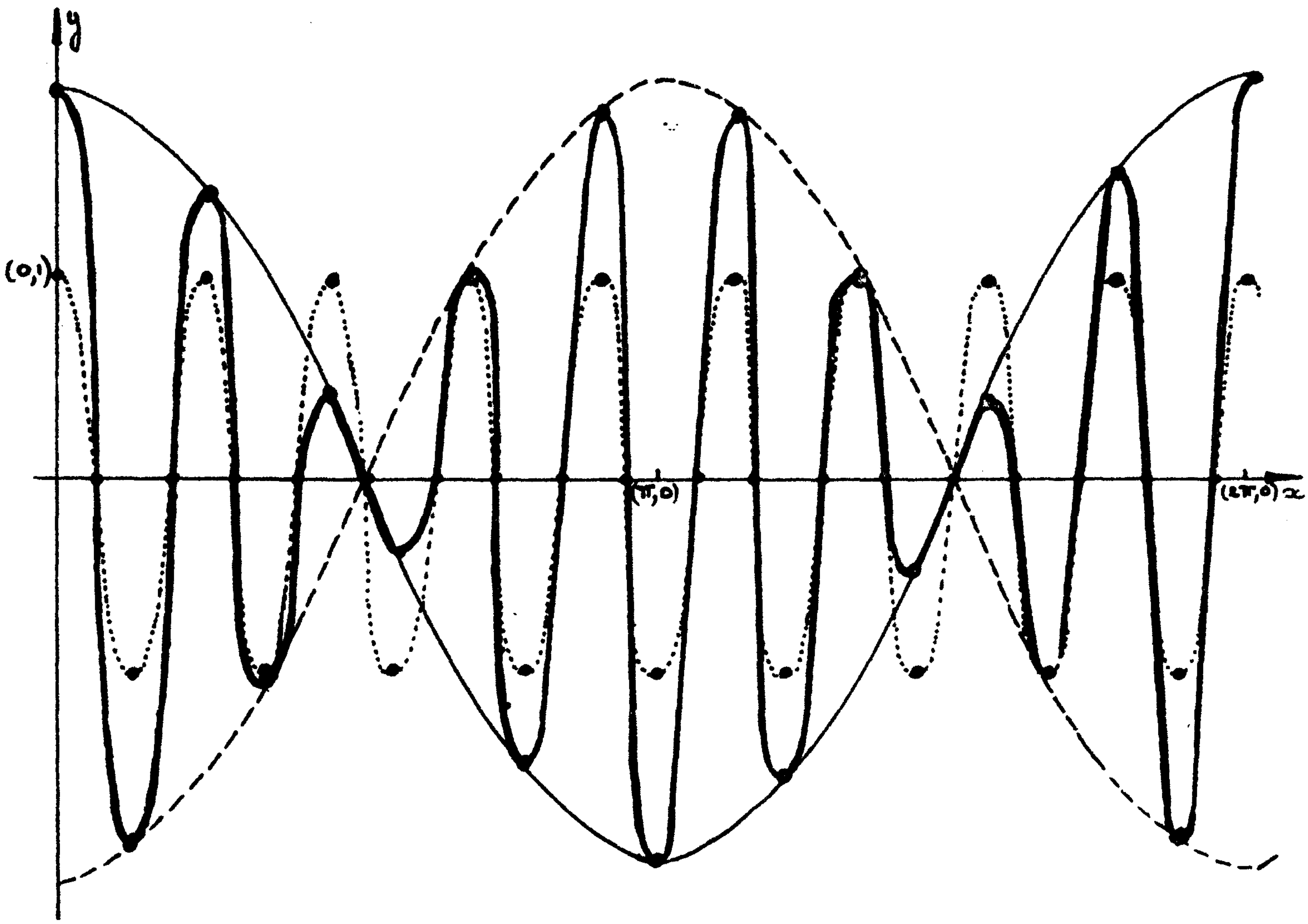


<u>Exemple 19</u> $y = \sin x.e^{-x}$ le nombre e vaut environ 2,718...



Ce type de fonction joue un rôle essentiel en physique. Il représente un mouvement vibratoire amorti.

Exemple 20 $y = \cos 10x + \cos 8x$ (battements)

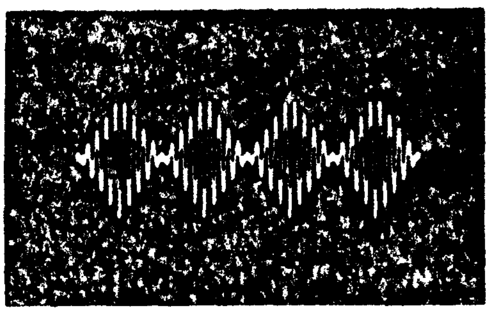


.... $y = \cos 9x$

――― $y = 2\cos x$ } enveloppe de la fonction recherchée.

– – – – $y = -2\cos x$

▬▬▬ $y = 2\cos 9x \cdot \cos x = \cos 10x + \cos 8x$



8) soulignons un dernier cas particulier. C'est celui où $f(-x)=-f(x)$ pour tout x appartenant à dom f. Alors on dit que f est <u>impaire</u> et le graphique est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples: $\sin x$, x^3, x^5, x^{2n+1} $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{tg} x$
Voici des fonctions qui ne sont ni paires, ni impaires: x^3-1, x^5+x, $\operatorname{tg} x + \cos x$, x^2+x.

==

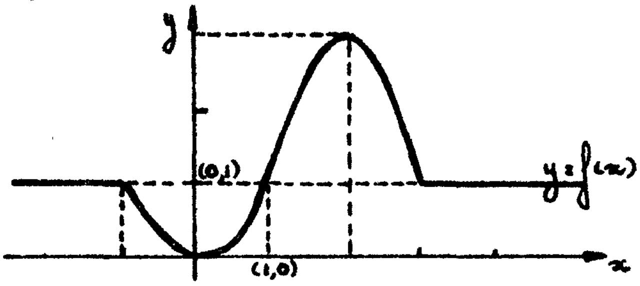
EXERCICES

11. Trouvez la plus petite période et représentez graphiquement:

a) $\operatorname{tg} 2x$ c) $\dfrac{1}{\cos 4x}$

b) $\sin 12x$ d) $\sin x^2$

12. Voici le graphique d'une fonction



Dessinez le graphique des fonctions suivantes:

a) $y=f(x)-2$ f) $y=\dfrac{1}{f(x)}$

b) $y=2.f(x)$ g) $y=|f(x-2)|$

c) $y=f(x-2)$ h) $y=f(x)-x^2$

d) $y=f(x+2)$ i) $y=-f(x)$

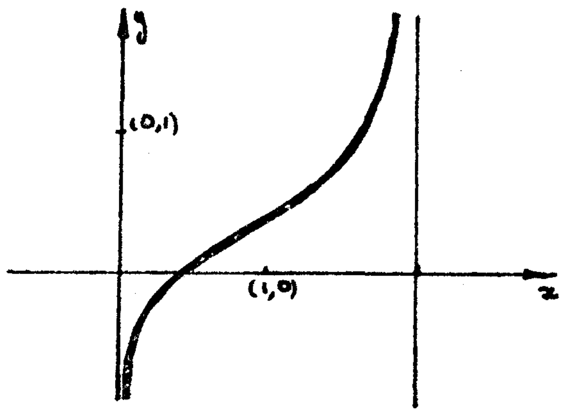
e) $y=f(2x)$ j) $y=f(x).E(x)$

13. Trouvez la plus petite période et représentez graphiquement:

a) $\cos x + \cos 3x$ c) $\sin(2x+\frac{\pi}{4})$
b) $2.\sin x$ d) $\sin ax$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$

Lesquelles de ces fonctions sont paires, impaires ?

14. a) Voici une fonction paire dont on donne partiellement le graphique. Complétez ce graphique.



b) Même question si la fonction est impaire.
c) Même question si la fonction admet la période 2.

15. Représentez par des techniques graphiques:

a) $2^x.\cos 2x$

b) $(x-2)^3 + (x-2)^2$

c) $a.\cos t \quad a \in \mathbb{R}_0$

d) $a.\cos \alpha t \quad a, \alpha \in \mathbb{R}_0$

e) $a.\cos(\alpha t + \varphi) \quad a, \alpha, \varphi \in \mathbb{R}_0$
(Ces fonctions jouent un rôle capital en physique des ondes)

POINTS CRITIQUES D'UNE FONCTION

Ceci est une notion vague, qui se précisera peu à peu cette année. Convenons d'appeler ainsi, pour une fonction f, une valeur de la variable x pour laquelle quelque chose de remarquable se produit: extrêmité d'un intervalle aussi grand que possible où f est définie, point où f cesse d'être croissante pour devenir décroissante (ce qu'on appelle un <u>maximum local</u>) ou vice-versa (<u>minimum local</u>), un point de discontinuité (ceci sera précisé plus tard), etc... Il arrive souvent qu'on y adjoigne les <u>zéros</u> de la fonction, c'est-à-dire les <u>racines</u> de l'équation f(x)=0, ou encore les réels x tels que f(x)=0.

EXERCICES

16. Donnez pour les fonctions suivantes: le domaine de définition, les zéros, les maxima et minima ainsi que l'ensemble des points critiques.

a) $\sqrt{x}$

b) $\sqrt{x-1}$

c) $\sqrt{(x-a)^2(x-1)} \quad a \in \mathbb{R}$
attention au cas où a=0

d) $\dfrac{1}{x^2-1}$

e) $\dfrac{1}{\sin x}$

f) $\sin x + 1$

g) $E(x)$

h) $x^{3/2}$

i) $\dfrac{x-a}{x-b} \quad a \neq b$

j) $ax^2 + bx + c$

RESUME

Au moment d'étudier une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on se préoccupe nécessairement des questions suivantes:

- quelle est l'allure du graphique de f ?
- quel est le domaine de définition de f ?
- quels sont les plus grands intervalles sur lesquels f est croissante, décroissante ?

Ce sont là les questions principales, celles qui livrent souvent les réponses à d'autres questions. On se préoccupe aussi de savoir:

- quels sont les maxima et minima locaux ?
- quels sont les zéros de f ?
- quelles sont les symétries (parité, imparité, périodicité) de f ? Quelle est éventuellement la plus petite période de f ?