2. LE CORPS ORDONNE DES REELS

7h/s

Pour les cours 3h/s et 5h/s, il s'agit seulement d'étudier l'extension de la notion de puissance. Pour celle-ci, nous renvoyons à M4, chapitre 6.

Rappels : VM2, chapitres 7,13,16; VM3, chapitres 3,5; M4, chapitres 1,3,6.

CE QU'IL NE FAUT PAS OUBLIER:

En deuxième, nous avons introduit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels en présentant ceux-ci comme des nombres décimaux illimités. Nous avons appris à comparer ces nombres, à les additionner et à les multiplier. Nous avons insisté sur les propriétés de ces opérations et, au passage, nous avons observé parfois celles-ci sur d'autres ensembles de nombres comme $\mathbb{N}$ (les nombres naturels), $\mathbb{Z}$ (les nombres relatifs), $\mathbb{D}$ (les nombres décimaux), $\mathbb{Q}$ (les nombres rationnels),...

En quatrième, nous avons synthétisé certaines de ces propriétés en observant que $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et certains ensembles intermédiaires à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, sont des **corps commutatifs ordonnés**.

Un corps commutatif ordonné est un ensemble K, muni d'une opération d'addition notée $+$, d'une opération de multiplication notée $.$ et d'une relation d'ordre notée $\leqslant$, si les conditions suivantes sont vérifiées:

1) $K,+$ est un groupe commutatif de neutre noté 0;

2) $K_0,.$ (ensemble des éléments non nuls de K) est un groupe commutatif;

3) $K, \leqslant$ est totalement ordonné, c'est-à-dire que pour tout a,b,c dans K :

   a) $a\leqslant b$ et $b\leqslant c$ implique $a\leqslant c$

   b) $a\leqslant b$ ou $b\leqslant a$

   c) $a\leqslant b$ et $b\leqslant a$ implique $a=b$

4) $a.(b+c) = a.b + a.c$ pour tout a,b,c dans K;

5) $a\leqslant b$ implique $a+c\leqslant b+c$ pour tout a,b,c dans K;

6) $a\leqslant b$ et $c>0$ implique $a.c\leqslant b.c$ pour tout a,b,c dans K.

Vous souvenez-vous de ce que signifient les expressions "**groupe commutatif**" et "**ensemble totalement ordonné**" ? C'est indispensable.

Nous avons rencontré d'autres opérations. D'abord la soustraction et la division qui se ramènent, sur le plan théorique, à l'addition et à la multiplication.

L'exponentiation, du moins dans sa forme la plus rudimentaire, se ramène également à la multiplication. De manière plus précise, dans K, tout élément $x\in K$ et $n\in\mathbb{N}_0$ livre x^n comme produit de n facteurs égaux à x. On étend cette opération en posant

$$x^0 = 1$$

pour tout $x \in K_0$ (l'expression 0^0 demeurant non définie) d'une part, et en posant

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}_0$ et tout $x\neq 0$ (0^{-n} demeurant indéfini) d'autre part.

L'extraction de racines vue en troisième et en quatrième nous a conduits à une nouvelle extension de l'exponentiation. Nous avons d'abord admis l'existence d'un réel $a^{m/n}$ pour tout réel $a \neq 0$ et tout rationnel m/n et enfin d'un réel a^b pout tout $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. En cinquième, il importe de comprendre pourquoi cette existence a été admise au lieu d'être démontrée. C'est parce que le maniement technique de ces notions est à notre portée dès la quatrième alors que la preuve d'existence exige une théorie plus difficile que nous allons précisément mettre en place à présent. Aussi étrange que cela paraisse, nous n'avons jamais prouvé l'existence de $\sqrt{2}$, par exemple. Certains élèves estiment cela évident. Sur quelle base ? Celle des habitudes acquises peut-être. Qu'ils songent à $\mathbb{D}$ et qu'ils fassent un petit pari: existe-t-il un nombre $a \in \mathbb{D}$ tel que $a^2 = 2$ ou encore $\sqrt{2}$ existe-t-il dans $\mathbb{D}$? Et la réponse est-elle évidente ? Ces questions qui ont profondément troublé les mathématiciens avant **Euclide** (3e siècle avant notre ère) les ont amenés à élaborer une théorie des réels très perfectionnée et très difficile.

Il fallut attendre 1880 environ pour que celles-ci soient à nouveau pleinement comprises et enfin dépassées par les mathématiciens modernes. Tout cela ne mérite-t-il pas davantage qu'une attitude dédaigneuse ?

==

EXERCICES

1. a) Pourquoi $\mathbb{Z}$ n'est-il pas un corps commutatif ordonné ?
   b) $\mathbb{D}$ est-il un corps commutatif ordonné ?
   c) L'ensemble $\mathbb{R}(x)$ des fonctions rationnelles $f(x)/g(x)$ où f et g sont des polynômes avec $g \neq 0$, est-il un corps commutatif ordonné ?

2. Prouvez que $\sqrt{2}$ n'existe pas dans $\mathbb{D}$.

3. Citez des propriétés, autres que 1. à 6. ci-dessus, qui sont valables dans tout corps commutatif ordonné. Pouvez-vous les démontrer ?

4. $\sqrt{3}$ existe-t-il dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$? rappel: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \text{ où } a,b \in \mathbb{Q}\}$

5. Qu'appelle-t-on nombre irrationnel ?

==

VARIATIONS SUR L'IDEE DE MAXIMUM ET DE MINIMUM

Nous abordons de manière systématique un vocabulaire qui va servir constamment par la suite et dont l'acquisition n'est pas très difficile, si on veille bien à tous les détails et toutes les nuances.

Considérons un corps ordonné K et une partie A de K.

Exemples: 1) $K = \mathbb{R}$; $A = \mathbb{Z}$, $[0,1]$, $[0,1[$, $\mathbb{R}_0^+$
2) $K = \mathbb{Q}$; $A = \mathbb{Z}$, $[0,\sqrt{2}[$

Ici, certains élèves se troublent car ils se souviennent que $\sqrt{2}$ est un irrationnel et qu'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Par $[0,\sqrt{2}[$ nous désignons tous les $x \in \mathbb{Q}$ tels que $0 \leq x < \sqrt{2}$ ou encore, nous considérons dans $\mathbb{R}$, l'intersection $[0,\sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$. Avec cette convention, on a, dans $\mathbb{Q}$, $[0,\sqrt{2}] = [0,\sqrt{2}[$.

Une **borne supérieure** (ou b.s.) s de A dans K est un élément $s \in K$ qui est supérieur ou égal à tous les éléments de A; donc $A \leqslant s$ ou encore $a \leqslant s$ pour tout $a \in A$.

De même, une **borne inférieure** (ou b.i.) i de A dans K est un élément $i \in K$ tel que $i \leqslant A$ ou encore $i \leqslant a$ pour tout $a \in A$.

Exemples: 1) si $K = \mathbb{R}$, trouvez les bornes supérieures et les bornes inférieures de A si $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}$, $A = [0,\infty[$, $A = [2,7[$.

2) $K = \mathbb{Q}$. Trouvez les b.s. et les b.i. de $A = [-5, 2]$, $A =]-8,10]$, $A = [-\sqrt{2}, 5]$.

On observe immédiatement que si s est une b.s. de A et si $s \leqslant s'$, alors s' est une b.s. de A ou encore $A \leqslant s$ et $s \leqslant s'$ implique $A \leqslant s'$.
De même, si $i \leqslant A$ et $i' \leqslant i$ alors $i' \leqslant A$.

Dès lors, à toute partie A du corps ordonné K, nous associons deux sous-ensembles nouveaux, à savoir

$$\overline{A} = \{ x \in K \mid A \leqslant x \}$$
$$\underline{A} = \{ y \in K \mid y \leqslant A \}$$

On a clairement

$$\underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A} \quad \text{si A est non vide}$$

ou encore, pour tout $\underline{a} \in \underline{A}$, $a \in A$, $\overline{a} \in \overline{A}$ on a $\underline{a} \leqslant a \leqslant \overline{a}$

Un **maximum** de A est un élément de $A \cap \overline{A}$, c'est-à-dire une borne supérieure de A qui appartient à A.

De même, un **minimum** de A est un élément de $A \cap \underline{A}$.

Exemples:

1) Dans $K = \mathbb{R}$, $[0,\sqrt{2}]$ possède un maximum qui est $\sqrt{2}$. Dans $K = \mathbb{Q}$, $[0,\sqrt{2}]$ n'a pas de maximum. Dans $\mathbb{R}$, $[0, 2[$ n'a pas de maximum.

2) Dans $\mathbb{R}$, $]0,2[$ n'a pas de minimum et pas de maximum. Par contre, dans $\mathbb{Z}$ (qui n'est pas un corps ordonné), $]0,2[= \{1\}$ et possède un minimum et un maximum égaux à 1.

Voici une nouvelle observation:

Théorème 1 **Si $A \subseteq K$ possède un maximum (ou un minimum), celui-ci est unique.**

Démonstration : Supposons que m et m' sont des maxima de A. Alors m et m' sont dans A, donc $m \leqslant m'$ car m' est une borne supérieure de A. De même, $m' \leqslant m$ parceque m est une borne supérieure de A. Dès lors, $m=m'$.

Nous avons vu que $A = [0,5[$ n'a pas de maximum dans $\mathbb{R}$. Pourtant, 5 joue un rôle très voisin d'un maximum. Son seul défaut est de ne pas être dans A. Quelle est la propriété qui privilégie 5 ? C'est tout simplement un minimum de $\overline{A}$, c'est-à-dire une plus petite borne supérieure ou supremum de A.

On appelle plus petite borne supérieure ou supremum d'un ensemble $A \subseteq K$, un élément minimum de $\overline{A}$. De même, une plus grande borne inférieure ou infimum de A est un élément maximum de $\underline{A}$.

Nous faisons les constatations suivantes:

1) tout maximum de A est un supremum de A mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Exemple: 1 est supremum dans $[0,1[$ mais pas maximum;

2) tout minimum de A est un infimum de A mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie;

3) A possède au plus un supremum et au plus un infimum. C'est une conséquence du théorème 1 : $\overline{A}$ possède au plus un minimum et $\underline{A}$ au plus un maximum.

==

EXERCICES

6. Déterminez les maxima, minima, supremums, infimums dans les cas suivants (à noter que $\mathbb{N}$ n'est pas un corps):

K	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
A	$[-9,19]$	$]-\infty;10,3[$	$[0,\sqrt{2}]$	$]100,10^6]$	$]7,8[$	ϕ

7. Voici deux ensembles A et B de $\mathbb{R}_0^+$. On définit

$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, $A \cap B$, $A \cup B$. Trouvez les maxima, minima, infimums, supremums de ces quatre ensembles dans les cas suivants :

a) $A = [7,8]$, $B = [10,12]$
b) $A =]3/7,10/11]$, $B = [1,2]$
c) $A = [9,10]$, $B = [9,10]$
d) $A = [2,\infty[$, $B = \{1/2\}$
e) $A = \phi$, $B = \mathbb{R}_0^+$
f) $A = \phi$, $B = \phi$
g) $A = \{5\}$, $B = \{9\}$
h) $A = \mathbb{R}_0^+$, $B = \mathbb{R}_0^+$

8. Si K est un corps commutatif ordonné, quel est l'effet d'une translation ($x \to x+a$), d'une homothetie ($x \to a.x$, $a \neq 0$) sur les bornes supérieures, inférieures, maxima, minima, etc ? Qu'en est-il sur $\mathbb{Z}$?

9. Est-il exact que dans $\mathbb{N}$ toute partie non vide possède un minimum ?

==

$\mathbb{R}$ EST COMPLET

Considérons $A =]0,\sqrt{2}[$ dans $\mathbb{Q}$. A possède un infimum, à savoir 0, mais pas de supremum. Celà résulte du fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Nous voyons donc que dans un corps commutatif ordonné, un ensemble peut être borné supérieurement sans avoir de supremum et de même, il peut être borné inférieurement sans avoir d'infimum. Ce "défaut" de $\mathbb{Q}$ résulte au fond de la présence de "trous" (par exemple à l'emplacement de $\sqrt{2}$) qu'on peut éliminer en passant à $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}$ lui-même ne donne-t-il pas lieu à des trous ? La réponse est négative. C'est une propriété de $\mathbb{R}$ qui figure parmi les plus importantes pour le développement rigoureux de l'étude des fonctions.

Pour éviter une légère difficulté supplémentaire dans le cas des nombres négatifs, nous examinons une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ admettant une borne inférieure i. Alors, il existe une plus grande borne inférieure i_0 de A dans $\mathbb{N}$, par exemple 2023. Cela signifie tout simplement qu'il existe dans A un élément dont la partie entière est 2023 et qu'il n'y en a pas ayant une partie entière plus petite. En effet, si tout élément de A avait une partie entière supérieure ou égale à 2024, on aurait $i_0 \geq 2024$.

De même, il existe une plus grande borne inférieure i_1 de A dans $1/10\ \mathbb{N}$ (l'ensemble des décimaux positifs ayant un seul chiffre après la virgule). Si $i_0 = 2023$, on voit que

$2023{,}0 \leqslant i_1 \leqslant 2024{,}0$ car 2024 n'est pas une borne inférieure de A. On a donc par exemple $i_1 = 2023{,}4$. L'existence de i_1 resulte du fait que $1/10\ \mathbb{N}$ a la même structure que $\mathbb{N}$ moyennant un changement d'unité. L'existence de i_1 résulte donc de l'existence de i_0.

Le raisonnement qui permet de passer de i_0 à i_1 livre de même le passage de i_1 à i_2 qui est la plus grande borne inférieure de A dans $1/(10^2)\ \mathbb{N}$ et plus généralement, il permet le passage de i_n à i_{n+1} qui est la plus grande borne inférieure de A dans $1/(10^{n+1})\ \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Examinons la suite des nombres décimaux limités $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ par exemple:
2023; 2023,4; 2023,43; 2023,439; 2023,4390;...

On a $i_0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant \cdots \leqslant a$ pour tout $a \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on ne peut avoir $i_n + \frac{1}{10^n} \leqslant a$ pour tout $a \in A$.

Comme i_1 commence par i_0 en ayant un chiffre de plus, que i_2 commence par i_1 en ayant un chiffre de plus et que i_{n+1} commence par i_n en ayant un seul chiffre de plus, la suite i_0, $i_1, \ldots, i_n, \ldots$ détermine un réel r tel que la partie entière de $r.10^n$ coïncide avec celle de $i_n.10^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Nous prétendons que r est un infimum de A. En effet, si $a \in A$, on a $i_n \leqslant a$ pour tout n, donc le développement décimal de a montre que $r \leqslant a$ et de fait, r est une borne inférieure de A.
S'il existe, en revanche, un réel k tel que $r < k \leqslant A$, alors un des décimaux limités k_n déterminés par k est supérieur à i_n et de ce fait $i_n < k_n \leqslant k \leqslant A$ ce qui contredit le fait que i_n est la plus grande borne inférieure de A dans $\frac{1}{10^n}\mathbb{N}$.

On peut adapter cette démonstration à une partie non vide quelconque de $\mathbb{R}$ et on trouve ainsi le

Théorème 2 **Dans le corps commutatif ordonné $\mathbb{R}$, toute partie non vide bornée inférieurement possède nécessairement un infimum. De même, toute partie non vide bornée supérieurement possède nécessairement un supremum.**

On résume les propriétés exprimées dans le théorème 2 en disant que $\mathbb{R}$ est **complet**. C'est cette propriété qui permet de prouver l'existence de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, a^b pour a et b dans $\mathbb{R}$ et bien d'autres choses encore.

Un résultat plus remarquable encore fut établi par G. CANTOR, il y a une centaine d'années: si K est un corps commutatif ordonné complet, alors K est nécessairement isomorphe à $\mathbb{R}$. Cela confirme que $\mathbb{R}$ occupe une place unique en mathématique.

==

EXERCICES (facultatifs; lire au moins les énoncés)

10. Soit A une partie non vide bornée inférieurement dans $\mathbb{R}$ et i l'infimum de A.
   a) montrez que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant i, contient au moins un élément de A.
   b) qu'en est-il d'un intervalle fermé contenant i ?

11. <u>Théorème des intervalles emboîtés</u> Voici une suite d'intervalles fermés emboîtés dans $\mathbb{R}$.
$I_0 = [a_0, b_0], I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n], \ldots$

avec $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$ et $b_n - a_n \leq \frac{1}{10^n}$ pour tout n

Démontrez que les intervalles $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ <u>encadrent</u> un et un seul réel r.
(poser $A = \{ a_n | n \in \mathbb{N} \}$, et considérer le supremum r de A).

==

APPLICATION - EXISTENCE DE RACINES $n^{\text{ièmes}}$

Nous sommes enfin en mesure de prouver qu'il existe un réel positif dont le carré vaut deux. Nous ferons bien mieux.

Travaillons dans $\mathbb{R}^+$, avec la fonction

$$f : x \longrightarrow x^n \quad \text{où } n \in \mathbb{N}_0$$

Pour obtenir un bon contrôle sur la fonction $\sqrt[n]{x}$, en particulier pour montrer que celle-ci est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il convient de prouver que si $a \in \mathbb{R}^+$, il existe un b tel que $b^n = a$. Soit A^- l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $x^n \leq a$ et A^+, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $x^n \geq a$.

On a $A^- \leq A^+$ et ces ensembles sont non vides (par exemple $0 \in A^-$ et si $a \geq 1$, $a \in A^+$ tandis que si $a < 1$, $1 \in A^+$).

Donc A^- possède une plus petite borne supérieure b^- et A^+ possède une plus grande borne inférieure b^+. On a

$$A^- \leq b^+ \leq A^+ \quad \text{et} \quad A^- \leq b^- \leq A^+$$

et de plus $b^- \leq b^+$. En fait, $b^- = b^+$ sinon il existerait un y tel que $b^- < y < b^+$ et dans ce cas, on aurait $y^n > a$ parceque $y \notin A^-$ mais aussi $y^n < a$ parceque $y \notin A^+$.

Considérons le réel $b = b^- = b^+$. On veut prouver que $b^n = a$. procédons par l'absurde. Alors on peut supposer que $a < b^n$ (le cas $b^n < a$ se traite de manière symétrique).

On a $b > 0$ sinon $b = 0 = b^n > a \geq 0$ force $a = b^n$. Il existe donc un réel positif x tel que $x < b$. De ce fait $x \in A^-$, sinon $x \in A^+$ et dans ce cas $b \leq x$. Donc $x^n \leq a$.
De plus, $b^n - x^n \geq b^n - a$, d'où il vient

$$(b-x).(b^{n-1} + b^{n-2}.x + b^{n-3}.x^2 + \ldots + b.x^{n-2} + x^{n-1}) \geq b^n - a$$

$$(b-x).(b^{n-1} + b^{n-1} + b^{n-1} + \ldots + b^{n-1} + b^{n-1}) \geq b^n - a$$

$$n.(b-x).b^{n-1} \geq b^n - a$$

et

$$b - x \geq \frac{b^n - a}{n.b^{n-1}} \quad \text{pour tout } x < b \text{ dans } \mathbb{R}^+.$$

Ceci est absurde, car il existe évidemment un $x < b$ (assez proche de b) tel que

$$b - x < \frac{b^n - a}{n.b^{n-1}}$$

Il faut en conclure que $b^n = a$

Théorème 3 : Pour tout réel positif a et tout naturel $n \neq 0$, il existe un réel positif b tel que

$$b^n = a$$

==

EXERCICES

12. Si cette démonstration vous paraît trop abstraite, relisez-la en supposant a=2 et n=2.

13. Reprendre et adapter la démonstration ci-dessus en supposant plutôt que $b^n < a$.

==

APPLICATION - EXISTENCE DE a^b POUR $a,b \in \mathbb{R}_0^+$

Grâce au théorème 3, nous possédons l'existence de a^n pour $n \in \mathbb{N}_0$, celle de $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, celle de $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ et enfin celle de $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ pour tout rationnel m/n où m, $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$.

Jusqu'ici, l'écriture a^b, pour b irrationnel, ne correspond à rien. La situation est bien plus dramatique que pour les racines $n^{\text{ièmes}}$: nous ne savons même pas quelle est la signification de $2^{\sqrt{2}}$ par exemple.

Il s'agit donc d'élaborer une définition et de montrer qu'elle fonctionne. De cette définition, on attend qu'elle remplisse les conditions suivantes:

0) $a^{m/n}$ est la valeur de $\sqrt[n]{a^m}$ si m,n sont entiers et $a > 0$;
1) croissance, c'est-à-dire que pour $0 < b_1 < b_2$ et $a > 1$, on ait $a^{b_1} < a^{b_2}$;
2) une autre forme de croissance: pour $0 < a_1 < a_2$ et $0 < b$, on veut $a_1^{\,b} < a_2^{\,b}$;
3) $a^{b_1 + b_2} = a^{b_1} . a^{b_2}$ (distributivité de l'exponentiation sur la multiplication).

Voyons comment faire.

a) Les conditions (0) et (1) déterminent la fonction. Fixons les réels positifs a et b. Soit C^- l'ensemble des rationnels positifs x tels que $x \leq b$ et C^+, l'ensemble des rationnels x tels que $b \leq x$. Donc $C^- \leq b \leq C^+$. Alors $a^{C^-} = \{a^x \mid x \in C^-\}$ et $a^{C^+} = \{a^x \mid x \in C^+\}$ donnent $a^{C^-} \leq a^{C^+}$.
On montre que a^{C^-} possède une plus petite borne supérieure c^-, que a^{C^+} possède une plus grande borne inférieure c^+, $c^- \leq c^+$ et on montre que $c^- = c^+$. Alors, la seule façon de satisfaire (1) est de poser $a^b = c^- = c^+$.

b) Il est possible de démontrer, sur cette base, que les conditions (2) et (3) sont vérifiées.

==

SUITES ET SERIES

L'idée de suite a été rencontrée à plusieurs reprises depuis la première année. Nous avons admis que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini et considéré la suite

0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, n+1, ...
où les points (....) traduisent le fait qu'après tout élément vient un autre et ainsi de suite.

De même, nous avons travaillé avec les décimaux illimités:
$\sqrt{2}$ = 1,4142... où les points (...) traduisent à nouveau le fait qu'il y a une suite infinie de chiffres ou qu'après tout chiffre en vient un autre.

Le raisonnement par récurrence est, au fond, une suite infinie de démonstrations (pareilles), un peu comme une boucle dans un programme informatique, qui serait répétée sans arrêt.

Voilà l'idée de base, un peu vague encore, de la notion de **suite**: on dispose d'un ensemble totalement ordonné dans lequel il y a un élément précédant les autres ou "premier élément", un élément suivant le premier mais précédant les autres ou "deuxième élément", etc.. Le mécanisme d'une suite reproduit le mécanisme de $\mathbb{N}_0$ et, finalement, on en vient à la définition précise qui suit.

Etant donné un ensemble E, par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ ou le plan, une <u>suite dans E</u> est une application de $\mathbb{N}_0$ dans E (ou l'image de cette application). Si u: $\mathbb{N}_0 \to E$ est une suite, u applique $n \in \mathbb{N}_0$ sur un élément qu'on note traditionnellement u_n et qu'on appelle le <u>terme général</u> de la suite.
On peut voir la suite u comme l'ensemble ordonné

$$u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_{21752}, \dots)$$

ce qu'on note encore $u = (u_n)$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

A noter qu'on peut indifféremment remplacer $\mathbb{N}_0$ par $\mathbb{N}$ et vice-versa. Il faudra seulement y prendre garde dans des calculs précis.

<u>Exemples de suites :</u>

1) $u = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ ou $u=(u_n)$ avec $u_0 = 0$, $u_n = u_{n-1} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}_0$

2) $u = (-7, -6, -5, -4, \dots)$ ou $u_n = n-7$ et $n \in \mathbb{N}$

3) $u = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ ou $u_n = 2n-2$ et $n \in \mathbb{N}_0$

4) $u = (10^0, 10^1, 10^2, \dots)$ ou $u_n = 10^{n-1}$ et $n \in \mathbb{N}_0$

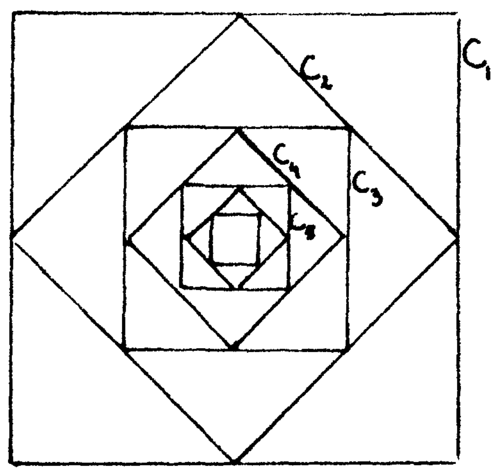
5) $u = (0, -1, -2, -3, -4, \dots)$ ou $u_n = -n$ et $n \in \mathbb{N}$

6) u = (1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;...) suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$

7) u = (0; 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; ....) suite des approximations décimales de 1/3

8) $u = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots)$ <u>suite harmonique</u>

9) suite de carrés emboîtés :
On part d'un carré C_1. Les milieux des côtés livrent un carré C_2, les milieux des côtés de C_2 livrent un carré C_3, etc.....



10) Considérons une fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et un nombre x appartenant à dom f. A titre d'exemple, prenons $f: x \to x+7$.

On considère la suite

$$x,\ f(x),\ f(f(x))=(f\circ f)(x)=f^{(2)}(x),\ f(f(f(x))) = f^{(3)}(x),\ \ldots$$

par exemple

$$x,\ x+7,\ (x+7) + 7\ ,\qquad ((x+7)+7) + 7\ ,\ \ldots.$$

On appelle $n^{\text{ième}}$ itérée de f, la fonction $f^{(n)}$ obtenue en composant n copies de f, à savoir **fofof...of**. On évite de noter f^n pour ne pas confondre la multiplication et la composition.

Ainsi, $f: x \to x+3$ livre $f^{(2)}(x) = x+6$, $f^{(3)}(x) = x+9$

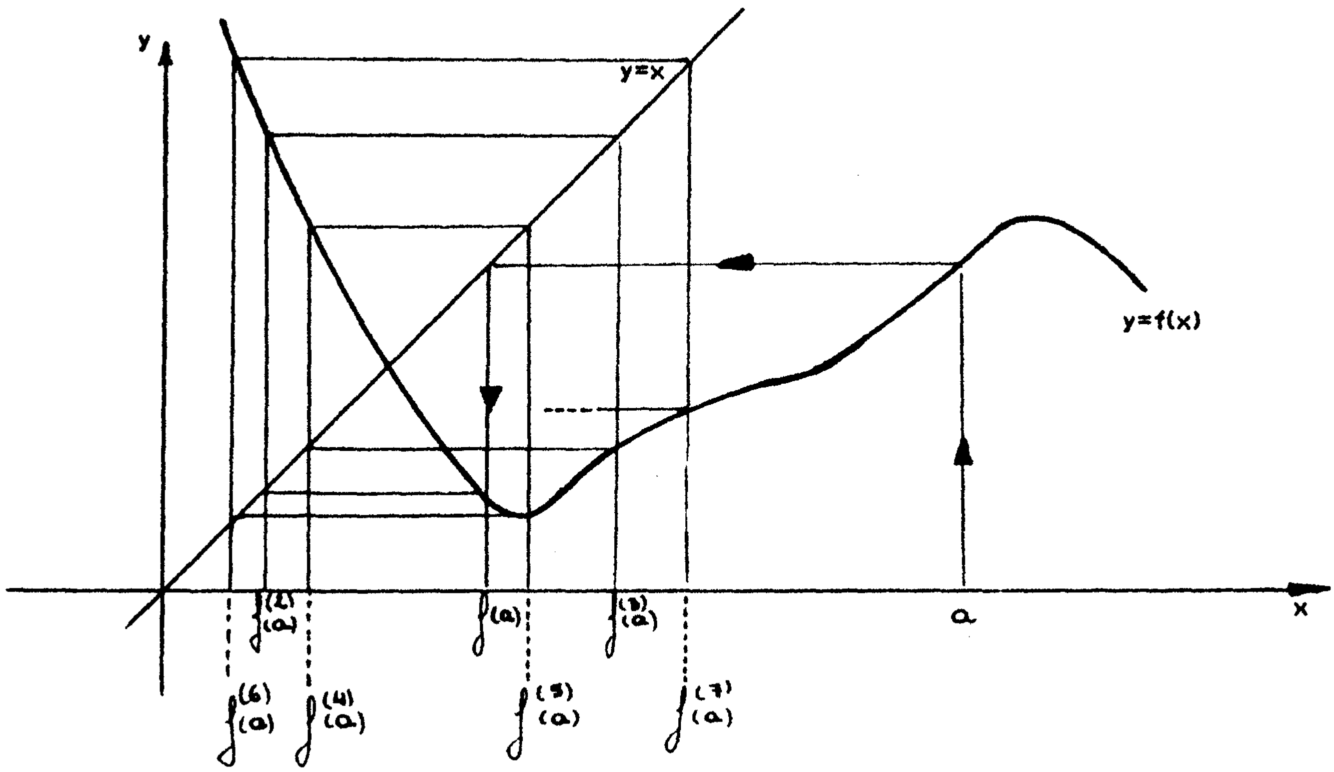
mais

$$f^2(x) = (x+3)^2 \quad , f^3(x) = (x+3)^3$$

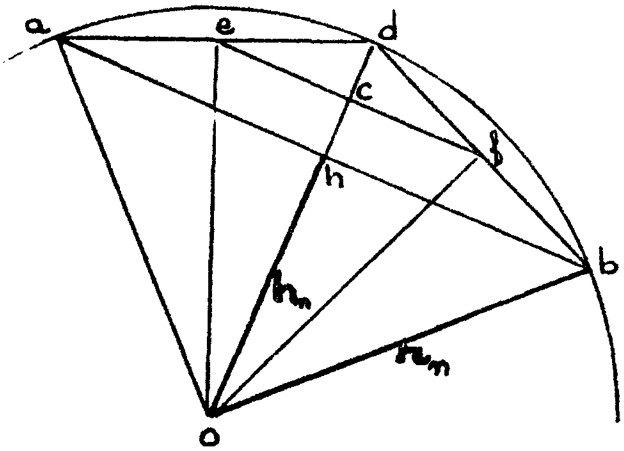
Si $x \in$ dom f ainsi que ses transformés successifs par f, on obtient la suite de nombres

$$x,\ f(x),\ f^{(2)}(x),\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(x),\ldots$$

Sur un graphique, cette suite peut se déterminer facilement. Voici un exemple pour $x=a$



11) Calcul approché de π par la méthode d'Archimède (3e siècle av. J.C.) et Nicolas de Cuse (1450):



Considérons un polygone régulier à 2^n côtés qui a un périmètre donné égal à 2.

h_n et r_n désignent les rayons des cercles inscrit et circonscrit de ce polygone.

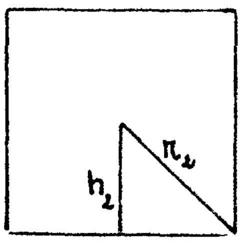
Les cercles ont des longueurs $2\pi h_n$ et $2\pi r_n$. On a donc :

$$2\pi h_n < 2 < 2\pi r_n$$

ou encore

$$\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}$$

Pour n=2, on a $2^n=4$, $r_2=\sqrt{2}/4$ et $h_2 = 1/4$.



Soit ab un côté du polygone régulier de 2^n côtés, de périmètre 2 et de centre O, d le milieu de l'arc ab de centre o, e le milieu de ad et f le milieu de bd.

On a $ef = \frac{ab}{2}$ par Thalès et ef est le côté du polygone de 2^{n+1} côtés de périmètre 2.

On a donc $od = r_n$; $oh = h_n$; $oe = r_{n+1}$; $oc = h_{n+1}$

Comme c est le milieu de dh, on a $h_{n+1} = \frac{r_n + h_n}{2}$

Les triangles oce et oed étant semblables, on a $\frac{oc}{oe} = \frac{oe}{od}$ ou $oe^2 = oc.od$ ou $r_{n+1} = \sqrt{h_{n+1}.r_n}$

Le calcul approché de π est donc basé sur deux suites $(1/r_n)$ et $(1/h_n)$ avec

$1/r_n < \pi < 1/h_n$

et

$h_2 = 1/4$; $r_2 = \sqrt{2}/4$; $h_{n+1} = \frac{r_n + h_n}{2}$; $r_{n+1} = \sqrt{r_n . h_{n+1}}$

12) L'idée de <u>série</u> et de <u>somme infinie</u> est aussi apparue dans notre expérience. Ainsi:

$4/3 = 1 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots..$
$\sqrt{2} = 1 + 0{,}4 + 0{,}01 + 0{,}004 + \ldots..$

Tout nombre réel considéré comme un décimal est manifestement une somme infinie ou série.

Toute série nous apparait comme une double suite : d'abord la suite des <u>termes de la série</u> $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2175}, \ldots, u_n, \ldots)$

ensuite, la suite des <u>sommes partielles de la série</u>

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_n = (u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_n, \ldots)$$

==

EXERCICES

14. Reprendre le calcul approché de π à l'aide d'un programme.

15. a) Utilisez une calculatrice pour examiner les sommes partielles de la série harmonique

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \quad \text{ou } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Ces sommes partielles dépassent-elles 2,3,4, etc...? (on ne recherche pas encore un résultat complet).

b) Même exercice avec

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots..$$

16. Quelle est la loi de formation des suites suivantes :

a) 1,3,6,10,15,21,28,...
b) 1,1,2,3,5,8,13,21,34,...
c) 1,2,5,12,29,70,169,408,...
d) 1,1,3,1,5,3,7,1,9,5,11,3,13,7,15,...
e) 1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,...
f) 1,2,3,7,43,1807,3263443,...

17. Les carrés emboîtés: démontrez que l'intersection des intérieurs des carrés C_i est constituée d'un et d'un seul point. Utilisez le théorème des intervalles emboîtés (ex. 11) et observez que celui-ci fait intervenir deux suites.

18. Partant d'un triangle T_1, on construit le triangle T_2 dont les sommets sont les milieux des côtés de T_1; puis on construit le triangle T_3 dont les sommets sont les milieux des côtés de T_2; etc... . Montrez que l'intersection des intérieurs des T_i, $i \in \mathbb{N}$, est constitué d'un seul point.

19. La <u>suite de Fibonacci</u> (ou de Léonard de Pise 1180-1250)

Un des meilleurs mathématicien du Moyen-Age nous a légué une suite devenue célèbre et qui continue à intervenir dans une foule de problèmes non résolus, au point qu'un journal périodique de mathématique lui est entièrement consacré. La présentation traditionnelle est basée sur un élevage de lapins.

On se donne un couple de lapins et l'on admet qu'à partir de l'âge de deux mois, tout couple engendre chaque mois un autre couple et que celui-ci se reproduit de la même manière. On suppose les lapins immortels.

On note f_n le nombre de couples de lapins obtenus après n mois. Ainsi $f_1=1$, $f_2=2$, $f_3=3$, $f_4=5$,...

a) Calculez les f_i pour $i=1,\ldots,10$

b) Trouvez une récurrence exprimant f_n en fonction de f_{n-1} et de f_{n-2}. Utilisez celle-ci pour programmer le calcul des f_i.

c) Observez le taux d'évolution de la population c-à-d la suite des $r_n = f_n/f_{n-1}$. Ce rapport se stabilise-t-il? (On se bornera à expérimenter)

20. Supposons qu'une banque paie un intérêt de 100% (soyons rêveurs !). De ce fait, 1FB placé durant un an donne, intérêt compris, 2 FB.

Quel sera l'intérêt si on le calcule 2 fois par an ?
Quel sera l'intérêt si on le calcule n fois par an ?

==

CONVERGENCE

Certaines suites rencontrées ci-dessus convergent vers une limite. Ainsi

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$$

converge vers la limite 1/3 et tout réel est la limite de la suite de ses approximations successives.

Soit $u: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}: n \to u_n$ une suite de nombres réels. On dit que cette suite converge vers le réel L ou que le réel L est la limite de la suite ou que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ si pour tout voisinage $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ de L où $\varepsilon > 0$, il existe une valeur $N \in \mathbb{N}$ telle que $u_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ pour tout $n \geqslant N$.

Ceci traduit le fait qu'au delà d'un certain nombre de termes, tous les termes de la suite sont aussi proches de L qu'on le désire.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle DIVERGE.

Exemples de suites convergentes

1) $u = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$ tend vers 0

2) $u = (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots)$ tend vers 0

3) $u = (5+1, 5+1/2, 5+1/3, 5+1/4, \ldots)$ tend vers 5

4) $u = (\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots)$ tend vers 1 (on ne cherchera pas encore à prouver cette propriété)

Exemples de suites divergentes

1) $u = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$

2) $u = (-7, -6, -5, -4, \ldots)$

3) $u = (10^1, 10^2, 10^3, \ldots)$

4) $u = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

5) $u = (-3, -6, -9, -12, \ldots)$

6) $u = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots)$

Théorème 4 :

a) toute suite croissante de nombres réels qui possède une borne supérieure, possède une limite qui est son supremum;

b) toute suite décroissante de nombres réels bornée inférieurement, possède une limite qui est son infimum.

Démonstration : (il suffit d'établir (a) pour des raisons de symétrie)

Soit une suite croissante bornée supérieurement

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \ldots$$

et supposons que L soit le supremum de l'ensemble des u_i, l'existence de L étant livrée par le théorème 2.

Soit $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$. Par définition de L, il existe un entier N tel que $L-\varepsilon < u_N$. Comme la suite est croissante, on a pour tout $n \geqslant N$, $L-\varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant L$

Donc $L = \lim_{n\to\infty} u_n$, ce qu'il fallait démontrer.

Observons la réciproque: si une suite croissante u de nombres réels converge vers L, alors L est une b.s. de l'ensemble des $\{u_n\}$ car si $u_n > L$, on a pour $\varepsilon < L-u_n$ que $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.

==

EXERCICES

21. Les suites suivantes convergent-elles?

a) $u_n = n$

b) $u_n = 2 + 1/2^n$

c) $u_n = \dfrac{2000}{\sqrt{n+1}}$

d) $u_n = (-1)^n$

e) $u_n = (-1)^{2n+1}$

f) $u_n = 2^n$

g) $u_n = 1^n$

h) $u_n = (1/2)^n$

i) $u_n = (-2/3)^n$

j) $u_n = (r)^n$

k) $u_n = (5/4)^n$

l) $u_n = (1 + \dfrac{1}{10^{33}})^n$

m) $u_n = (1 - \dfrac{1}{10^{33}})^n$

o) $u_n = n^{2/3}$

p) $u_n = 2n - (-1)^n$

q) $u_n = \dfrac{2n}{1+n^2}$

r) $u_n = \dfrac{n^2}{3n+1}$

s) $u_n = \dfrac{n}{100 + \sqrt{n}}$

t) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - 2n}{8n}$

u) $u_n = \dfrac{5n}{\sqrt{n^2+1}}$

v) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

w) $u_n = (-1)^n . \dfrac{n+1}{n-1}$

x) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$

y) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3 + \dfrac{u_{n-1}}{4} \end{cases}$

==

SUITE ARITHMETIQUE DE BASE a ET DE RAISON r $a, r \in \mathbb{R}$

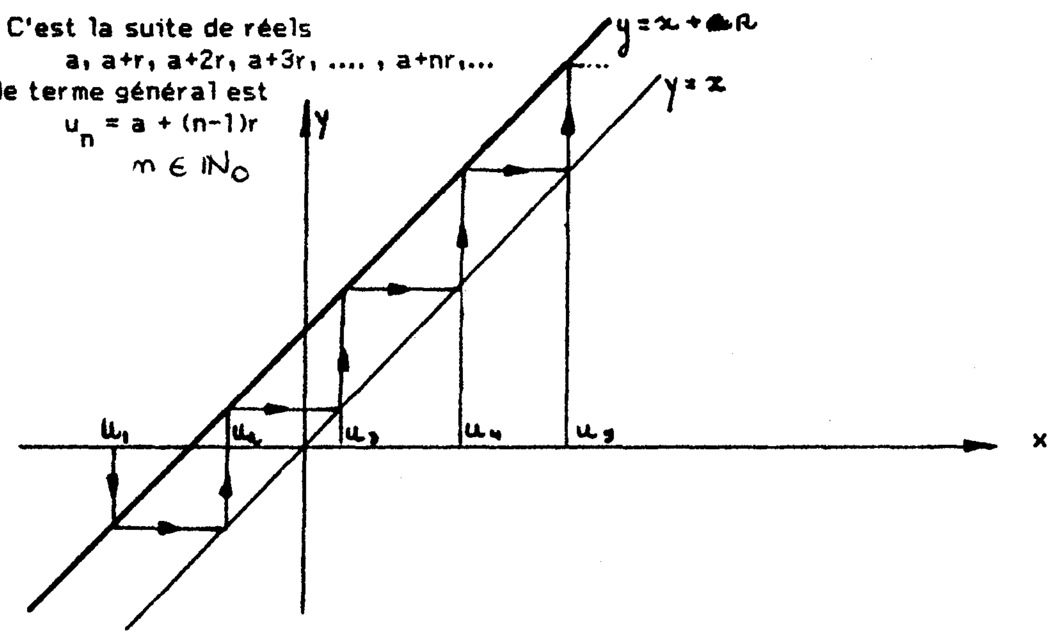
C'est la suite de réels

$a, a+r, a+2r, a+3r, \ldots, a+nr, \ldots$

dont le terme général est

$u_n = a + (n-1)r$

$n \in \mathbb{N}_0$



On raconte l'histoire suivante au sujet de C. Gauss (1777- 1895). Lorsqu'il avait huit ans, son instituteur désireux d'avoir une heure de tranquilité, demanda aux élèves de calculer 1+2+3+...+98+99. Quelques minutes plus tard, Gauss présenta la réponse. Comment fit-il ? 1+99=100 , 2+98=100 , 3+97=100,... On obtient ainsi 49 termes égaux à 100 et le terme solitaire 50. La réponse est donc 4950.

===

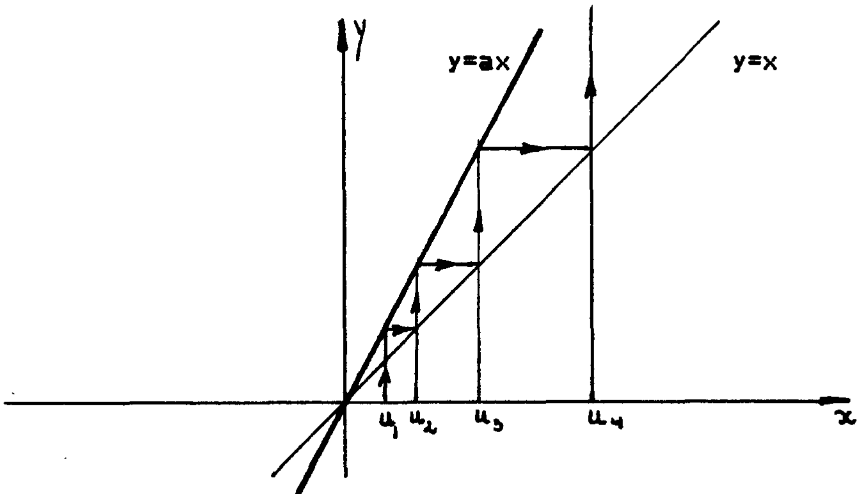
EXERCICE

22. Montrez que la somme $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (a+ir)$ des n premiers termes d'une suite (u) arithmétique, est égale à $S_n = \frac{n}{2}.(2a+(n-1)r) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

===

SUITE GEOMETRIQUE DE BASE a ET DE RAISON r

C'est la suite des réels $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n, \ldots$ dont le terme général est $u_n = a.r^{n-1}$.



Le produit des n premiers termes d'une suite géométrique se calcule d'une manière analogue à la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.

===

EXERCICE

23. Montrez que le produit des n premiers termes d'une suite géométrique vaut

$$P_n = \sqrt{(u_1.u_n)^n}$$

===

Comment calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?

On sait que $S_n = u_1 + u_2 + \ldots. + u_n$

et que $S_n.r = \quad u_2 + \ldots. + u_n + u_{n+1}$

Soustrayons ces deux égalités membre à membre. On a

$$S_n(1-r) = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1.r^n$$

ou encore $\quad S_n = u_1.\frac{1-r^n}{1-r}$

==

EXERCICES

24. Trouvez 8 nombres qui sont les termes successifs d'une suite arithmétique, le premier valant 3, le dernier 38.

25. Trouvez 6 nombres qui sont les termes successifs d'une suite géométrique, le premier valant 6, le dernier 36.

26. Sachant que la somme de 7 termes successifs d'une suite arithmétique vaut -98 et que le dernier de ces termes vaut -29, que valent ces 7 termes ?

27. Etant donnés deux réels a et b, insérer entre ceux-ci n nombres de manière à former
    1) une suite arithmétique
    2) une suite géométrique

28. Démontrez que si a,b,c sont trois termes successifs d'une suite arithmétique, il en est de même pour a^2, $2b^2-ac$, c^2.

29. Que vaut la somme des n premiers nombres pairs ?

30. Déterminez trois nombres successifs d'une suite arithmétique dont la somme vaut 3 et dont la somme des carrés vaut 21.

31. Résoudre $x^3-7x^2+14x-8 = 0$ sachant que cette équation a trois racines en suite géométrique.

32. Calculez $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2^2} + 2^2 + \dots + \frac{1}{2^{20}} + 2^{20}$

33. Calculez la valeur d'un capital qui a rapporté 720 FB en deux ans au taux de 8%.

34. Montrez par récurrence que $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0$$

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0$$

$$1^4+2^4+\dots+n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}_0$$

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2, \sum_{n=1}^{\infty} n^3, \sum_{n=1}^{\infty} n^4$ divergent.

35. Combien l'inéquation $|x| + |y| \leqslant 1000$ admet-elle de solutions (x,y) où $x,y \in \mathbb{Z}$?

36. Si les mesures des angles d'un polygone convexe de 9 côtés sont en progression arithmétique, alors l'un des angles mesure nécessairement 140°. Justifiez.

37. Si u et v sont deux suites croissantes telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n, montrez que

a) si la suite (v_n) converge vers L, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq L$

b) si la suite (u_n) diverge, alors la suite (v_n) diverge.

c) appliquez la propriété (b) à l'exercice 34 en montrant que les formules obtenues sont inutiles pour obtenir la divergence des séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2, \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3, \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4$.

38. Suite de Fibonacci (voir exercice n°19)

a) montrez que $r_{2n} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{r_{2n-2}}} + 1$ En déduire que la suite des r_{2n} possède une limite vérifiant L^2-L-1 d'où $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).

b) montrez de même que r_{2n-1} tend vers L et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

39. Si $|a|<1$, montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Supposez d'abord que $0<a<1$ et poser b = 1/a. Alors $b>1$.

Observez que $\dfrac{1-b^m}{1-b} = 1 + b + b^2 +\ldots + b^{m-1} \geq m$ pour tout entier m.

Montrez sur cette base que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir m de telle manière que $b^m > 1/\varepsilon$ c'est-à-dire $a^m < \varepsilon$.

40. a)En utilisant l'exercice no 39, montrez que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a.r^n$ diverge pour $|r| \geq 1$ et que cette série converge vers $\dfrac{a}{1-r}$ pour $|r|<1$.

b)Montrez que $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$ converge vers 2.

41. Calculez la fraction égale à a) 3,33333...

b) 0,212 322 322 322 322 ...

42. Calculez $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^4} - \dfrac{1}{2^5} + \dfrac{1}{3^6} + \ldots$

43. Dans un cercle de rayon R, on inscrit un carré; dans le carré, on incrit un cercle;... . Calculez la somme des aires des cercles et des carrés.

44. Montrez que la série harmonique

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots . + \dfrac{1}{n} + \ldots .$ diverge

A cet effet, montrez que les sommes partielles s_n vérifient

$s_4 > 2$; $s_8 > 2{,}5$; $s_{16} > 3$; $s_{32} > 3{,}5$; $s_{64} > 4$; ...

45. Etudiez les séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$

(sachant que cette série converge, essayez de déterminer sa limite)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

==

RESUME

$K,+,.,\leqslant$ **est un corps commutatif totalement ordonné SSI**

1) $K,+$ est un groupe commutatif de neutre 0
2) $K_0,.$ est un groupe commutatif
3) $K,\leqslant$ est totalement ordonné
4) $a.(b+c) = a.b + a.c$ pour tout $a,b,c \in K$
5) $a \leqslant b \Rightarrow a+c \leqslant b+c$
6) $a \leqslant b$ et $c > 0 \Rightarrow a.c \leqslant b.c$

Une borne supérieure de $A \subset K$ est un élément $s \in K$ tel que pour tout $a \in A$: $a \leqslant s$
Une borne inférieure de $A \subset K$ est un élément $i \in K$ tel que pour tout $a \in A$: $i \leqslant a$
Un maximum de $A \subset K$ est une borne supérieure de A qui appartient à A
Un minimum de $A \subset K$ est une borne inférieure de A qui appartient à A
Un supremum de $A \subset K$ est la plus petite borne supérieure de A
Un infimum de $A \subset K$ est la plus grande borne inférieure de A

$\mathbb{R}$ **est complet :** toute partie non vide, bornée inférieurement (supérieurement) possède nécessairement un infimum (supremum)

Suite convergente : soit $u: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} : n \rightarrow u_n$ une suite de nombres réels

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L \Leftrightarrow$ pour tout $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ pour tout $n \geqslant N$

Toute suite croissante (décroissante) de nombres réels qui possède une borne supérieure (inférieure) possède une limite qui est son supremum (infimum).

Une **suite arithmétique** de base a et de ~~rayon~~ raison r est la suite des réels

$a, a+r, a+2r, \ldots, a+(n-1)r, \ldots$ $\quad a,r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)r)$$

Une **suite géométrique** de base a et de ~~rayon~~ raison r est la suite des réels

$a, a.r, a.r^2, \ldots, a.r^{n-1}, \ldots$ $\quad a,r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n = a.\frac{1-r^n}{1-r}$$

si $|r| < 1$, $S_\infty = a.\dfrac{1}{1-r}$