# 1. TRIGONOMETRIE

3h/s, 5h/s, 7h/s

Rappels : VM3, chapitre 18; VM4, chapitres 2 et 7

## CE QU'IL NE FAUT PAS OUBLIER :

En quatrième, nous avons appris à simplifier l'étude des angles grâce à diverses conventions.

* On se donne un cercle unité C, de centre o et de rayon égal à 1.
* On fixe un repère orthonormé $e_1, e_2$ sur C.
* Etant donné un angle orienté dans le plan du cercle, on transporte par déplacement son sommet sur o et son premier côté sur la demi-droite $oe_1$.
* Dès lors, le 2e côté de l'angle se place sur une demi-droite d'origine o qui détermine sur C un point a. Il revient au même de se donner l'angle ou de se donner le point a.
* Les mesures d'angles s'identifient à des mesures d'arcs de cercle sur C.

Diverses unités ont été considérées en liaison avec les mesures d'angles: le tour, le degré, le radian. Le radian est l'angle qui intercepte sur le cercle unité un arc de longueur égale à l'unité.

C'est l'unité qui est utilisée de manière implicite dans toutes les théories mathématiques. Elle apporte certaines simplifications en permettant d'identifier une mesure d'angle à une mesure d'arc de cercle (unité) et plus tard nous verrons qu'elle entraîne par exemple que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Elle s'accompagne aussi de lourdeurs: la mesure de l'unité naturelle, l'angle-tour, est de $2\pi$ (radians) et de ce fait, une foule de formules rencontrées dans les applications des mathématiques sont encombrées de facteurs égaux à $2\pi$.

Comme nous le savons depuis la 2e année, l'addition des angles qui correspond à la composition des rotations de centre O, conduit à la notion d'angle-tour et à une identification de l'ensemble $\mathbb{R}$ avec l'ensemble des angles-tours. Cette identification se réalise intuitivement par l'enroulement de la droite réelle sur le cercle C en identifiant leurs origines (0 et $e_1$) et leurs unités (1 et le radian).

Cette identification livre une application $\varphi$ du groupe additif des réels sur le groupe des rotations de centre O, telle que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} .$$

Ceci est l'expression précise et ultime de l'enroulement de la droite réelle sur le cercle unité. On dit que $\varphi$ est un morphisme de groupe. L'ensemble des réels que $\varphi$ applique sur le neutre des rotations est $\mathbb{Z}$ si on adopte le tour pour unité, $\mathbb{Z}360°$ si on adopte le degré, $2\pi\mathbb{Z}$ si on adopte le radian.

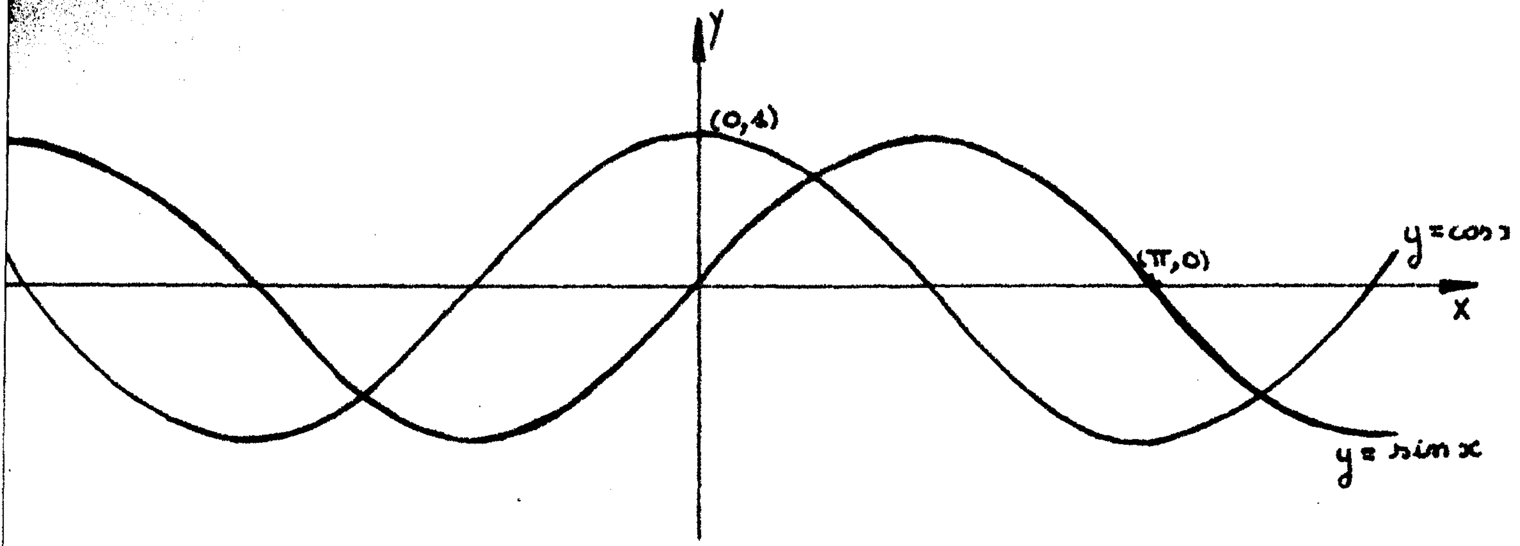
Etant donné le réel x, x s'identifie à un point de C qui possède dans le repère $(o, e_1, e_2)$ des coordonnées qu'on appelle **cos** x et **sin** x (cosinus de x et sinus de x). On pose

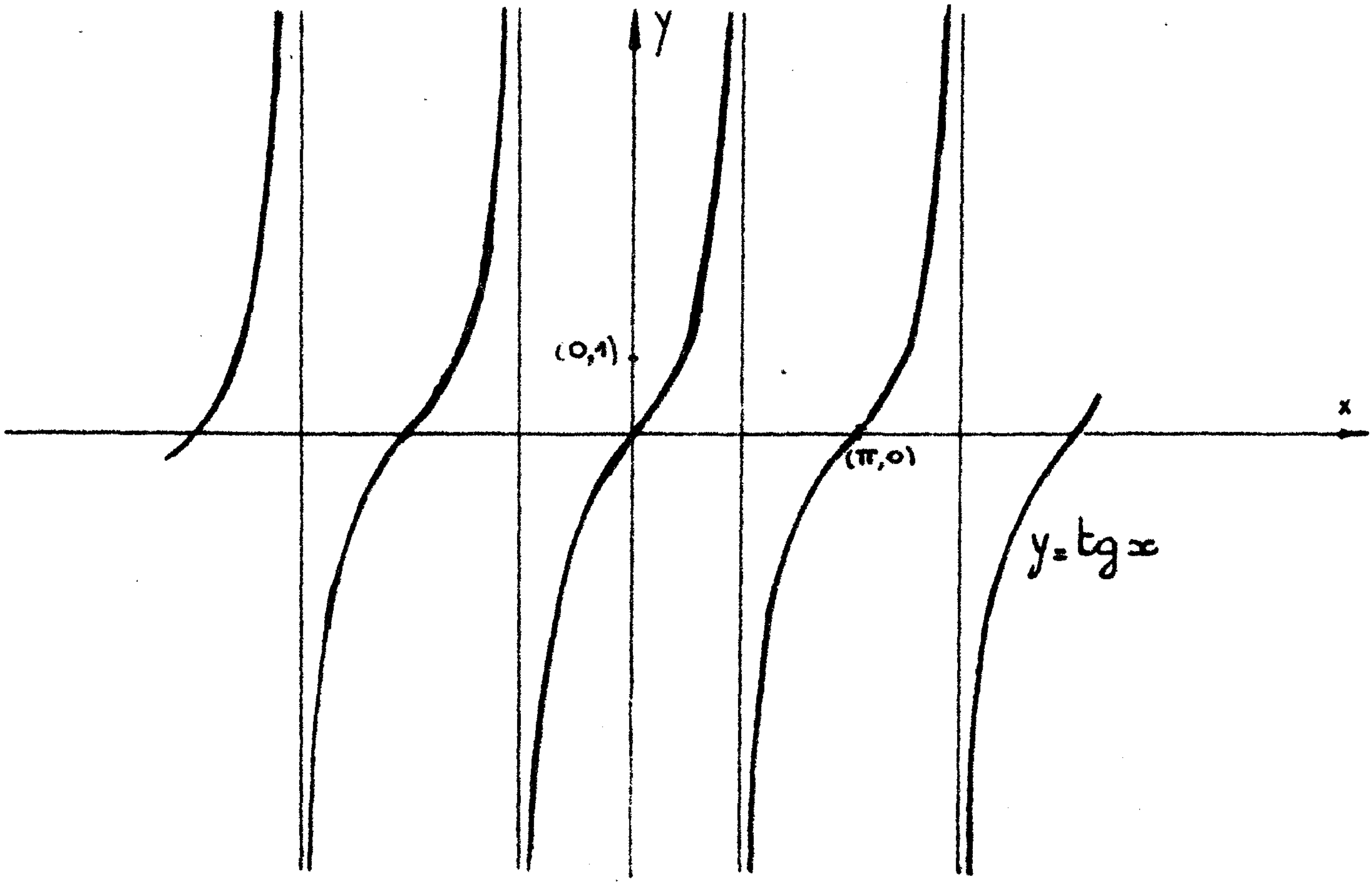
$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(tangente de } x\text{)}$$

et on introduit parfois

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \text{séc } x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \text{cosèc } x = \frac{1}{\sin x} \quad .$$

Il est indispensable de connaître de mémoire les graphiques des trois fonctions cos, sin, tg . Les voici pour rappel:



On observe que $tg\,x$ n'est pas défini pour $\cos x=0$ c'est-à-dire pour

$$x \in \left\{ \ldots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots \right\} = (2\mathbb{Z}+1)\pi/2$$

Rappelons encore que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+2\pi k) = \sin x$ pour $k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x+2\pi k) = \cos x$ pour $k \in \mathbb{Z}$

$tg(x+\pi k) = tg\,x$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

=========================================================================

## EXERCICES

1. Etablir deux graphiques des fonctions ci-dessous, l'un en s'aidant des graphiques rappelés dans le texte, l'autre en s'aidant d'une calculatrice.

a) $y = \cot g\,x$ b) $y = \sec x$ c) $y = \operatorname{cosec} x$

2. Faire le tableau (sans calculatrice) des valeurs précises prises par les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$ lorsque $x$ prend les valeurs

$0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 180°$

ou $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi$

3. A-t-on $1 + tg^2 a = \sec^2 a$ pour tout $a \in \mathbb{R} - (2\mathbb{Z}+1)\pi/2$ ?

4. Résoudre l'équation

$$x^2.\cos^2 a + 2x.\sin a - 1 = 0$$

en fonction de $\sin a$.

5. Remplacer les expressions suivantes par un rapport trigonométrique de l'angle $x$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin(-x)$ | $\sin(\pi - x)$ | $\sin(\pi + x)$ | $\sin(\pi/2 - x)$ | $\sin(\pi/2 + x)$ |
| $\cos(-x)$ | $\cos(\pi - x)$ | $\cos(\pi + x)$ | $\cos(\pi/2 - x)$ | $\cos(\pi/2 + x)$ |
| $tg(-x)$ | $tg(\pi - x)$ | $tg(\pi + x)$ | $tg(\pi/2 - x)$ | $tg(\pi/2 + x)$ |

6. Choisir deux expressions et montrer qu'elles sont indépendantes de $x$,$a$,$b$ :

a) $\sin^2 x.(1 + \cot g^2 x) + \cos^2 x.(1 + tg^2 x)$

b) $tg^2 x + \cot g^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$

c) $\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$

d) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$

e) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

f) $(1 + \sin x + \cos x)^2 - 2(1 + \sin x).(1 + \cos x)$

g) $(\sec a + tg\,a - 1).(\sec a - tg\,a + 1) - 2.tg\,a$

h) $\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b - \mathrm{tg}\, a.\mathrm{tg}\, b.(\mathrm{cotg}\, a + \mathrm{cotg}\, b)$

i) $\sin^8 x + \cos^8 x - 2.(1 - \sin^2 x.\cos^2 x)^2$

==========================================================================

**FORMULES D'ADDITION :**

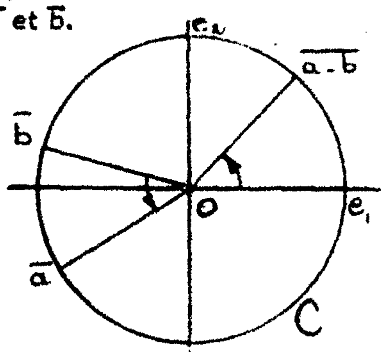
Les fonctions trigonométriques sin x, cos x, tg x donnent lieu à une foule de relations ou formules qui peuvent être utiles dans diverses applications. La plupart de ces relations se déduisent de l'une d'elles qu'il convient d'établir de manière indépendante.

Cette formule de base est

(1) $\boxed{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \quad \text{pour tout } a,b \in \mathbb{R}}$

Rappelons la démonstrations donnée dans VM4, chapitre 7, en la complétant quelque peu.

Reportons-nous au cercle unité C. Sur C, les angles-tours a et b déterminent des points $\overline{a}$ et $\overline{b}$.




La rotation de centre o qui transforme $\overline{b}$ en $\overline{a}$, tranforme $e_1$ en le point $\overline{a-b}$. Les coordonnées de ces points sont:

$\overline{a} = (\cos a, \sin a)$
$\overline{b} = (\cos b, \sin b)$
$\overline{a-b} = (\cos(a-b), \sin(a-b))$

On exprime le produit scalaire $\overline{oa}.\overline{ob}$ de deux manières et on en tire la relation cherchée:

$\overline{oa}.\overline{ob} = |\overline{oa}|.|\overline{ob}|.\cos(\widehat{\overline{b}o\overline{a}}) = 1.1.\cos(a-b)$

et $\overline{oa}.\overline{ob} = \cos \overline{a}.\cos \overline{b} + \sin \overline{a}.\sin \overline{b} = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

Passons à la deuxième formule :

(2) $\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \quad \text{pour tout } a,b \in \mathbb{R}}$

Celle-ci se dérive de (1) en remplaçant b par -b. Ce qui donne:

$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a.\cos(-b) + \sin a.\sin(-b)$

Comment poursuivre? En observant que $\overline{b}$ et $\overline{-b}$ sont symétriques par rapport à la droite $oe_1$ sur C, de sorte que

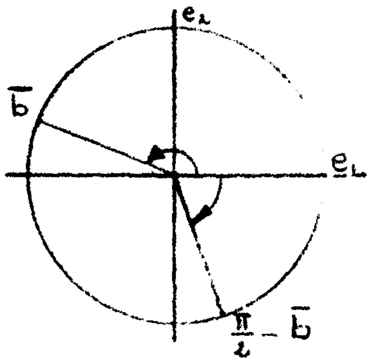
$\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$

Dès lors, on a le résultat voulu.

Passons au sinus:

| | |
|---|---|
| (3) | $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ <br> $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$ |

La deuxième formule se dérive de la première comme (2) se déduit de (1). Et la première? Peut-on la ramener à (2)? Peut-on remplacer $\sin(a+b)$ par un cosinus et progresser de la sorte? Oui.




On voit sur C que

$\cos(\pi/2 - b) = \sin b$

$\sin(\pi/2 - b) = \cos b$

grâce à une rotation de 90° de centre o. Dès lors,

$\sin(a+b) = \cos(\pi/2 - (a+b)) = \cos((\pi/2 - a) - b)$

(ici se situe une petite astuce), d'où

$$\sin(a+b) = \cos(\pi/2 - a).\cos b + \sin(\pi/2 - a).\sin b$$
$$= \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

---

## EXERCICES

7. Démontrez les formules :

| | | |
|---|---|---|
| (4) | $\mathrm{tg}(a+b) = \dfrac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a.\mathrm{tg}\, b}$ | $\mathrm{tg}(a-b) = \dfrac{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b}{1 + \mathrm{tg}\, a.\mathrm{tg}\, b}$ |

Le calcul est facile. Discutez avec soin de domaine de validité de la démonstration: les formules sont valables pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ tels que ....

8. Trouvez des formules analogues à (4) pour $\mathrm{cotg}(a+b)$ et $\mathrm{cotg}(a-b)$. Peut-on espérer obtenir des formules exprimant $\sec(a+b)$ en fonction de $\sec a$, $\sec b$, $\mathrm{cosec}\, a$, $\mathrm{cosec}\, b$ ?

9. Le piège de la linéarité: peut-on affirmer que

$$\cos(a+b) = \cos a + \cos b \qquad \text{pour tout } a,b \in \mathbb{R} \ ?$$

Trouvez-vous des valeurs de a et de b pour lesquelles cette relation est vérifiée ?

10. Une linéarité plus bénéfique :

a) Etudiez, dans $\mathbb{R}^3$, le graphique de la fonction

$$(x,y) \longrightarrow \cos(x+y)$$

c'est-à-dire la surface d'équation $z = \cos(x+y)$.
Observez que si $x+y=a$, z prend une valeur constante. En déduire que la surface est une réunion de droites parallèles horizontales qui s'appuient sur le "profil" $y=0$, $z = \cos x$.
Faites le rapprochement avec une tôle ondulée.

11. Même exercice pour $(x,y) \longrightarrow \mathrm{tg}(x+y)$

12. Etablissez une formule donnant $\cos(a+b+c)$

---

RETOMBEES DES FORMULES D'ADDITION :

Les formules d'addition (1),(2),(3),(4), obtenues ci-dessus, donnent lieu à une série de cas particuliers.

Formules de multiplication:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$
$$= 2.\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2.\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2.\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{R} - \{(2\mathbb{Z}+1)\pi/2 \cup (2\mathbb{Z}+1)\pi/4\}$$

Il suffit de remplacer b par a dans cos(a+b), sin(a+b), tg(a+b) pour obtenir ce résultat. On peut pousser plus loin puisque

$$\cos 3a = \cos(2a+a) = \cos 2a.\cos a - \sin 2a.\sin a$$
$$= (\cos^2 a - \sin^2 a).\cos a - 2.\sin^2 a.\cos a$$

d'où

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3.\sin^2 a.\cos a = \cos^3 a - 3.(1 - \cos^2 a).\cos a$$
$$= 4.\cos^3 a - 3.\cos a$$

On obtient de même sin 3a, tg 3a, cos 4a (voir exercices).

Formules de division :

$$1 + \cos a = 2.\cos^2 \frac{a}{2} \qquad 1 - \cos a = 2.\sin^2 \frac{a}{2} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

qui s'obtiennent immédiatement à partir des formules de multiplication.

Formules en tg a/2 :

Il est remarquable, et souvent utile dans divers calculs, qu'on puisse exprimer cos a, sin a et tg a par des fonctions rationnelles de tg a/2. Les voici:

$$\sin a = \frac{2.\operatorname{tg} a/2}{1 + \operatorname{tg}^2 a/2} \qquad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a/2}{1 + \operatorname{tg}^2 a/2} \qquad \operatorname{tg} a = \frac{2.\operatorname{tg} a/2}{1 - \operatorname{tg}^2 a/2}$$

Les calculs sont faciles. Voici, à titre d'exemple:

$$\frac{2.\operatorname{tg} a/2}{1 + \operatorname{tg}^2 a/2} = \frac{2.\frac{\sin a/2}{\cos a/2}}{1 + \frac{\sin^2 a/2}{\cos^2 a/2}} = 2.\sin a/2.\cos a/2 = \sin a$$

Le domaine de validité des formules est plus délicat: tg a/2 est défini pour tout $a \in \mathbb{R}-(2\mathbb{Z}+1)\pi$. Fort heureusement, $1 + tg^2 a/2 \neq 0$ dès que tg a/2 est défini. Donc les deux premières formules sont valables pour tout $a \in \mathbb{R}-(2\mathbb{Z}+1)\pi$. La troisième exige de plus que $a \notin (2\mathbb{Z}+1)\pi/2$. Donc elle est valable pour

$$a \in \mathbb{R} - [(2\mathbb{Z}+1)\pi \quad \cup (2\mathbb{Z}+1)\pi/2)]$$

Il convient d'être attentif à ces contraintes dans les applications des formules et de tempérer la facilité des calculs par un examen attentif de leurs conditions de validité.

================================================================

## EXERCICES

13. Etablir des formules pour sin 3a (en fonction de sin a), tg 3a (en fonction de tg a), cos 4a.

14. En étudiant une fonction simple comme y = sin x + cos x + 1, on aimera déterminer les points de rencontre de la fonction avec l'axe ox. A cet effet, il faut résoudre l'équation sin x + cos x + 1 = 0 (1). Grâce à la formule de multiplication sin x = 2.sin x/2 .cos x/2 et à celle de division $1 + \cos x = 2\cos^2 x/2$, résoudre (1) revient à résoudre

$$2.\cos x/2.[\sin x/2 + \cos x/2] = 0.$$

On est ramené aux solutions de sin x/2 + cos x/2 = 0 ou de cos x/2 = 0. Une des principales applications des formules rencontrées ci-dessus réside dans la résolution d'équations et celles-ci, à leur tour, interviennent dans l'étude de fonctions.

Résoudre l'équation sin x + cos x + 1= 0

a) par la méthode ci-dessus;

b) en exprimant sin x et cos x en fonction de tg x/2;

c) vérifiez que vous obtenez les mêmes solutions en a et b;
(si ce n'est pas le cas, pensez aux conditions que x doit satisfaire pour que tg x/2 existe )

15. Calculez, simplifiez:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\cos(a+\pi)$ | $\cos(a-\pi)$ | $\cos(\pi - a)$ | $\cos(\pi/2 + a)$ | $\cos(\pi/2 - a)$ |
| $\sin(a+\pi)$ | $\sin(a-\pi)$ | $\sin(\pi - a)$ | $\sin(\pi/2 + a)$ | $\sin(\pi/2 - a)$ |

16. Utilisez les formules d'addition pour déterminer :

$\cos(-a)$ $\sin(-a)$ $tg(-a)$

**Il s'agit de faire un choix parmi les exercices qui suivent. Il ne faut pas prendre ces exercices trop au sérieux. Ils servent uniquement à vous familiariser avec les formules précédentes.**

17. Calculez, simplifiez :

a) $\sin(\pi/2 - 5\pi/6) + \cos(\pi/2 - \pi/3)$

b) $tg(\pi+\pi/4) + tg(\pi-\pi/4)$

c) $\dfrac{\sin(\pi-a).\cot g(3\pi/2+a).\cos(a-2\pi)}{tg(\pi+a).tg(\pi/2+a).\cos(3\pi/2-a)}$

d) $\dfrac{\cot g(a+7\pi/2).\cos(10\pi-a).\mathrm{cosec}(a-\pi)}{tg(5\pi+a).\sec(a-3\pi).\sin(5\pi/2-a)}$

18. Résoudre :

a) $tg\ 2x = -cotg(x - \pi/4)$

b) $\cos^2 x - 3.\cos x + 1 = 0$

c) $\cos x/3 = 1 + \sin x/6$

d) $tg\ 4x = cotg\ 6x$

e) $3.tg^2 x + 5 = \dfrac{7}{\cos x}$

f) $2.cotg^2 x - 2.\sec^2 x = 1$

g) $\sin 3x = \cos x$

h) $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \cos 2x - \sin 2x.tg\ x$

19. Jouons les acrobates! Choisir deux des expressions qui suivent et démontrer qu'elles sont vraies pour tout a qui appartient au domaine de définition des fonctions utilisées. Chercher ces domaines.

a) $\dfrac{tg(\pi/4 + a) + tg(\pi/4 - a)}{tg(\pi/4 + a) - tg(\pi/4 - a)} = cosec\ 2a$

b) $tg(\pi/4 + a) - tg(\pi/4 - a) = 2.tg\ 2a$

c) $\dfrac{cotg^2 a - 1}{cotg^2 a + 1} = \cos 2a$

d) $\dfrac{1 - tg\ a/2.cotg\ a}{1 + tg\ a/2.cotg\ a} = \dfrac{\sin a/2}{\sin 3a/2}$

e) $\sin 2a = \dfrac{2}{tg\ a + cotg\ a}$

f) $\dfrac{tg^2 2a}{2 + tg^2 2a} = \dfrac{2.tg^2 a}{1 + tg^4 a}$

g) $\sin 2a = \dfrac{1}{cotg\ a - cotg\ 2a}$

h) $\sin 2a = \dfrac{1 - tg^2(\pi/4 - a)}{1 + tg^2(\pi/4 - a)}$

i) $\dfrac{1 - \sin 2a}{1 + \sin 2a} = tg^2(\pi/4 - a)$

j) $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2a}{2}}}} = \cos a/4$

20. Montrer que les expressions suivantes sont indépendantes de t :

a) $\cos^2 t + \cos^2(120° + t) + \cos^2(120° - t)$

b) $\cos^2 t - 2.\cos t.\cos a.\cos(a+t) + \cos^2(a+t)$

21. Dans un triangle d'angles a,b,c, démontrez que
a) $\text{tg } a + \text{tg } b + \text{tg } c = \text{tg } a.\text{tg } b.\text{tg } c$

b) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2.\cos a.\cos b.\cos c = 1$

22. Si $a+b+c = \pi/2$, démontrez que

$$\text{tg } a.\text{tg } b + \text{tg } b.\text{tg } c + \text{tg } c.\text{tg } a = 1$$

23. a est un angle compris entre 0 et $\pi/2$ et $\cos a = 12/13$. Calculez
$\sin a$, $\cos 2a$, $\text{tg } 2a$

==========================================================================

**FORMULES DE SIMPSON (1710-1761)**

$$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

pour tout $p,q \in \mathbb{R}$

Quelle est l'utilité de ces formules ? Elles permettent de remplacer une somme ou une différence par un produit, ce qui est particulièrement intéressant pour résoudre des équations telles que $\cos p + \cos q = 0$.

Comment les prouve-t-on ? On se ramène encore aux formules d'addition:

$$\begin{array}{rl} & \cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\ + & \underline{\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b} \\ \cos(a+b)+\cos(a-b) = & 2.\cos a.\cos b \end{array}$$

Si p, q sont des réels donnés, on pose $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$

Alors $a+b = p$ , $a-b = q$ et la relation ci-dessus livre le premier résultat souhaité. Les autres formules de Simpson se démontrent de la même manière.

==========================================================================

## EXERCICES

**Jouons, jouons,.... Choisissez quelques exercices parmi ceux qui suivent.**

24. Démontrez que

a) $\frac{\cos 2p - \cos 2q}{\sin 2p + \sin 2q} = tg(q-p)$

b) $tg\ 3x = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x}$

c) $\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{\sin x + 2.\sin 3x + \sin 5x}{\sin 3x + 2.\sin 5x + \sin 7x}$

d) $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = 4.\sin^2 \frac{x-y}{2}$

e) $\sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c) = 4.\sin a.\sin b.\sin c$

f) $\frac{\sin x + 2.\sin 2x + \sin 3x}{\sin 3x + 2.\sin 4x + \sin 5x} = \frac{1}{2.\cos 2x}$

25. Factorisez

a) $\cos 6a - \cos 4a - \cos 2a + 1$
b) $\sin a + \sin b + \sin (a+b)$
c) $\cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1$

26. Résolvez l'équation $(\cos 3a + \cos a).x^2 - 2x.\sin 3a + \cos a - \cos 3a = 0$ en fonction de tg a.

27. Résolvez

a) $\sin x + 2.\sin 3x + \sin 5x = 0$

b) $\sin 5x + \sin x = 1 - 2.\sin^2 x$

c) $1 + \sin x.\cos x = \cos^2 x$

d) $2.\cos x + 3 = 4.\cos\frac{x}{2}$

e) $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$

f) $\sin x + \sin 3x = 2.\sin x$

g) $\cos^2 x + \frac{3}{2}.\cos x + \frac{1}{2} = 0$

h) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

i) $1 + \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x$

j) $\sin 2x.\sin 3x = \cos 2x.\cos 3x$ ( à faire mentalement ! )

k) $2.\cos x.\sin x + 2.\sin x + \cos x + 1 = 0$

l) $\cos^4 x + 6.\cos^2 x \cdot \sin^2 x - 7.\sin^4 x = 0$

m) $\cos 2x.\mathrm{cosec}\, x = 1$

n) $\sqrt{2}.\sin x - \mathrm{tg}\, x = 0$

o) $\cos 4x + \sin 2x = 0$

~~p) 2.cos x + 3 = 4.cos x/2~~

q) $5.\cos^2 x + 2.\sin^2 x = 11/4$

r) $3.\sin^2 x + 4.\sin x.\cos x + \cos^2 x = 0$

28. Dans un triangle, a-t-on nécessairement

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4.\sin \frac{a}{2}.\sin \frac{b}{2}.\sin \frac{c}{2} \ ?$$

29. Démontrez a) $(\cos x + \sin x).(\cos 2x + \sin 2x) = \cos x + \cos(3x - 90°)$

b) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4.\cos \frac{a+b}{2}.\cos \frac{b+c}{2}.\cos \frac{a+c}{2}$

30-32. L'équation $a.\cos x + b.\sin x + c = 0$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$

Pour résoudre cette équation, on peut soit se ramener à l'intersection d'un cercle et d'une droite , soit se ramener à une équation quadratique en $\mathrm{tg}\, x/2$ par le changement de variable $t = \mathrm{tg}\, x/2$ (Il est à noter que l'on peut effectuer ce changement de variable si on a vérifié que $x = \pi + 2k\pi$ n'est pas solution de l'équation).

Résolvons par exemple $\cos x - \sqrt{3}.\sin x = 1$. En posant $t = \mathrm{tg}\, x/2$ ($x \neq \pi + 2k\pi$), on obtient

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \sqrt{3}.\frac{2t}{1 + t^2} - 1 = 0$$

ou

$$-2.t^2 - 2.\sqrt{3}.t = 0$$

dont les solutions sont $t = 0$ c-à-d $\mathrm{tg}\, x/2 = 0$ ou $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ou $t = -\sqrt{3}$ c-à-d $x = \frac{-2.\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ .

Il est à noter que le physicien est souvent confronté à l'expression $a.\cos x + b.\sin x$ . Ceci est l'expression mathématique du résultat de la superposition de deux phénomènes vibratoires harmoniques qui, on le sait, aboutit à un nouveau phénomène du même type. Quelle est l'expression mathématique de ce phénomène résultant ?

Ecrivons $a.\cos x + b.\sin x = A.\cos( x - \varphi )$ (1)
Que valent $A$ et $\varphi$ ? Comme $A.\cos( x - \varphi ) = A.\cos \varphi.\cos x + A.\sin \varphi.\sin x$ (2)
et comme l'égalité (1) doit être vérifiée pour tout $x$, on peut identifier les coefficients de $\sin x$ et de $\cos x$ dans les relations (1) et (2):

$$\begin{cases} a = A.\cos \varphi \\ b = A.\sin \varphi \end{cases}$$

ce qui implique

$$\operatorname{tg} \varphi = b/a \quad \text{et} \quad A^2 = a^2 + b^2$$

Ces dernières relations permettent de déterminer A, amplitude de la vibration résultante et de rechercher $\varphi$ , son déphasage.

Choisir un exercice dans la série:

30.Résoudre a) $-\sqrt{3}.\cos x + \sin x = \sqrt{3}$
b) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$
c) $\sin x + 3.\cos x = 1$
d) $\sin 2x + \sqrt{3}.\cos x = 0$

31.Déterminez A, $\varphi$ pour que
$3.\sin x + 4.\cos x = A.\sin( x + \varphi )$
Quelle est la signification géométrique des paramètres A et $\varphi$ ?

32.Résoudre ( $\lambda \in \mathbb{R}$)
a) $(\lambda-1).\cos x = 2\lambda - 5$
b) $\cos x + \sin x = \lambda$
c) $2.\sin^2 x = 3\lambda - \lambda^2$
d) $\cos 2x + 7.\sin x = \lambda$
e) $\sin x + \lambda.\cos x = 2\lambda$
f) $\sin 3x = \lambda.\sin 2x$

================================================================================

## ARC SINUS, ARC COSINUS, ARC TANGENTE :

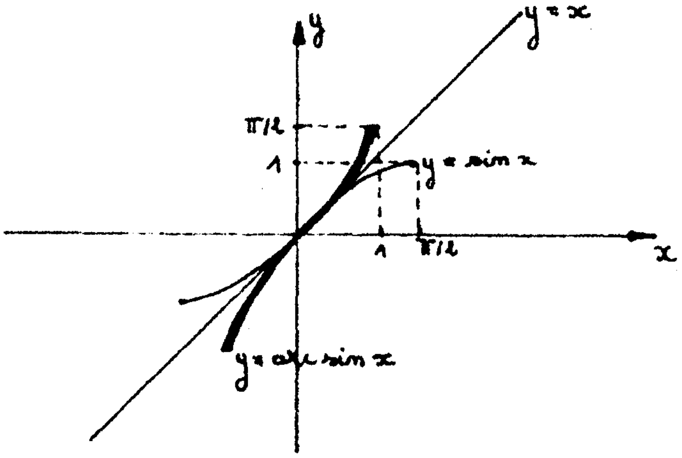
En quatrième, nous avons déjà vu qu'on est souvent amené à déterminer $x$ connaissant $\sin x$ ou $\cos x$ ou $\operatorname{tg} x$, c'est-à-dire à résoudre les équations

$$\sin x = a \quad , \quad \cos x = b \quad , \quad \operatorname{tg} x = c \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Ces problèmes conduisent à l'introduction de nouvelles fonctions dites **cyclométriques** ou **trigonométriques inverses**.

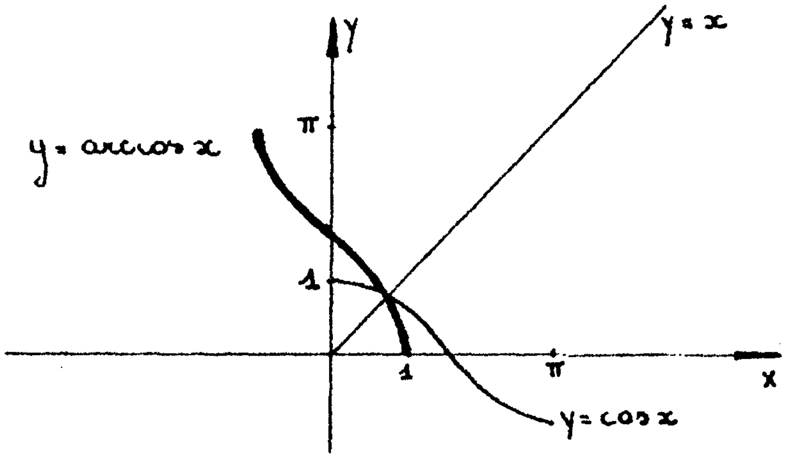
Si $x = \sin y$ et $y \in [ -\pi/2, \pi/2 ]$ , on pose **arc sin x = y** , qui se lit " arcsinus $x$ égale y" ou "l'arc dont le sinus est égal à $x$ est y". Le domaine de définition de cette fonction est $[-1,1]$ . Elle est croissante.

On obtient son graphique à partir du graphique de $y = \sin x$, restreint à $[ -\pi/2, \pi/2]$, par une symétrie par rapport à la droite $y=x$, dans un repère orthonormé.

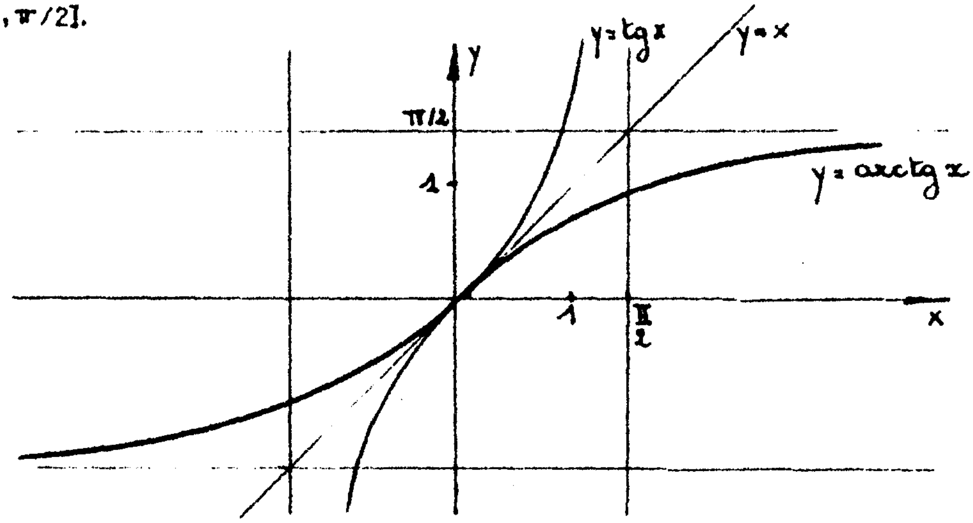


Il est à remarquer que l'on restreint $y = \sin x$ à $[-\pi/2, \pi/2]$ pour obtenir une fonction croissante.

Si $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$, on pose **arccos x = y** qui se lit "y est l'arc dont le cosinus est égal à x". Le domaine de définition de cette fonction est $[-1, 1]$. Elle est décroissante. On en obtient le graphique par une symétrie par rapport à la droite $y = x$, du graphique de $y = \cos x$ sur $[0, \pi]$.




Si $x = \text{tg } y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, on pose **y = arctg x** qui se lit " y est l'arc dont la tangente vaut x". Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ . C'est une fonction croissante. On en obtient le graphique par une symétrie par rapport à la droite $y = x$, du graphique de $y = \text{tg } x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.




Il est à signaler que sur les calculatrices, arcsin x s'obtient par l'utilisation des touches **INV SIN** ou **SIN**$^{-1}$. Cette dernière notation est à ne pas confondre avec l'opérateur $1/\sin x$ qui s'obtient sur calculatrice par **SIN , 1/x**.

==========================================================================

## EXERCICES

33. Utilisez une calculatrice pour calculer

a) arc sin 0.7
b) arc tg (-24)
c) arc cos 2.3

d) arc cos(−0.9)

34. Sachant que sin x = a , calculez cos x et tg x.

35. Completez

sin(arc sin x) =
cos(arc sin x) =
sin(arc tg x ) =
tg(arc cos x ) =

N.B.:cet exercice couvre un piège !!!

36. Démontrez que $\text{arc tg}\,\dfrac{2a - b}{b.\sqrt{3}} + \text{arc tg}\,\dfrac{2b - a}{a.\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3}$

en précisant pour quelles valeurs de a et de b l'égalité est valable.

37. Prouvez qu'on a arc cos x + arc sin x = $\pi$/2 pour tout $x \in \mathbb{R}$

38. Calculez $\text{arc sin}\,\dfrac{3}{5} + \text{arc sin}\,\dfrac{4}{5}$

39. Résoudre a) arc sin 2x + arc cos x = $\pi$
b) $\text{arc sin}\,x = \text{arc sin}\,\dfrac{3}{5} + \text{arc sin}\,\dfrac{1}{3}$

40. Si $x \in [-1,1]$, démontrez que $\text{arc cos}\,x = -\,\text{arc tg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \pi/2$

41. Démontrez que arc tg 1/3 + arc tg 1/5 + arc tg 1/7 + arc tg 1/8 = $\pi$/4

==========================================================================

## RESUME

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\text{cotg } x}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$$

$$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$$

$$\text{tg } (a \pm b) = \frac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a.\text{tg } b}$$

$$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$$

$$\text{tg } 2a = \frac{2\text{tg } a}{1-\text{tg}^2 a}$$

$$\sin x = \frac{2.\text{tg } x/2}{1 + \text{tg}^2 x/2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \text{tg}^2 x/2}{1 + \text{tg}^2 x/2}$$

$$\text{tg } x = \frac{2.\text{tg } x/2}{1 - \text{tg}^2 x/2}$$

$$1 + \cos a = 2.\cos^2 a/2$$

$$1 - \cos a = 2.\sin^2 a/2$$

$$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$

$y = \text{arc}\sin x$ si $x = \sin y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$y = \text{arc}\cos x$ si $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$

$y = \text{arc tg}\, x$ si $x = \text{tg}\, y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$