Chapitre 20: ESPACES VECTORIELS

Dans ce chapitre nous reverrons des notions déjà utilisées dès la quatrième (voir M4 - chapitre 12) ou cette année lors de l' étude des transformations linéaires de E^2 et de E^3 ... une revision s' impose parfois avant une généralisation et une extension !

Définition d' un espace vectoriel

a) Définition intuitive :

Un espace vectoriel est un ensemble d' éléments qui peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres tels que le résultat soit encore un élément de l' ensemble et ce, de telle sorte que les "formules usuelles " de calcul soient encore valables.

b) Définition rigoureuse :

$\mathbb{R},V,+$ est un espace vectoriel si et seulement si

1°) $V,+$ est un groupe commutatif

2°) Pour tout $r,s \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ on a :

a) $r.\vec{u} \in V$

b) $(r.s).\vec{u} = r.(s.\vec{u})$

c) $(r + s).\vec{u} = r.\vec{u} + s.\vec{u}$

d) $r.(\vec{u} + \vec{v}) = r.\vec{u} + r.\vec{v}$

e) $1.\vec{u} = \vec{u}$

Exemples : E^1, E^2, E^3, ... , E^n où $n \in \mathbb{N}_0$

(ensemble des points-vecteurs de l' espace à n dimensions)

$P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ... , $P_n(x)$ $\in \mathbb{N}_0$

(ensemble des polynômes d' au plus de degré n)

$\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... , $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}_0$

(ensemble des n-uples de nombres réels)

M_{nXn} (ensemble des matrices nxn où $n \in \mathbb{N}_0$)

Sous-espace vectoriel d' un vectoriel

Si V,+ est un vectoriel et que $W \subset V$, W est lui-même un espace vectoriel si et seulement si

1°) Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v} \in W$: $\vec{u} + \vec{v} \in W$

2°) Pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{u} \in W$: $r.\vec{u} \in W$

3°) $\vec{o} \in W$

(A savoir justifier)

Exercices :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ est- il un espace vectoriel ?
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ est- il un espace vectoriel ?
3. Si V est un espace vectoriel et $\vec{v}_i \in V$, on appelle combinaison linéaire de vecteurs de V, tout vecteur du type

   $$\sum_{i=1}^{n} r_i.\vec{v}_i \qquad \text{où } r_i \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{v}_i \in V$$

   L' ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de V est-il un espace vectoriel ?
4. Dans $P_2(x)$, l'ensemble des polynômes d' au plus du second degré, on considère

   $$p(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad q(x) = 2x + 1$$

   Soit P, le vectoriel engendré par p(x) et q(x) c' est-à-dire l' ensemble des combinaisons linéaires de p(x) et de q(x).

   a) Déterminer k pour que $kx^2 - x + 1 \in P$

   b) Déterminer les polynômes de P qui admettent une racine nulle. Cet ensemble de polynômes est-il un espace vectoriel ?

   c) Déterminer les polynômes de P qui admettent une racine double. Cet ensemble de polynômes est-il un espace vectoriel ?

Famille génératrice d' un vectoriel

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une famille génératrice de V si et seulement si

pour tout $\vec{v} \ni V$, il existe $r_i \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i.\vec{v}_i$.

Exemples :

a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ où $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}_2$ et $\vec{v}_1$ non parallèle à $\vec{v}_2$ est une famille génératrice de E_2.

b) $\{x^2, x, 2x^2 + 7x + 6, 4, 2x\}$ est une famille génératrice de $P_2(x)$.

Exercices :

1. $\{x^2 + 1, x + 3, 6 - x^2\}$ est-elle une famille génératrice de $P_2(x)$?
2. Sous quelles conditions quatre vecteurs de E^3 forment-ils une famille génératrice de E^3 ?

Vecteurs indépendants, famille libre d' un vectoriel

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une famille libre du vectoriel V ou sont des vecteurs linéairement indépendants si et seulement si aucun des vecteurs de la famille n' est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exemples :

a) $\{x^2, 3\}$ sont deux vecteurs indépendants et forment une famille libre de $P_2(x)$.

b) $\{x^2, 3, 7x^2 + 1\}$ sont des vecteurs dépendants et forment une famille non libre (liée) de $P_2(x)$.

Théorème :

Une famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est libre si et seulement si pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + \ldots + a_n.\vec{v}_n = \vec{o} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

La démonstration de ce théorème a été faite en quatrième (M4 - chapitre 12)

Exercices :

Les familles suivantes sont-elles libres ?

a) Dans V,+ : $\{\vec{u}, \vec{o}, \vec{v}\}$

b) Dans V,+ : $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$

c) Dans $P_2(x)$: $\{x^2 + 2x + 3, 3x^2 + 2x, -3x^2 + 2x + 9\}$

Propriétés :

a) Toute famille autre que $\{\vec{o}\}$ d'un vectoriel , contenant le vecteur $\vec{o}$ est non-libre (liée).

b) Si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une famille libre d' un vectoriel, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est également une famille libre. La réciproque n' est pas vraie.

Base d' un espace vectoriel

Une base d' un vectoriel est une famille génératrice et libre de ce vectoriel.

Dans un vectoriel V,+ de base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, on appelle coordonnées de $\vec{v} \in V$ dans cette base, le n-uple de réels $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ si $\vec{v} = r_1.\vec{e}_1 + r_2.\vec{e}_2 \ldots + r_n.\vec{e}_n$.

Exercices :

1. Dans le vectoriel $P_2(x)$, quelle est la coordonnée du vecteur
$$-2x^2 + 3x - 1$$
   a) dans la base $\{x^2, x, 1\}$?
   b) dans la base $\{x^2 + x, x^2 - x, 1\}$?
2. a) Montrer que $\{(x, x + y, x - y)\}$ tels que $x, y \in \mathbb{R}$ est un sous-vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
   b) Déterminer une base de ce sous-vectoriel.
   c) Déterminer k pour que (3, k, 2k) appartienne à ce sous-vectoriel. Quelle est la coordonnée de ce triple dans la base trouvée en (b) ?

Propriétés :

1. Tout vecteur d' un espace vectoriel n' a qu' une seule coordonnée dans une base donnée . Pourquoi ?
2. Le nombre de vecteurs d' une base d' un vectoriel est appelé **dimension** du vectoriel. Dans un vectoriel de dimension n, une famille libre ou une famille génératrice de n vecteurs est une base de ce vectoriel. Pourquoi ?

Exercices :

1. Quelles sont les dimensions des vectoriels suivants ?

Pour chaque exemple, citer deux bases du vectoriel.

a) E^1, E^2, E^3, ... , E^n où $n \in \mathbb{N}_0$

b) $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... , $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}_0$

c) $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ... , $P_n(x)$ où $n \in \in \mathbb{N}_0$

d) M_{2X2}, M_{3X3}, ... , M_{nXn} où $n \in \mathbb{N}_0$

2. Soient P et Q deux familles de $\mathbb{R}_3$:

P : $\{(0, 1, 4) , (-2, 2, -3)\}$

Q : $\{(-6, 8, -1) , (-4, 7, 6)\}$

a) Montrer que les vecteurs de P et de Q engendrent le même espace vectoriel de dimension deux. (On appelle espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, l' ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs)

b) Calculer les coordonnées des vecteurs de P et de Q dans la base $\{(-6, 8, -1) , (-4, 7, 6)\}$

Intersection de deux vectoriels

Théorème :

L' intersection de deux sous-vectoriels d' un vectoriel V est un sous-vectoriel de V.

Démonstration :

Soients V_1 et V_2, deux sous-vectoriels d' un vectoriel V, $\vec{a} \in V_1 \cap V_2$, $\vec{b} \in V_1 \cap V_2$

a) $\vec{a} + \vec{b} \in V_1 \cap V_2$ car comme $\vec{a} \in V_1 \cap V_2$ et que $\vec{b} \in V_1 \cap V_2$, on a que $\vec{a} \in V_1$, $\vec{b} \in V_1$ ce qui implique que $\vec{a} + \vec{b} \in V_1$, V_1 étant un vectoriel, d' une part et que

$\vec{a} \in V_2$, $\vec{b} \in V_2$, ce qui implique que $\vec{a} + \vec{b} \in V_2$, V_2 étant un vectoriel, d' autre part

On a donc $\vec{a} + \vec{b} \in V_1 \cap V_2$.

b) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $r.\vec{a} \in V_1 \cap V_2$ (Pourquoi ?)

c) $\vec{o} \in V_1 \cap V_2$ (Pourquoi ?)

Somme de deux vectoriels

Théorème :

La somme de de deux sous-vectoriels d' un vectoriel V est un sous-vectoriel de V.

Démonstration :

Soient V_1 et V_2, deux sous-vectoriels d' un vectoriel V,

$$V_1 + V_2 = \{ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ où } \vec{v}_1 \in V_1 \text{ et } \vec{v}_2 \in V_2 \}$$

Soient $\vec{a} \in V_1 + V_2$ et $\vec{b} \in V_1 + V_2$, on a

a) $\vec{a} + \vec{b} \in V_1 + V_2$ car

$\vec{a} \in V_1 + V_2$ implique que $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ où $\vec{a}_1 \in V_1$ et $\vec{a}_2 \in V_2$

$\vec{b} \in V_1 + V_2$ implique que $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ où $\vec{b}_1 \in V_1$ et $\vec{b}_2 \in V_2$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) \\ &= (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2) \text{ où } \vec{a}_1 + \vec{b}_1 \in V_1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \in V_2\end{aligned}$$

On a donc $\vec{a} + \vec{b} \in V_1 + V_2$

b) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $r.\vec{a} \in V_1 + V_2$ (Pourquoi ?)

c) $\vec{o} \in V_1 + V_2$ (Pourquoi ?)

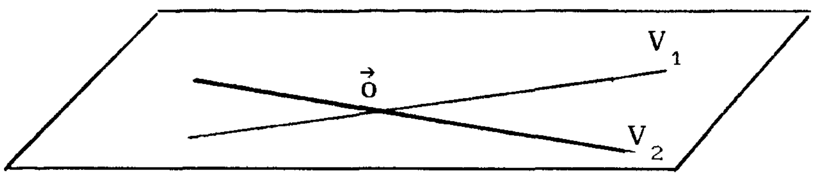
Exercices :

Dans l' espace vectoriel E_3, déterminer $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$ et montrer que

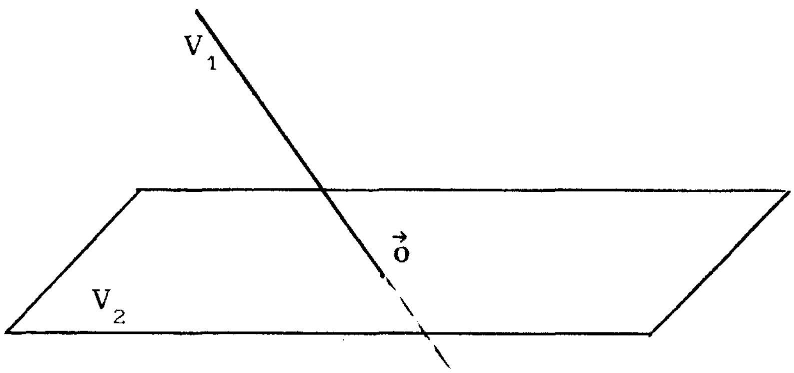
$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

dans les exemples suivants:

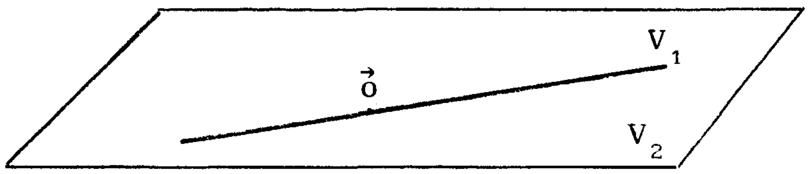
a)



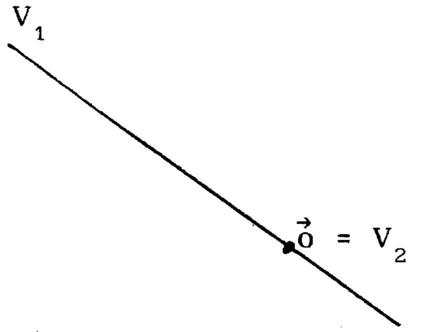
b)



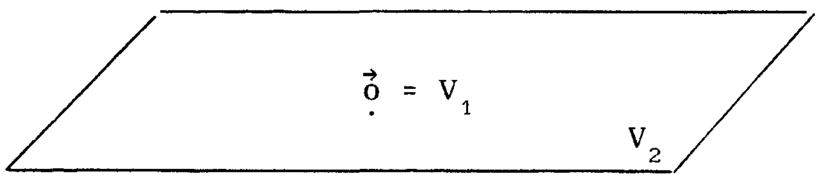
c)



d)



e)

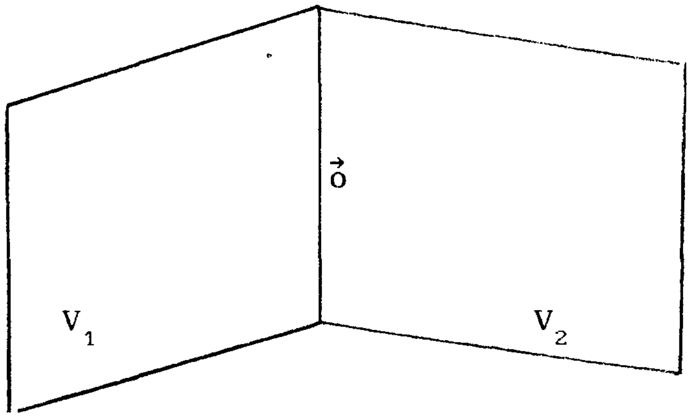


f) $V_1 = E_3$
$V_2 = \{\vec{o}\}$

g) $V_1 = E_3$
$V_2 = D_o$

h) $V_1 = E_3$
$V_2 = \pi_o$

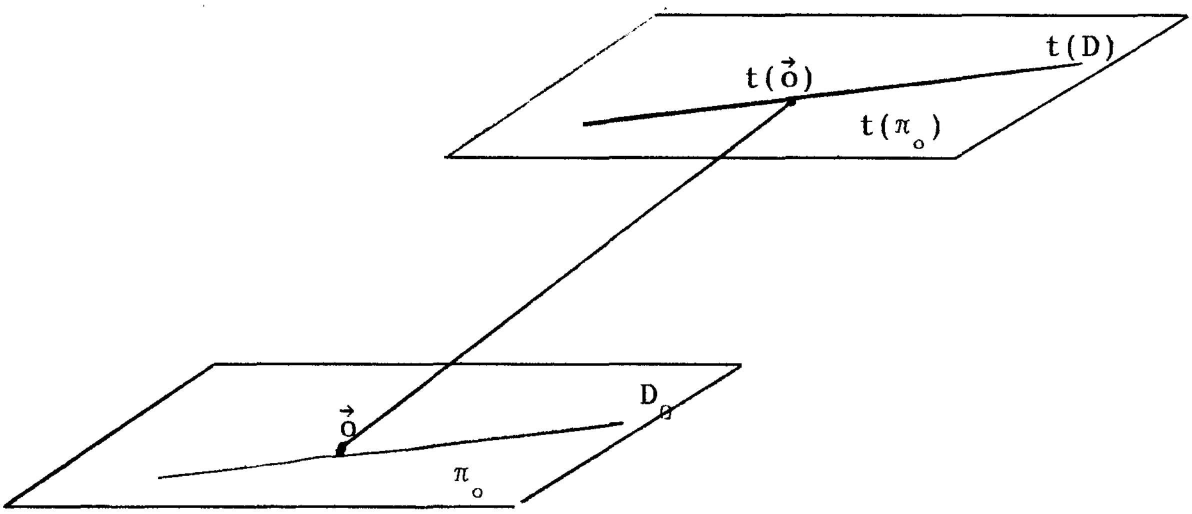
i)



Variété linéaire d' un vectoriel V

On appelle variété linéaire d' un vectoriel V, une translatée d' un de ses sous-espace vectoriel.

Exemple:



On peut démontrer que toute variété linéaire est la translatée d' un seul sous-espace vectoriel de V. La dimension de la variété linéaire est donc naturellement définie comme étant la dimension du sous-vectoriel associé.

Applications linéaires - Calcul matriciel

Nous avons vu qu' une transformation linéaire du plan vectoriel est une transformation du type

$t : \vec{u}(x,y) \to t(\vec{u})\ (x',y')$ où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

On vérifie que

1) $\underline{\forall\ \vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 : t(\vec{u} + \vec{v}) = t(\vec{u}) + t(\vec{v})}$

En effet :

Soient $\vec{u} : (u_1, u_2)$ et $\vec{v} : (v_1, v_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$$t(\vec{u} + \vec{v}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a.(u_1 + v_1) + b.(u_2 + v_2) \\ c.(u_1 + v_1) + d.(u_2 + v_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a.u_1 + b.u_2 \\ c.u_1 + d.u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a.v_1 + b.v_2 \\ c.v_1 + d.v_2 \end{pmatrix}$$

$$t(\vec{u}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.u_1 + b.u_2 \\ c.u_1 + d.u_2 \end{pmatrix}$$

$$t(\vec{v}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.v_1 + b.v_2 \\ c.v_1 + d.v_2 \end{pmatrix}$$

On a bien $t(\vec{u} + \vec{v}) = t(\vec{u}) + t(\vec{v})$

2) $\underline{\forall\ \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall\ r \in \mathbb{R} : t(r.\vec{u}) = r.t(\vec{u})}$

En effet :

Soient $\vec{u} : (u_1, u_2)$, $r.\vec{u} : (r.u_1, r.u_2)$

$$t(r.\vec{u}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r.u_1 \\ r.u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.a.u_1 + r.b.u_2 \\ r.c.u_1 + r.d.u_2 \end{pmatrix}$$

$$r.t(\vec{u}) : r.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = r.\begin{pmatrix} a.u_1 + b.u_2 \\ c.u_1 + d.u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r.a.u_1 + r.b.u_2 \\ r.c.u_1 + r.d.u_2 \end{pmatrix}$$

On a bien $t(r.\vec{u}) = r.t(\vec{u})$

Une transformation linéaire **conserve donc la structure vectorielle** de $\mathbb{R}^2$.

Nous étendons maintenant la notion de transformation linéaire de la manière suivante :

Considérons deux espaces vectoriels V et W (avec éventuellement V = W).

On appelle application linéaire de V dans W, toute application t vérifiant :

$$\forall\ \vec{x},\ \vec{y} \in V \text{ et } \forall\ r \in \mathbb{R} : \begin{cases} t(\vec{x} + \vec{y}) = t(\vec{x}) + t(\vec{y}) \\ t(r.\vec{x}) = r.t(\vec{x}) \end{cases}$$

ou

$$\forall\ \vec{x},\ \vec{y} \in V \text{ et } \forall\ r,\ s \in \mathbb{R} :\ t(r.\vec{x} + s.\vec{y}) = r.t(\vec{x}) + s.t(\vec{y})$$

<u>Exercices :</u>

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?
   a) $P_2(x) \rightarrow \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \longrightarrow a + b + c$
   b) $P_2(x) \rightarrow \mathbb{R} : ax^2 + bx + c \longrightarrow a^2 + b + c$

2. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires dans E_2, dans E_3 ?:
   Une homothétie, une symétrie axiale, une symétrie centrée, une translation, une rotation.

3. Soit l' application linéaire

$$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{cases} t(1,0) = (3,5) \\ t(0,1) = (2,4) \end{cases}$$

   Quelle est l' image d' un point quelconque (x,y) par t ?

   Même question pour

$$t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} t(1,0) = 2 \\ t(0,1) = 4 \end{cases}$$

4. A chaque application linéaire, on associe une matrice.
   Quelles sont les matrices des transformations suivantes ?

a) Une homothétie de centre (0,0) de E_2, de E_3.
b) Une rotation de centre (0,0) de E_2, de E_3. (repère orthonormé)
c) La transformation identique de E_2, de E_3.
d) Une symétrie de centre (0,0) de E_2, de E_3. (repère orthonormé)
e) Une symétrie axiale, dont l'axe passe par l' origine de E_2, de E_3. (repère orthonormé)
f) Les applications de l' exercice 3.

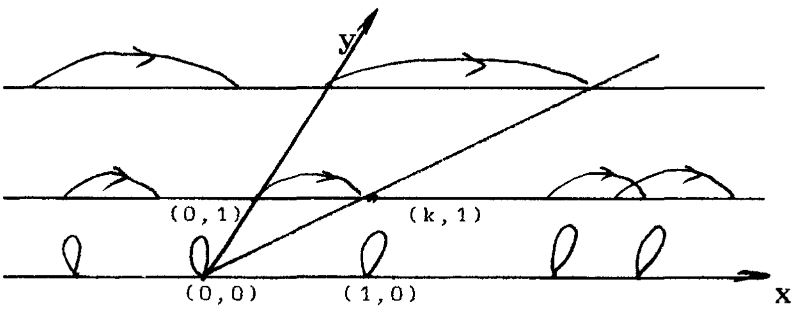
5. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente-t-elle une transformation linéaire de E_2 ?

6. Dans le plan muni d' une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, comment construire l' image d' un point quelconque par une transformation linéaire, connaissant l' image de $\vec{e}_1$ et de $\vec{e}_2$?

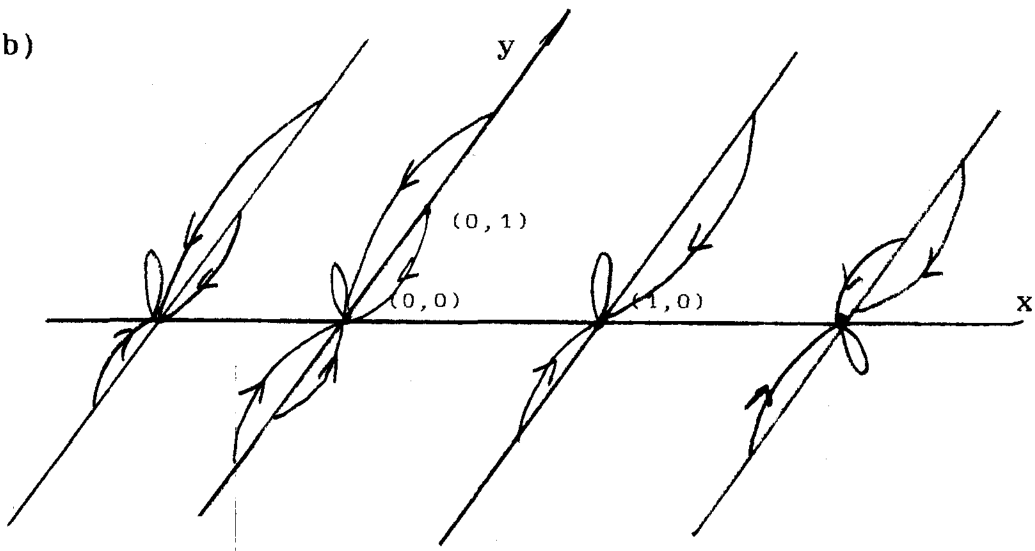
7. Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice d' une transformation linéaire de E_2 ,que représentent (a,c) et (b,d) ?

8. Déterminer la matrice des transformations linéaires suivantes de E_2

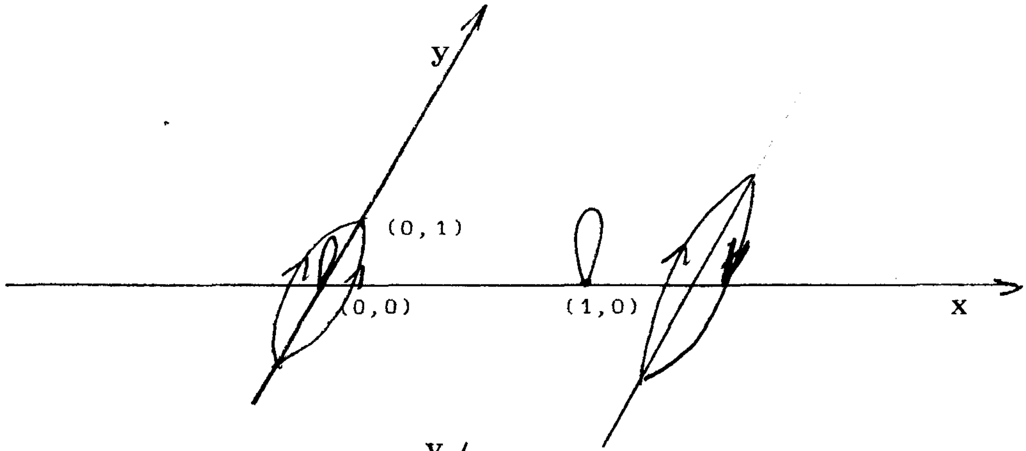
a)



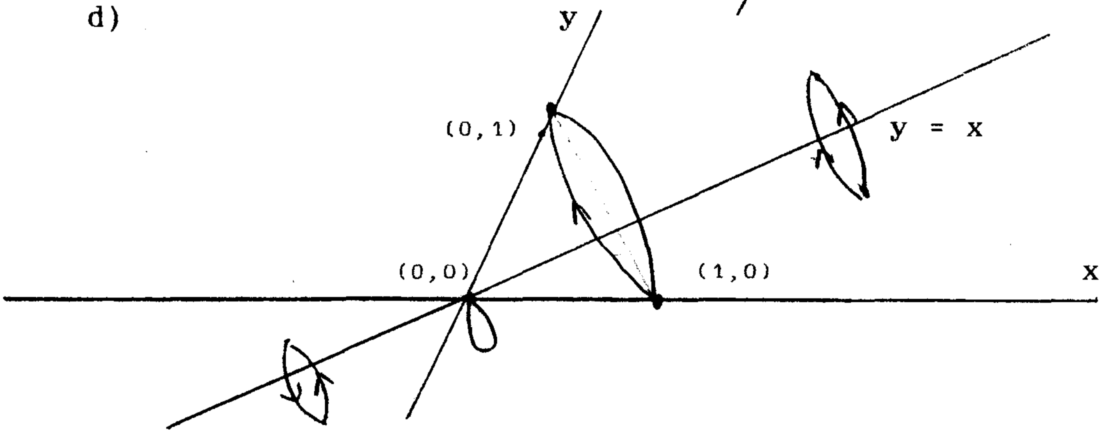
b)



c)



d)



Calcul matriciel (revision et compléménts)

1. Transposée d' une matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^{\tau} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

Pour transposer une matrice, on permute les lignes et les colonnes de la matrice initiale. L' élément b_{ij} de la matrice transposée vaut donc l' élément a_{ji} de la matrice initiale.

2. Addition de deux matrices de mêmes dimensions :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \\ e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \\ e + e' & f + f' \end{pmatrix}$$

L' ensemble des matrices mxn muni de la loi + forme un groupe commutatif.

3. Multiplication d' une matrice par un réel :

$$r.\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.a & r.b & r.c \\ r.d & r.e & r.f \end{pmatrix}$$

L' ensemble des matrices $\mathcal{M}_{mxn}$,+,. forme un espace vectoriel.

4. Multiplication de deux matrices : $M_{mxn} \,.\, N_{nxp} = P_{mxp}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a.a' + b.b' + c.c' & a.d' + b.e' + c.f' & a.g' + b.h' + c.i' \\ d.a' + e.b' + f.c' & d.d' + e.e' + f.f' & d.g' + e.h' + f.i' \end{pmatrix}$$

Exercices :

1. Si A et B sont des matrices nxn, a-t-on
   a) $A.B = B.A$?
   b) $(A.B)^{\tau} = B^{\tau}.A^{\tau}$

2. Soit $P_3(x)$, l' espace vectoriel des polynômes d' au plus du troisième degré et t la transformation linéaire de $P_3(x)$ dans $P_3(x)$ définie par la relation

$$t(\ p(x)\ ) = 2.p(x + 1) - p(x)$$

   a) Quelle est la matrice (T)de la transformation linéaire par rapport à la base ($1, x, x^2, x^3$) ?
   b) Calculer T^{-1}.
   c) Déterminer un polynôme p(x) tel que $2.p(x + 1) - p(x) = 1 + x^3$.

Etude du produit de deux matrices nxn non nulles :

Nous savons que pour l' ensemble M_{nxn} muni de la loi . ,

1. La loi est interne et partout définie.
2. La loi est associative.
3. La loi admet un neutre qui est la matrice identique I_{nxn}.
4. La loi est NON commutative.

Nous avons étudié la condition pour qu' une matrice 2X2 admette un inverse (matrice régulière) :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est régulière si et seulement si } a.d - b.c \neq 0$$

et dans ce cas, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

L' ensemble des matrices régulières 2x2 forme un groupe non commutatif pour la loi . .

Pour qu' une matrice nxn soit inversible, il faut que son déterminant soit non nul et la matrice est dite régulière. Une matrice non inversible est dite singulière. Ces points seront explicités dans le cours de sixième .

L' ensemble des matrices régulières nxn forme un groupe non commutatif pour la loi . .

Règle pratique pour trouver l' inverse d' une matrice $M = (a_{ij})$ où

$i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sans résolution d' un système (sans démonstration cette année) :

a) On transpose la matrice

b) Dans la matrice transposée, on remplace chaque élément a_{ij} par son cofacteur A_{ij}

c) On multiplie la matrice obtenue par $\left(\det M\right)^{-1}$.

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & A_{ji} & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercices :</u>

Calculer l' inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matrice régulière - changement de base</u>

Soit M la matrice d' une transformation linéaire (t) de E_2 qui est muni de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$t(\vec{e}_1) = \vec{u}\,(a,c)$$
$$t(\vec{e}_2) = \vec{v}\,(b,d)$$

$(\vec{u},\vec{v})$ est une base de E_2

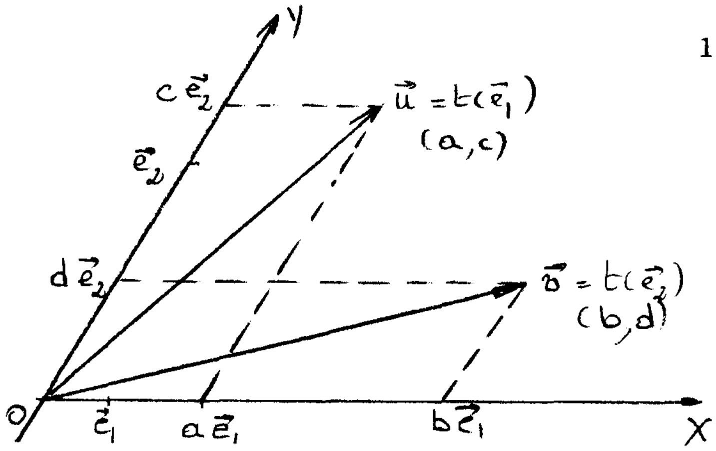
$\Leftrightarrow \vec{u} \not\parallel \vec{v}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$

$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

$\Leftrightarrow \det M \neq 0$

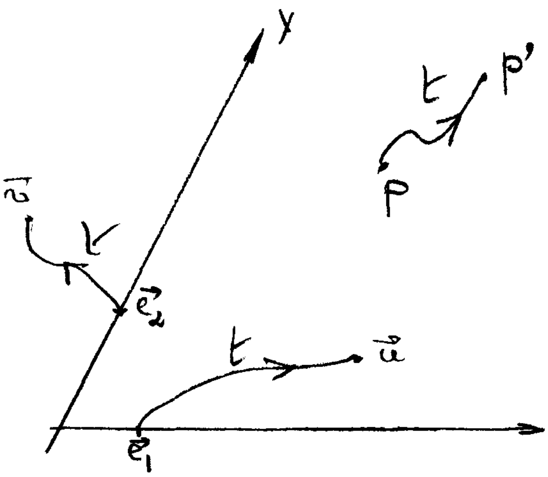
$\Leftrightarrow$ M est une matrice régulière



Une transformation linéaire à matrice régulière transforme une base en une autre base.

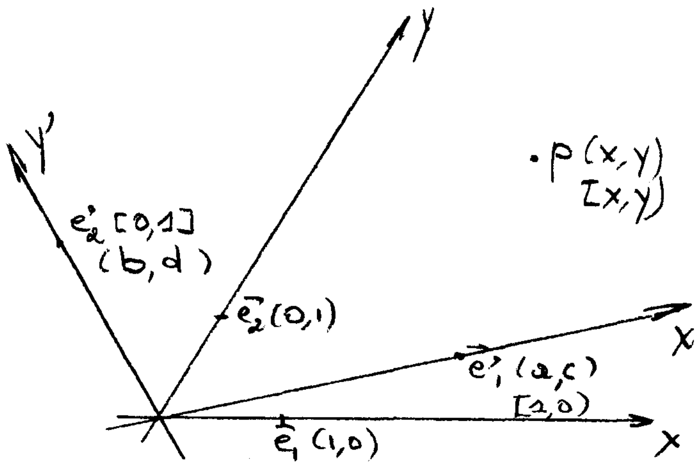
La matrice d' une transformation linéaire peut donc être considérée comme matrice d' un changement de base. Suivant que l' on opte pour le premier ou le second point de vue, les choses doivent être considérées d' un autre oeil.

M : matrice d' une transformation linéaire



Les points bougent...
Les axes restent sur sur place

M : matrice d' un changement de base



Les axes bougent...
Les points restent sur place,
les points ont des coordonnées (x,y) dans les axes X,Y et [x,y] dans les axes X',Y'.

Théorème :

Si M $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ "représente" un changement de base et si p a pour coordonnées (x,y) dans la première base, p a pour coordonnées ·x,y§ dans la seconde base et

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ on a $\vec{p} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2$ (1)

Dans la nouvelle base $(\vec{e}'_1,\vec{e}'_2)$ on a $\vec{p} = [x].\vec{e}'_1 + [y].\vec{e}_2$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \vec{p} &= [x].\vec{e}'_1 + [y].\vec{e}'_2 \\ &= [x].(a\vec{e}_1 + c.\vec{e}_2) + [y].(b.\vec{e}_1 + d.\vec{e}_2) \\ &= (a.[x] + b.[y]).\vec{e}_1 + (c.[x] + d.[y]).\vec{e}_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

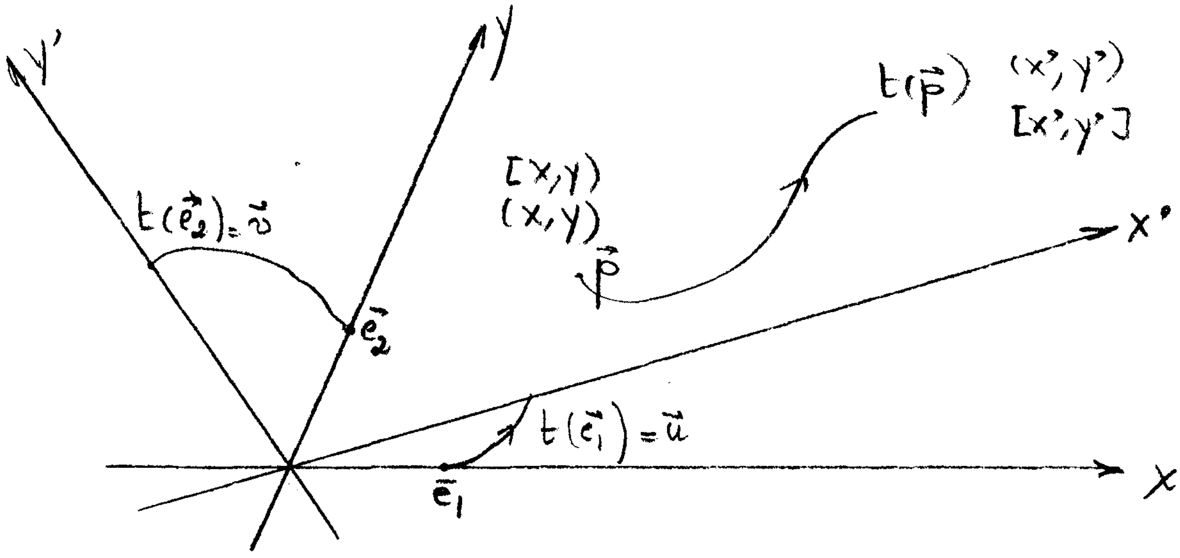
De (1) et (2), on a

$$\begin{cases} x = a.[x] + b.[y] \\ y = c.[x] + d.[y] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

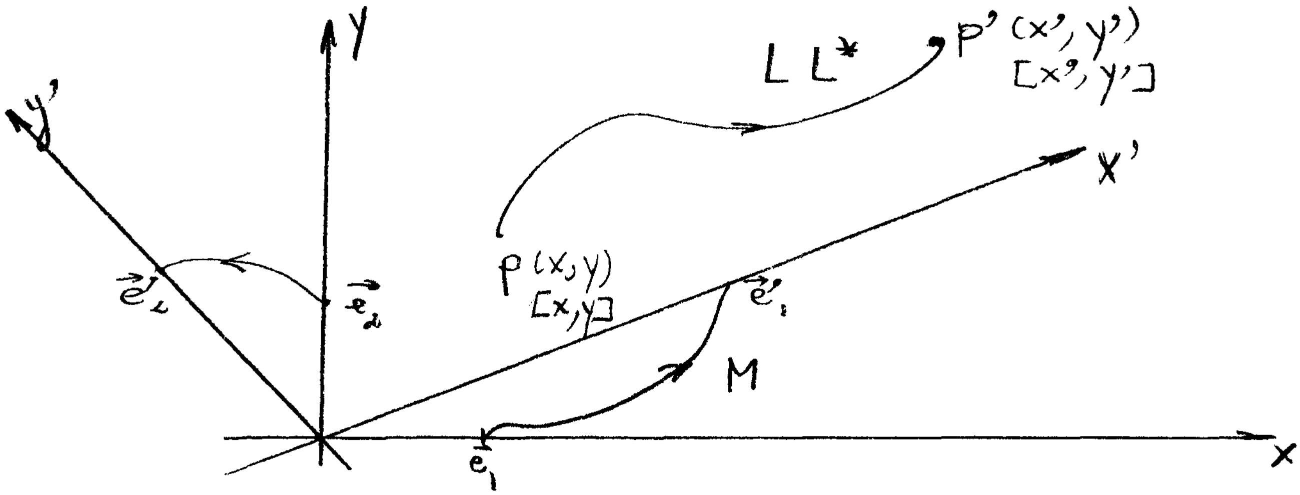
Tableau résumé

	$\vec{p}$	$t(\vec{p})$
base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$	(x,y)	(x',y') : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
base $(\vec{u},\vec{v})$	[x,y] : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	[x',y'] = (x,y)



Problème : On donne un changement de base caractérisé par une matrice M et une transformation linéaire caractérisée par une matrice L dans la base initiale.

Quelle est la matrice (L*) de la transformation linéaire dans la nouvelle base?



On a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = L* . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Il s' en suit que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{-1}.L.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}.L.M.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Et on en conclut que

$$L^* = M^{-1}.L.M$$

<u>Exercices :</u>

1. On donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

   et la transformation linéaire t : $\begin{cases} t(\vec{e}_1) = 2.\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ t(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2 \end{cases}$

   Quelle est la matrice de la transformation linéaire dans la base $(\vec{u},\vec{v})$?

2. Soit l' application linéaire t :

   $$\mathbb{R}^2 \longrightarrow P_2(x) : (a,b) \longrightarrow ax^2 + (a + b)x + b$$

   De quels éléments de $\mathbb{R}^2$, les polynômes suivants qont-ils les images ?

   $$x^2 + 1 \quad ; \quad (x + 1)^2 \quad ; \quad x + 1$$

3. On donne les applications linéaires

   $$f : P_2(x) \longrightarrow P_1(x) : ax^2 + bx + c \longrightarrow (a + b)x + b + c$$
   $$g : P_1(x) \longrightarrow P_2(x) : ax + b \longrightarrow (a - b)x^2 + a + b$$

   Vérifier que f et g sont des applications linéaires.
   Calculer $f o g$ et $g o f$ et vérifier que ces transformations sont linéaires.

4. Soit t la transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$

   $$\begin{cases} t(1,0) = (2,3) \\ t(0,1) = (5,4) \end{cases}$$

   a) Quelle est la matrice de cette transformation linéaire?
   b) Quelle est la matrice de cette transformation linéaire dans la base $\Big((2,3)\ ,\ (5,4) \Big)$?

c)Quelle est l' image de (1,1) par t?

d) Quelle est la coordonnée de (1,1) dans la nouvelle base?

5. Soit ($\vec{u}(1,2)$, $\vec{v}(3,1)$) une base de $\mathbb{E}_2$ et t une transformation linéaire telle que

$$\begin{cases} t(1,2) = (8,6) \\ t(3,1) = (9,13) \end{cases}$$

Quelle est la matrice de t dans les bases suivantes ?

a) $\left((1,2) \ , \ (3,1) \right)$

b) $\left((1,0) \ , \ (0,1) \right)$

a) $\left((8,6) \ , \ (9,13) \right)$

6. Soient les matrices

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ; M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} ; M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; M_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Montrer qu'elles forment une base de l' espace vectoriel des matrices 2x2.

b) Déterminer les coordonnées de $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ par rapport à la base (M_1, M_2, M_3, M_4).

c) Calculer l' inverse de M.