19. PROBABILITES

En classe, on peut facilement réaliser l' expérience suivante : On jette 10 punaises en l'air et on compte le nombre de punaises retombées la pointe en l' air. On réitère l' opération un "grand" nombre (n) de fois. Une première question à se poser est la signification du mot "grand"; est-ce quand n vaut 10, 500, 10^{27} ... ? Nous y reviendrons ! En récoltant les résultats, on calcule à chaque fois la fréquence d' apparition de l' événement " il y a 7 punaises dont la pointe est en l' air" c' est à dire le nombre d'expériences où l' événement se réalise (7 punaises ont "la pointe en l' air") divisé par le nombre total d' expériences. On remarque qu 'au début cette fréquence est très irrégulière mais qu' au bout de 500 expériences, elle tend à se stabiliser et qu' après 1000 expériences, cette stabilisation est nettement marquée. Nous considèrerons que dans ce cas-ci, 1000 est un nombre "grand".

Cette stabilisation nous incite à postuler qu'il y a un nombre déterminé, à savoir la **probabilité** que l'événement **se réalise** et l'expérience incite de même à penser que la fréquence relative livre une approximation de plus en plus fidèle de cette probabilité, au fil des expériences.

La théorie des probabilités a pour but d' étudier par des modèles mathématiques les phénomènes dont le résultat est soumis au "hasard", les phénomènes aléatoires.

Un **phénomène (expérience) aléatoire**, se caractérise par

- L' irrégularité des résultats individuels,
- Une stabilité des résultats si on réalise un " grand " nombre d'expériences dans les mêmes conditions.

Pour chaque expérience aléatoire, on définit sa **catégorie d' épreuves** (Ω) comme étant l' ensemble des résultats possibles de cette expérience. Dans le cadre de ce cours, nous supposerons Ω fini.

Exemples :

1) Expérience : jet d' une pièce de monnaie (ne retombant pas sur sa tranche)

$$\Omega = \left\{ \text{face} , \text{pile} \right\}$$

2) Expérience : accouchement d' un bébé

$\Omega = \left\{ \text{fille, garçon} \right\}$

3) Expérience : jet de deux ~~pièces de monnaie~~ dés discernables

$\Omega = \left\{ (1,1) , (1,2) , \dots , (1,6) , (2,1) , (2,2) , \dots , (6,6) \right\}$

D' une manière générale

$\Omega = \left\{ \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \dots , \omega_n \right\}$ où $n \in \mathbb{N}$

On appelle **événement**, un sous-ensemble de Ω.

Exemples :

1) Expérience : jet d' un dé

Evénement : A = obtenir un nombre pair

$\Omega = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5 ,6 \right\}$

$A = \left\{ 2, 4, 6 \right\} \subset \Omega$

2) Expérience : jet successif de deux pièces de monnaie

Evénement : B = obtenir au moins une face

$\Omega = \left\{ \text{pile-pile, pile-face, face-pile, face-face} \right\}$

$B = \left\{ \text{pile-face, face-pile, face-face} \right\} \subset \Omega$

3) Expérience : jet d' un dé

Evénement : C = obtenir le nombre huit

$\Omega = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5 ,6 \right\}$

$C = \emptyset \subset \Omega$ (**événement impossible**)

4) Expérience : jet d' un dé

Evénement : D = obtenir un nombre inférieur à 10^7

$\Omega = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5 ,6 \right\}$

$D = \Omega$ (**événement certain**)

Soit $\Omega = \left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 , \dots , \omega_n \right\}$

et $\mathcal{A} = \left\{ \phi, \left\{\omega_1\right\}, \left\{\omega_2\right\}, \dots , \left\{\omega_n\right\}, \left\{\omega_1,\omega_2\right\}, \left\{\omega_1,\omega_3\right\}, \dots , \left\{\omega_2,\omega_3,\omega_7,\omega_9\right\}, \dots , \Omega \right\}$

qui est l' ensemble ou classe des événements de Ω.

Soit A un événement lié à une expérience. Quand l' expérience a lieu et qu' on obtient un résultat qui appartient à A, on dit que l' événement est **réalisé**.

Exemple : Expérience : jet d' un dé

Evénement : A = obtenir un nombre pair

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$

On jette le dé, si on obtient le nombre 4, A est réalisé tandis que si on obtient le nombre 3, A n' est pas réalisé.

<u>Exercices</u> :

1. Un écolier reçoit 5 billets de tombola, numérotés de 1 à 5, à vendre. Il compte d' une part le nombre de billets qui lui restent à midi et d' autre part le nombre de billets restant le soir.
   Ecrire a) Ω
   b) l' événement A = 3 billets restent à vendre à midi
   c) l' événement B = 3 billets au moins sont vendus à midi
   d) l' événement C = 3 billets sont vendus durant l' après-midi
2. On jette deux dés discernables et on considère les événements suivants :
   A = obtenir un et un seul 6 parmi les deux dés
   B = obtenir une somme de points au moins égale à 10
   On demande d' écrire les événements $A \underset{\text{et}}{\cap} B$, $A \underset{\text{ou}}{\cup} B$, $\bar{A} = \Omega \setminus A$

<u>Notion de probabilité</u> :

<u>Définition classique (et mauvaise) de la probabilité d' un événement aléatoire</u> :

La probabilité d' un événement aléatoire est le rapport du nombre de cas favorables à l'événement (cas où l' événement se réalise) et du nombre de cas également possibles.

Exemple : La probabilité d' obtenir un nombre pair lors du jet d' un dé vaut $\frac{1}{2}$ car

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $\# \Omega = 6$ et $\# A = 3$

La probabilité de l' événement A vaut : $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Critique de cette définition :

* Cette définition utilise la notion de "cas également possibles"; cette définition de la probabilité d'un événement utilise donc la notion d' égale probabilité.
* Cette définition n' est pas réaliste : le dé peut être pipé, il

peut s' user, la probabilité peut varier au cours du temps.

<u>Définition fréquentielle de la probabilité d' un événement aléatoire</u> :

On appelle **fréquence relative** d' un événement après n expériences, le rapport du nombre d' événements réalisés et du nombre d' expériences effectuées (n).

Exemple :

On jette un dé et on considère l' événement "obtenir un nombre pair". On fait l' expérience un "grand" nombre de fois.

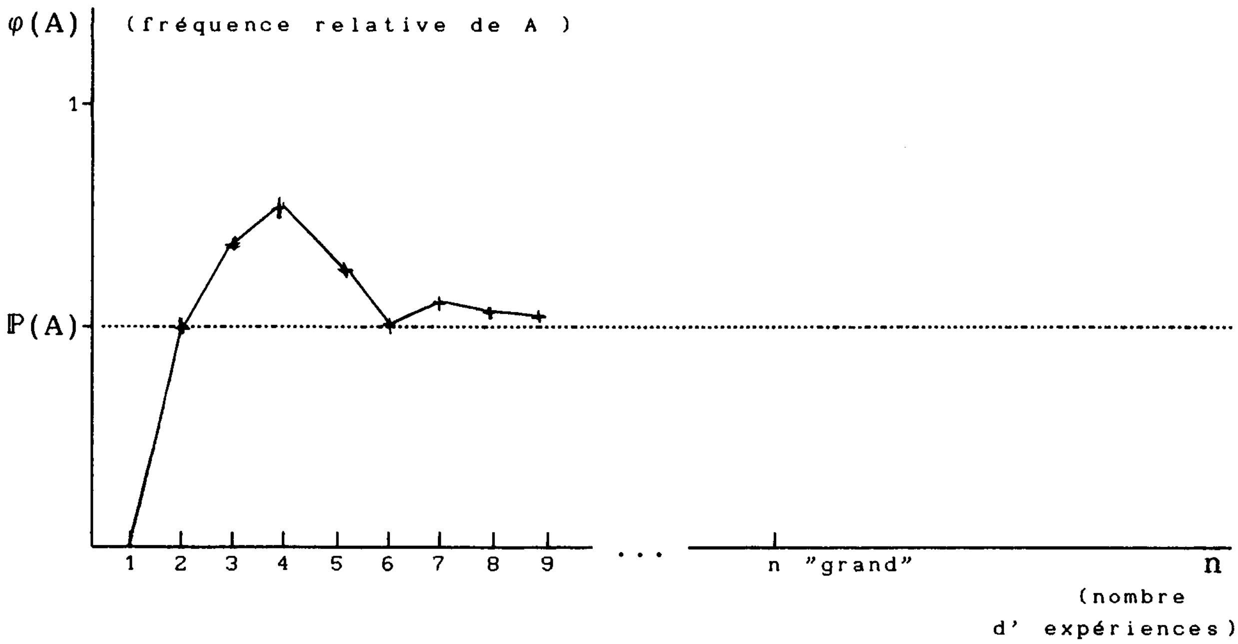
Lors des expériences effectuées on peut par exemple obtenir la suite des résultats suivants :

3, 2, 4, 4, 1, 5, 2, 6, 5, ...

Les fréquences successives de notre événement vaudraient successivement :

$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \ldots$

On représente cette situation sur le graphique suivant

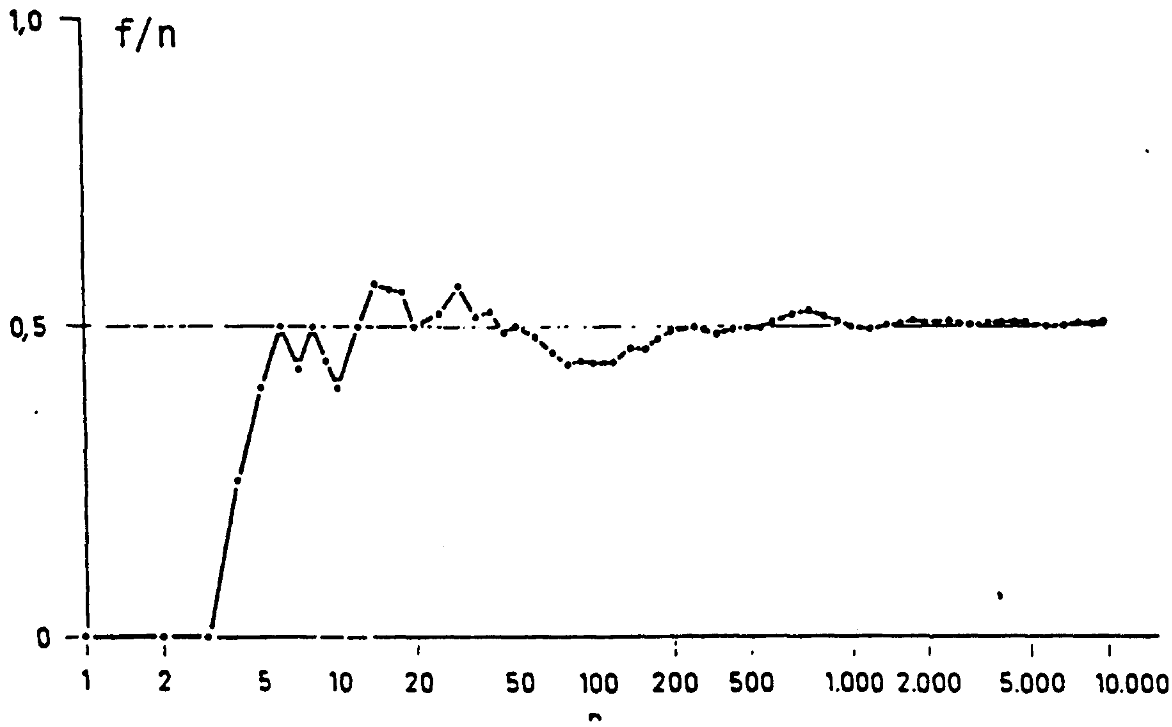


Les fluctuations du graphique, grandes au début s' amoindrissent de plus en plus. En effet si pour n = 10 000, $\varphi(A) = \frac{4925}{10000}$, pour n = 10 001, on aura $\varphi(A) = \frac{4926}{10001}$ si A est réalisé ou $\varphi(A) = \frac{4925}{10001}$ dans le cas contraire. Les résultats se "coucheront" sur une horizontale d' équation $\varphi(A) = k$, où $0 \leq k \leq 1$.

On idéalise cette notion en définissant la probabilité d' un événement A par

Jeu de pile ou face : Evènement : obtenir "pile" lors du jet d'une pièce de monnaie.

n	f	f/n	n	f	f/n	n	f	f/n
1	0	0,000	60	29	0,483	1.200	596	0,497
2	0	0,000	70	32	0,457	1.400	704	0,503
3	0	0,000	80	35	0,438	1.600	810	0,506
4	1	0,250	90	40	0,444	1.800	918	0,510
5	2	0,400	100	44	0,440	2.000	1.013	0,506
6	3	0,500						
7	3	0,429	120	53	0,442	2.500	1.272	0,509
8	4	0,500	140	65	0,464	3.000	1.510	0,503
9	4	0,444	160	74	0,462	3.500	1.772	0,506
10	4	0,400	180	86	0,478	4.000	2.029	0,507
			200	98	0,490	4.500	2.293	0,510
12	6	0,500				5.000	2.533	0,507
14	8	0,571	250	125	0,500			
16	9	0,562	300	146	0,487	6.000	3.009	0,502
18	10	0,556	350	173	0,494	7.000	3.516	0,502
20	10	0,500	400	199	0,498	8.000	4.034	0,504
			450	226	0,502	9.000	4.538	0,504
25	13	0,520	500	255	0,510	10.000	5.067	0,507
30	17	0,567				⋮	⋮	⋮
35	18	0,514	600	312	0,520			
40	21	0,525	700	368	0,526			
45	22	0,489	800	413	0,516			
50	25	0,500	900	458	0,509			
			1.000	502	0,502			



$$\boxed{\mathbb{P}(A) = k}$$

N' oublions pas que la probabilité d' un événement peut fluctuer au cours du temps. On ne peut réaliser l'expérience qu' un nombre entier de fois et il est très difficile de la réaliser à chaque fois dans les mêmes conditions (le dé s'use, la pointe de la punaise s'abîme, ...).

D'autre part, il est important de comprendre que la notion de *probabilité est une idéalisation de la notion de fréquence relative*

Axiomes de la théorie des probabilités

On fait les constatations suivantes sur la fréquence relative d' un événement A ($\varphi(A)$) :

1) $0 \leq \varphi(A) \leq 1$
2) $\varphi(\,\phi\,) = 0$ (événement impossible)
3) $\varphi(\,\Omega\,) = 1$ (événement certain)
4) Si A et B sont deux événements **exclusifs** c' est-à-dire que la réalisation de l' un entraîne la non-réalisation de l' autre et que l' on fait n expériences, on peut obtenir

n_1 fois la situation A , $\bar{B}$
n_2 fois la situation $\bar{A}$, B
n_3 fois la situation $\bar{A}$, $\bar{B}$

avec $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

On a alors

$$\varphi(A) = \frac{n_1}{n},\ \varphi(B) = \frac{n_2}{n},\ \varphi(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2}{n} = \varphi(A) + \varphi(B)$$

5) Si A et B sont deux événements quelconques, on peut refaire le raisonnement tenu ci- dessus :

On fait n expériences, on peut obtenir

n_1 fois la situation A , $\bar{B}$
n_2 fois la situation $\bar{A}$, B
n_3 fois la situation $\bar{A}$, $\bar{B}$
n_4 fois la situation A , B

avec $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$

On a alors

$$\varphi(A) = \frac{n_1 + n_4}{n},\ \varphi(B) = \frac{n_2 + n_4}{n},\ \varphi(A \cap B) = \frac{n_4}{n} \text{ et}$$

$$\varphi(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2 + n_4}{n} = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$$

6) etc.

On tient compte de ces constatations pour formuler les axiomes de la théorie des probabilités :

Soit $\Omega = \left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n \right\}$

et $\mathcal{A} = \left\{ \phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, A, \ldots, B, \Omega \right\}$

Axiomes de le théorie des probabilités :

1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3) Si $A \cap B = \phi$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

A partir de ces trois axiomes, des propriétés relatives aux probabilités peuvent se démontrer :

1) $\mathbb{P}(\phi) = 0$ en effet

$\Omega \cup \phi = \Omega$ et Ω et ϕ sont deux événements exclusifs

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\Omega \cup \phi) = \mathbb{P}(\Omega)$

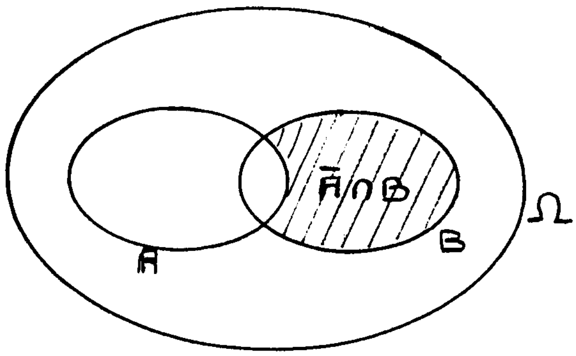
$\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\phi) = \mathbb{P}(\Omega)$ vu l' axiome 3

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\phi) = 0$

2) Si A et B sont deux événements quelconques,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

en effet :



D' une part, $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$, ces deux derniers événements étant exclusifs, il s' en suit que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \quad (1)$$

D'autre part, $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, ces deux derniers événements étant exclusifs, il s' en suit que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) \quad (2)$$

De (1) et (2), on conclut que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

3) On peut maintenant définir la notion d' événements "également possibles" ou équiprobables :

A_1, A_2, ... , A_n sont n événements **équiprobables** si $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \dots = \mathbb{P}(A_n)$

Si de tels événements sont **exclusifs** deux à deux et tels que

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

on a

a) $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(\Omega)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots \mathbb{P}(A_n) = 1$$
$$\Leftrightarrow n.\mathbb{P}(A_i) = 1 \quad \text{où } i \in \left\{ 1, 2, \dots , n \right\}$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}$$

b) Si $E = A_k \cup A_l \cup A_m \cup \dots \cup A_\alpha$, E est l' union d' un nombre fini (soit a) d' événements équiprobables exclusifs, dès lors

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{a}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables à E}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On retrouve donc la définition classique de la probabilité d' un événement comme cas particulier de la définition fréquentielle.

Exercices :

1. On jette deux pièces de monnaie en l' air, quelle est la probabilité pour que quand elles retombent, on obtienne au moins une face ?

2. Une urne contient 4 boules rouges et 5 boules noires indiscernables au toucher. On retire une boule de l'urne, quelle est la probabilité que cette boule soit rouge ?

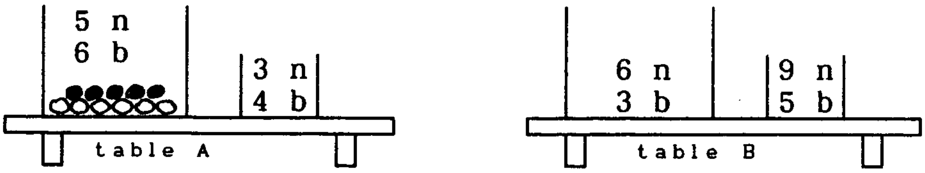
3. Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher. On retire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l' urne . On effectue un second tirage et on note la couleur de cette deuxième boule.
   Quelle est la probabilité
   a) de tirer une boule rouge suivie d' une boule noire ?
   b) de tirer deux boules de même couleur ?

4. Même question que la (3) mais sans remise de la première boule dans l' urne.

5. On laisse une dernière chance à un condamné à mort : on lui bande les yeux, il choisit ensuite parmi les trois urnes suivantes :

De l' urne choisie, il tire une boule. Si cette boule est noire, on lui coupe la tête (couic !), si cette boule est blanche, on le remet en liberté. Quelle est la probabilité de survie du condamné ? Si avant de bander les yeux du condamné, celui-ci peut répartir (même inégalement) les boules sans qu' aucune urne ne soit vide, quelle est la répartition qui donne la plus grande chance de survie au condamné ?

6. Paradoxe de Simpson :
On pose sur chacune des tables A et B une grande et une petite boîte contenant un certain nombre de boules noires (n) et blanches (b) comme on l' indique ci-dessous :



a) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire de la grande boîte de la table A ?
b) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire de la grande boîte de la table B ?
c) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire de la petite boîte de la table A ?
d) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire de la petite boîte de la table B ?
e) On réunit le contenu des deux grandes boîtes d'une part et le contenu des deux petites boîtres d' autre part.
Quelle est la probabilité de tirer une boule noire de la grande boîte ?
Quelle est la probabilité de tirer une boule noire de la petite boîte ?
f) Comparer tous les résultats pour trouver le paradoxe de Simpson.

7. Questions posées par le Chevalier de MERE à Pascal ($17^{ème}$ S)

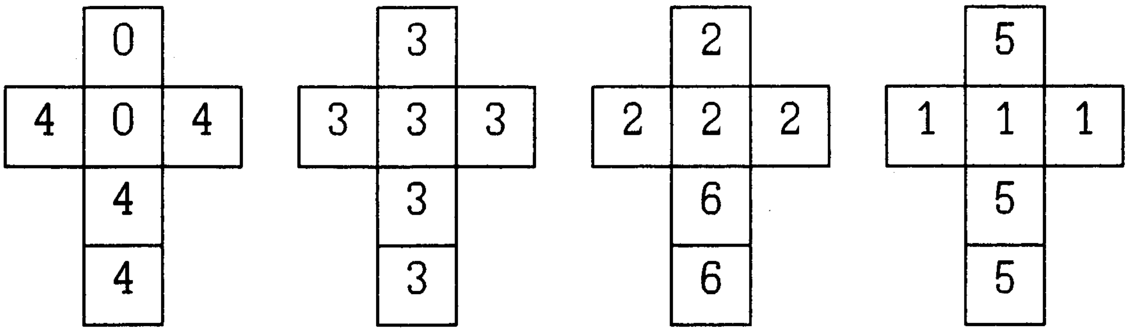
a) Est-il avantageux de parier sur l' apparition d' au moins un 6 lors du jet de 4 dés ?

b) Est-il avantageux de parier sur l' apparition d' au moins un double 6 lors de 24 jets d' une paire de dés ?

c) A et B jouent simultanément un ensemble de parties d' un jeu où la probabilité de gagner est équiprobable. Le premier qui gagne 5 parties gagne la mise. Ils doivent interrompre la partie alors que A a déjà gagné 4 parties et B, trois parties. Comment diviser la mise équitablement ?

8. Un tiroir contient 3 chaussures pour pied gauche et 2 chaussures pour pied droit. Que vaut la probabilité pour qu' en prenant au hasard deux chaussures dans ce tiroir on obtienne une paire de chaussures normale ?

9. Jeu malhonnête : Dés de Bradly-Evon :



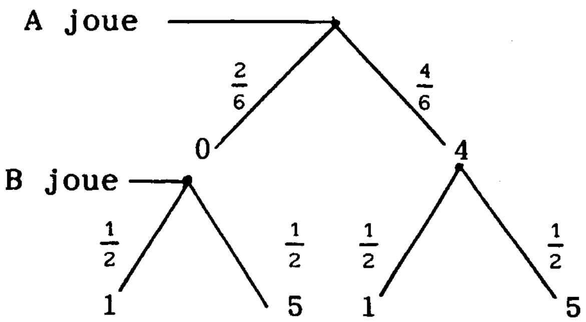
dé α dé β dé δ dé γ

Deux joueurs A et B jouent. A choisit un dé, B choisit ensuite un des dés restants. A et B jettent leur dé. Le gagnant est celui qui obtient le nombre le plus grand.

Le deuxième joueur peut toujours s' arranger pour avoir au moins $\frac{2}{3}$ de chances de gagner.

Exemple :

A choisit le dé α et B choisit le dé γ :



$\mathbb{P}(\text{B gagne}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Si A choisit β, δ ou γ, quel dé choisira B ?

10. Dans une classe de 25 élèves, 12 élèves aiment la physique, 15 élèves aiment les maths, 10 élèves aiment la physique et les maths. On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité pour que cet élève

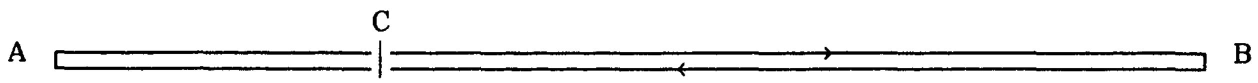
a) qui aime les maths ?

b) qui aime les maths et la physique ?

c) qui n' aime ni les maths ni la physique ?

a) qui aime les maths sans aimer la physique ?

11. Une étudiante a deux " petits " copains. Elle ne sait lequel aller voir. L' un habite en A et l' autre en B. Notre étudiante habite en C. Un et un seul bus relie A et B en s' arrêtant en C. Notre étudiante décide de prendre le bus dans le sens où il arrive et d' aller voir le copain vers qui le bus la mènera en premier lieu.



Quel est le copain qui a le plus de chance de voir notre étudiante ?

12. A et B sont deux tireurs visant la même cible. ILs l' atteignent respectivement avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et de $\frac{7}{10}$. Quelle est la probabilité pour que la cible soit atteinte au moins une fois ?

13. Un tireur novice n' atteint une cible en moyenne qu' une fois sur trois. Il tire 3 balles. Quelle est la probabilité pour qu' il atteigne la cible

a) une seule fois

b) exactement deux fois

c) au moins une fois.

14. On dispose de 12 jetons indiscernables au toucher. Sur chacun de ces jetons est incrit une des lettres du mot BACCALAUREAT. On met ces jetons dans un sac. On tire 4 fois de suite un jeton au hasard.

a) avec remise

b) sans remise

Quelle est la probabilité d' obtenir les lettres du mot RECU,

1°) dans l' ordre ,

2°) dans le désordre ?

15. Quatre individus pénètrent dans un bar louche et déposent leurs chapeaux au vestiaire. Après s' être copieusement enivrés, ils décident de partir et, en sortant, chacun d' eux emporte un chapeau au hasard.
a) Quelle est la probablité pour que chacun d' eux n' ait pas en sortant le chapeau qu ' il avait en entrant ?
b) Quelle est la probablité pour que chacun sorte avec son chapeau?

16. Au rez-de-chaussée d' un immeuble 7 personnes pénètrent dans un ascenseur qui dessert les 10 étages supérieurs. Quelle est la probabilité pour que les 7 personnes quittent l' ascenseur à 7 étages différents ?

17. Vingt chevaux prennent le départ d' une course. Quelle est la probabilité de prévoir les 3 chevaux arrivant en tête à l' arrivée
a) dans l' ordre ?
b) dans le désordre ?

18. On tire 10 000 billets de tombola numérotés de 00 001 à 10 000 . Quelle est la probablité pour que le numéro 04 040 gagne le gros lot ?

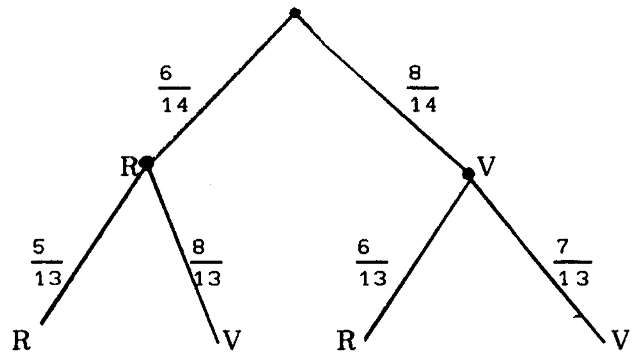
19. Dans un groupe de 10 personnes comprenant 4 femmes et 6 hommes, on choisit deux personnes au hasard. Quelle est la probablité pour que les personnes choisies soient de sexe différent ?

20. Un élève radin cache ses sous dans un sucrier. Celui-ci contient 2 billets de 1000 F, 4 de 500 F, 5 de 100 F et 8 de 5000 F. L' élève plonge la main dans le sucrier et en retire 3 billets. Quelle est la probabilité pour qu' il ait la somme de 6100 F ?

Probabilité conditionnelle

Cette notion a déjà été utilisée dans les exercices précédents. En effet, résolvons l' exercice suivant :

Dans une urne, il y a 8 boules vertes et 6 boules rouges. On retire deux boules de l'urne, quelle est la probablité de tirer deux boules rouges ?



$$\mathbb{P}(R \cap R) = \frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}$$

Chaque probabilité du " second étage " est une probabilité conditionnelle en ce sens que $\frac{5}{13}$ par exemple est la probabilité de tirer une boule rouge " alors que, étant donné que, si " on a tiré une boule rouge à l' étape précédente. Cette probabilité se note $P(R|R)$.

On a par exemple $\mathbb{P}(V \cap V) = = \frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13} = \mathbb{P}(V).\mathbb{P}(V|V)$

$$\mathbb{P}(V \cap R) = \frac{6}{14}\cdot\frac{8}{13} + \frac{8}{14}\cdot\frac{6}{13} = \mathbb{P}(R).\mathbb{P}(V|R) + \mathbb{P}(V).\mathbb{P}(R|V)$$

Tentons une définition; considérons une expérience et deux événements A et B. Si on effectue n fois cette expérience, quatre résultats sont possibles à chaque expérience.

A et B qui se réalise n_1 fois
A et $\bar{B}$ qui se réalise n_2 fois
$\bar{A}$ et B qui se réalise n_3 fois
$\bar{A}$ et $\bar{B}$ qui se réalise n_4 fois

avec $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$.

On a $\varphi(A) = \frac{n_1 + n_2}{n}$, $\varphi(B) = \frac{n_1 + n_2}{n}$ et $\varphi(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$,

on définit $\varphi(B|A)$ comme étant la fréquence relative de B, A étant réalisé c' est-à-dire que dans le total des expériences on isole celles où A se réalise et dans ces dernières, on calcule $\varphi(B)$.

$$\varphi(B|A) = \frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{\varphi(A \cap B)}{\varphi(A)}$$

On a de même

$$\varphi(A|B) = \frac{\varphi(A \cap B)}{\varphi(B)}$$

Par idéalisation, on définit

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \qquad \mathbb{P}(A) \neq 0$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \qquad \mathbb{P}(B) \neq 0$$

On peut démontrer que la probabilité conditionnelle vérifie les trois axiomes de la théorie des probabilités.

<u>Conséquences</u> :

1. De la définition ci-dessus, on tire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B|A) \\ &= \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(A|B) \end{aligned}$$

ce qui justifie certains raisonnements que nous avons souvent tenus jusqu' à présent (où celà ?)

2. $$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B|A).\mathbb{P}(C|A \cap B)}$$

Nous l' avons déjà utilisée intuitivement ... dans quels exercices ?

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}\text{é}(A \cap B) \cap C\text{è} \\ &= \mathbb{P}(A \cap B).\mathbb{P}(C|A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B|A).\mathbb{P}(C|A \cap B) \end{aligned}$$

3. On a de même

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2|A_1).\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2). \; \ldots \; . \; \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Evénements indépendants

Définition : A est un un événenement indépendant de B si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Conséquences :

1. A est un événenement indépendant de B

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

$\Leftrightarrow$ B est un événenement indépendant de A.

2. Cette notion a déjà été souvent utilisée intuitivement dans les exercices ... lesquels ?

Exercices :

1. Quelle est la probabilité d' obtenir quatre fois un 6 lors du jet de quatre dés.?

2. Quelle est la probabilité d' extraire successivement et dans l' ordre, le roi de coeur, la dame de coeur et le valet de coeur d' un jeu de 52 cartes
   a) avec remise ?
   b) sans remise ?

3. Même question qu' au (2) mais où les cartes ne doivent pas nécessairement être dans l' ordre.

4. Une urne contient 3 boules rouges, 5 bleues et 7 jaunes. Quelle est la probabilité d' extraire une boule rouge, une boule bleue et une boule jaune quand on extrait 3 boules de l' urne ?

5. Quelle est la probabilité pour que dans un groupe de 5 personnes, il n' y en ait aucune dont l' anniversaire tombe le même mois ?

6. On a deux jeux de 52 cartes, on choisit une carte dans chaque jeu. Quelle est la probabilité d' avoir au moins un as de coeur parmi les cartes choisies ?

7. On choisit deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d' avoir l' as de coeur parmi les cartes choisies ?

8. On choisit deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d' avoir deux as parmi les cartes choisies ?

9. Deux cages contiennent des souris destinées à une (gentille) expérience de laboratoire. La première contient 5 souris blanches et 6 souris noires. La deuxième cage contient 2 souris blanches et 5 noires. On choisit une cage au hasard et dans celle-ci on choisit une souris. Quelle est la probabilité d' avoir une souris blanche ? N.B. : Il n' y a pas de naissance durant le choix.

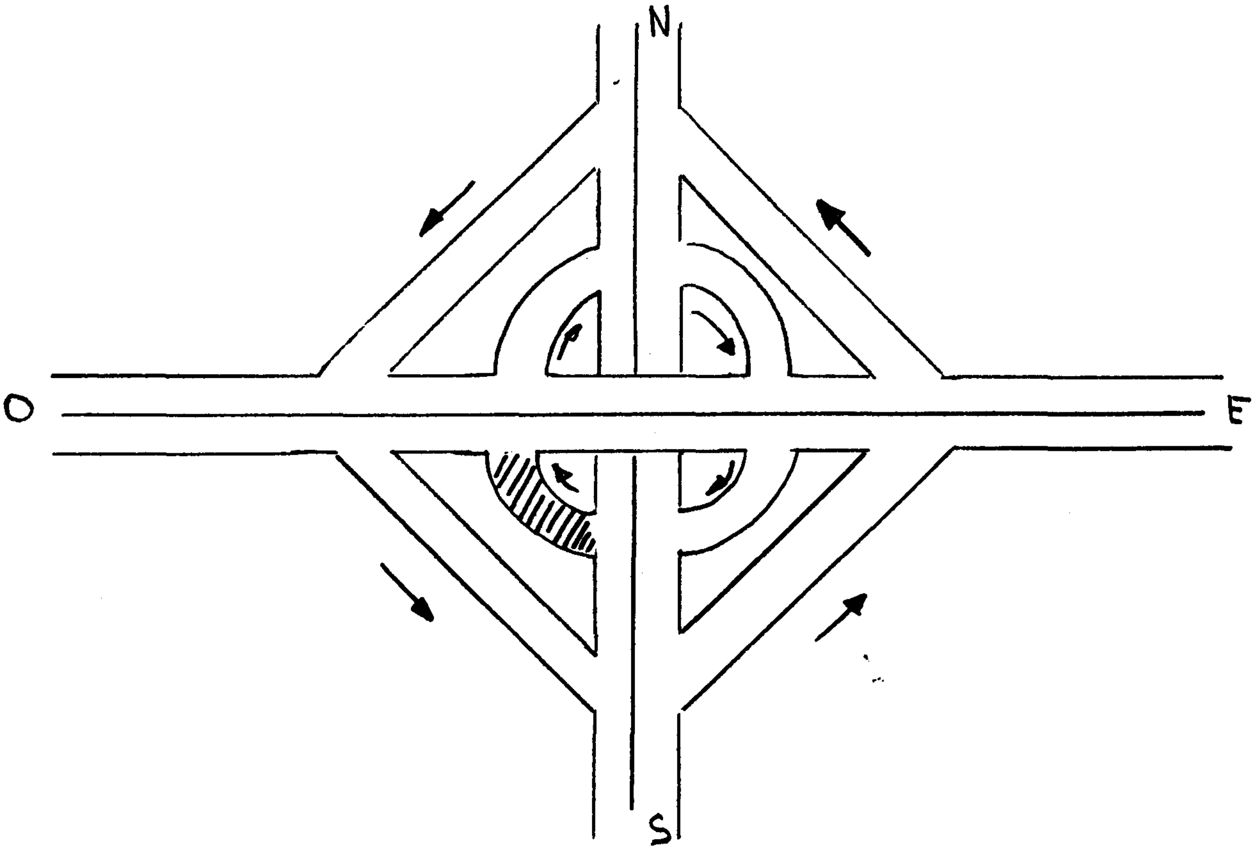
10. Quelle est la probabilité d' avoir au moins deux filles dans une famille de 3 enfants .

11. Le sexe des castors est indiscernale sans examen radiologique. On admet globalement qu' il existe autant de mâles que de femelles. Au zoo, on reçoit 6 castors capturés au hasard dans une forêt. Quelle est la probabilité pour que

a) il n'y ait aucun mâle dans le lot ?
b) il y ait exactement un mâle dans le lot ?
c) il y ait exactement 2 mâles dans le lot ?
d) il y ait exactement 3 mâles dans le lot ?
e) il y ait exactement 4 mâles dans le lot ?
f) il y ait exactement 5 mâles dans le lot ?
g) il y ait exactement 6 mâles dans le lot ?
h) il y ait exactement 7 mâles dans le lot ?
i) il y ait autant de mâles que de femelles dans le lot ?
j) Combien de castors un zoo doit-il acquérir pour que la probablité d' avoir un couple soit supérieure à $\frac{15}{16}$?

12. Un échangeur d' autoroute est représenté ci-dessous. Les flèches indiquent le sens de parcours. Une voiture venant du sud pénètre dans l' échangeur le jour où des travaux rendent inutilisables la bretelle hachurée. En tout point où il y a un choix de directions est installé un mécanisme tel que la voiture tourne à droite avec une probabilité r.

a) Si r = $\frac{1}{2}$, quelle est la probabilité pour que la voiture émerge de l' échangeur vers l' ouest ?
b) Quelle est la valeur de r qui maximise la probabilité pour que la voiture émerge vers l' ouest



13. Un avion A et un avion B sont équipés de réacteurs du même modèle. La probabilité de panne d' un réacteur est égale à p ($0 < p < 1$). L' avion A a deux réacteurs, l' avion B en a quatre.L' avion A ne peut voler que si ses deux réacteurs fonctionnent. L' avion B peut encore voler si un des quatre réacteurs tombe en panne mais il s' écrase dès qu' il y a au moins deux réacteurs en panne. Lequel des deux avions A ou B est le plus sûr ? (discuter en fonction de p)