17 : Fonctions paramétriques $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \overline{\mathbb{R}}$

7h/s.

Deux courbes bien connues : La droite et le cercle

La droite :

Depuis la quatrième nous connaissons les équations paramétriques de la droite passant par les points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) :

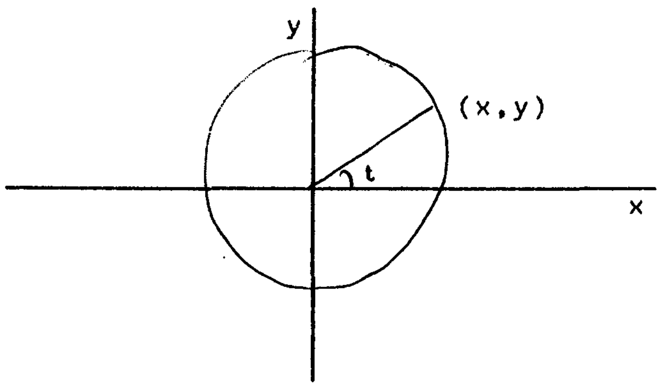
$$D : \begin{cases} x = x_1 + t.(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t.(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Si on élimine t de ces équations on obtient l' équation cartésienne de la droite D :

$$D : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} . (x - x_1)$$

Le cercle :

Si , dans le plan muni d' un repère orthonormé, on considère un cercle de rayon R, centré à l' origine et que l' on désigne par t l' angle formé par le rayon aboutissant à un point arbitraire p(x,y) du cercle et l' axe X, on peut exprimer les coordonnées de p à l' aide du paramètre t de la façon suivante :



$$\begin{cases} x = R.\cos t \\ y = R.\sin t \end{cases} \quad \text{où } 0 \le t < 2\pi$$

Nous obtenons ainsi les équations paramétriques du cercle. Eliminons le paramètre t : De

$$\cos t = \frac{x}{R} \text{ et } \sin t = \frac{y}{R}$$

on déduit

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}$$

ou $$x^2 + y^2 = 1$$

qui est l' équation cartésienne du cercle considéré.

Qu' est-ce qu' une fonction paramétrique

Les équations

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \cap I$$

où x et y sont des fonctions de la variable t et I l' intersection des domaines de x(t) et y(t), sont les équations paramétriques d' un courbe appelée fonction paramétrique . Celle-ci est visualisée point par point. A chaque valeur de t correspond un et un seul couple (x,y) qui sont les coordonnées d' un point dans le plan muni d' axes X,Y. Lorsque t varie, le point se meut dans le plan pour décrire une courbe. Les équations paramétriques d' une courbe livrent donc une vision cinématique de celle-ci tandis que son équation cartésienne en livre une vision statique.

" A quoi ça sert ? "

Un corps ponctuel en mouvement décrit dans l' espace à 2 ou 3 dimensions une courbe qui est sa trajectoire. Celle-ci est l' ensemble des positions occupées successivement par le corps au cours du temps (t) et repérée dans un référentiel (système d' axes) convenablement choisi. Dans ce référentiel, le mouvement du corps ponctuel sera décrit par ses équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \cap I \quad \text{dans l' espace à 2 dimensions (plan)}$$

ou par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \cap I \quad \text{dans l' espace à 3 dimensions}$$

Ce sont les " équations horaires " du mouvement. Les applications sont nombreuses : Tout balayage d' écran (T.V., ...), toute trajectoire de balles ou projectiles divers . Citons encore la composition de deux mouvements vibratoires de directions orthogonales qui décrit les figures de Lissajous. Elles ont pour équation

$$\begin{cases} x = a_1.\sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = a_2.\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

(Patience, vous étudierez celles-ci en profondeur au cours de physique en $6^{ème}$).

Il suffit d' éliminer t !

Pourquoi faut-il étudier les fonctions paramétriques telles quelles alors que pour la droite et pour le cercle par exemple on élimine facilement le paramètre pour retrouver une fonction du type " $y = f(x)$ " qui nous est familière ?

Cette élimination n' est pas toujours possible ... Que faire si on doit étudier

$$\begin{cases} x = t^3 - \dfrac{1}{t} \\ y = t.\sin\sqrt{t} \end{cases} \quad ?$$

Pas facile d' éliminer t, n' est-ce pas ? Alors, comment faire ? Nous sommes sauvés par la théorie des différentielles vue au chapitre précédent. Celle-ci va nous rendre la vie facile . Cela vaut donc la peine de faire un petit rappel.

Rappel :**Notion de dérivée et de différentielle**

Soit $y = f(x)$ une fonction réelle dérivable en x.

On appelle différentielle de f(x) que l' on note dy, le produit de la dérivée de f(x) en ce point par un accroissement de la variable dx :

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

ou

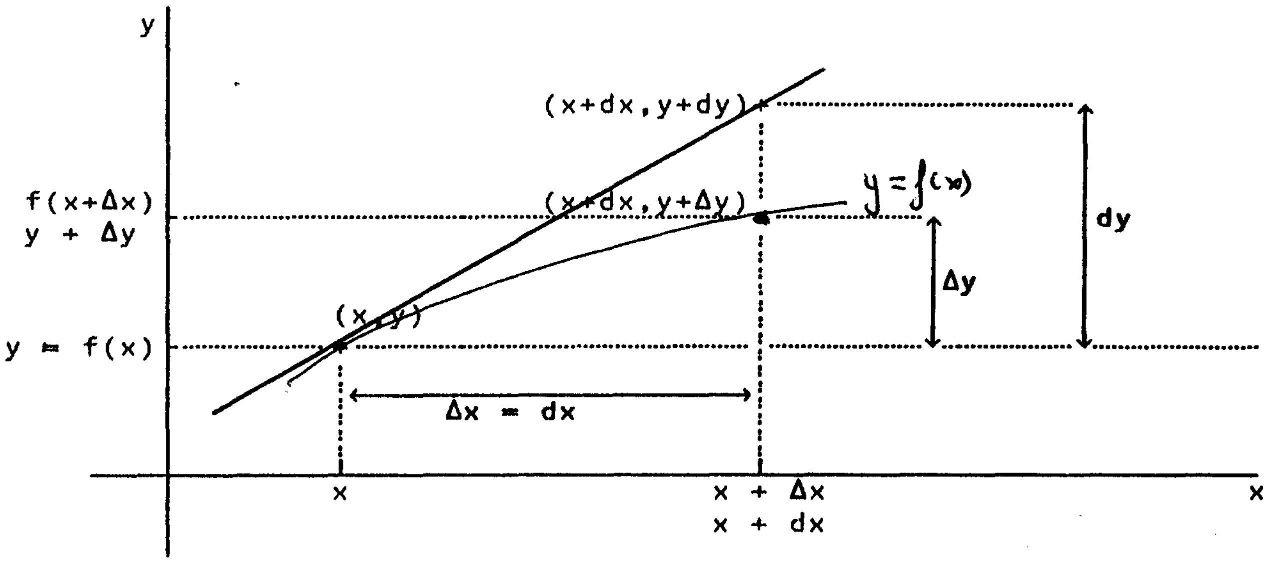
$$\boxed{dy = y'_x.dx}$$

avec pour conséquence

$$\boxed{y'_x = \frac{dy}{dx}}$$

La dérivée $y'_x = f'(x)$ peut donc être considérée comme le rapport de deux différentielles.

Interprétation géométrique :



Utilisation des différentielles pour étudier la croissance et la concavité d' une fonction paramétrique

Ce problème est facile à résoudre si on se souvient que

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} = k(t)$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\frac{dk(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{k'_t}{x'_t}$$

D' autres outils ?

A) Pour se faciliter la tâche on peut se demander s' il existe des symétries dans le graphique de la fonction paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \overline{\mathbb{R}} \cap I$$

Voici quelques cas intéressants :

a) Si pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}$: $\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(t) = y(-t) \end{cases}$

on obtient le même point (x,y) dans les axes X,Y pour t et −t, l' étude de la fonction ne doit se faire que pour $t \in [0,\infty] \cap I$

b) −Si pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}$: $\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(t) = -y(-t) \end{cases}$

la fonction présente une symétrie d' axe X et l' étude de la fonction ne doit se faire que pour $t \in [0,\infty] \cap I$.

c) Si pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x(t) = -x(-t) \\ y(t) = \ \ y(-t) \end{cases}$

la fonction présente une symétrie d' axe Y et l' étude de la fonction ne doit se faire que pour $t \in [0,\infty] \cap I$.

d) Si pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x(t) = -x(-t) \\ y(t) = -y(-t) \end{cases}$

la fonction présente une symétrie de centre $X \cap Y$ et l' étude de la fonction ne doit se faire que pour $t \in [0,\infty] \cap I$.

Ces conditions sont non nécessaires mais suffisantes ... Pourquoi ?

B) Il est souvent utile de rechercher les points (x,y) pour lesquels $x = 0$ ou $x = \infty$ ou $y = 0$ ou $y = \infty$ ou $t = 0$ ou $t = \infty$.

C) Comment déterminer les asymptotes d' une fonction paramétrique ?

-Asymptote verticale : On recherche une valeur de t pour laquelle $y = \infty$ et $x \in \mathbb{R}$

-Asymptote horizontale : On recherche une valeur de t pour laquelle $x = \infty$ et $y \in \mathbb{R}$

-Asymptote oblique : On recherche une valeur t_1 pour laquelle $x = \infty$ et $y = \infty$. Une asymptote oblique d' équation $y = ax + b$ existe si les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to t_1} \frac{y(t)}{x(t)}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - a.x) = \lim_{t\to t_1} (\ y(t) - a.x(t)\ )$$

<u>Exemples :</u>

<u>Exemple 1 :</u> Etude de l' astroïde : $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

Période : 2π

Symétrie immédiate : $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On a donc certainement une symétrie par rapport à l' axe X. Il suffit donc d' étudier la fonction pour t variant de 0 à π.

Dérivées :

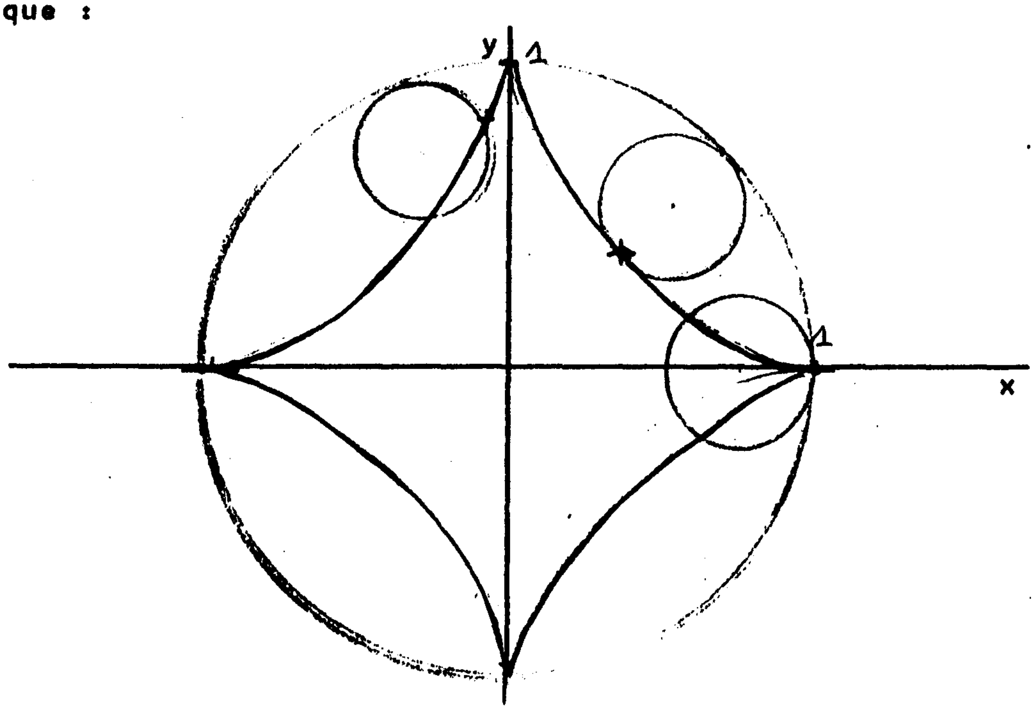
$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3.\sin^2 t.\cos t}{-3.\cos^2 t.\sin t} = -\,\mathrm{tg}\,t$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\frac{-1}{\cos^2 t}}{-3.\cos^2 t.\sin t} = \frac{1}{3.\cos^4 t.\sin t}$$

Tableau des variations :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
x	1		0		-1
y	0	↘	1	↗	0
y'_x	0	−	∞	+	0
y''_x		+		+	

Graphique :



Nous verrons en $6^{\text{ème}}$ que cette courbe peut être définie comme la trajectoire décrite par un point d' un cercle de rayon $\frac{1}{4}$ qui roule sans glisser sur un cercle de rayon 1, le petit cercle restant à l' intérieur du grand.

Exemple 2 : Une des figures de Lissajous

$$\begin{cases} x = 2.\sin(t + \frac{\pi}{4}) \\ y = \sin 3t \end{cases}$$

Période : $T = 2\pi$

Points particuliers : $x = 0$ si $t = \frac{3\pi}{4}$ ou $t = \frac{7\pi}{4}$

$y = 0$ si $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{3}$ ou $t = \frac{2\pi}{3}$ ou $t = \pi$ ou

$t = \frac{4\pi}{3}$ ou $t = \frac{5\pi}{3}$ ou $t = 2\pi$

Dérivée : $y'_x = \dfrac{3\cos 3t}{2\cos(t + \frac{\pi}{4})}$

$y'_x = 0$ si $t = \frac{\pi}{6}$ ou $t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{5\pi}{6}$ ou $t = \frac{7\pi}{6}$ ou $t = \frac{3\pi}{2}$ ou $t = \frac{11\pi}{6}$

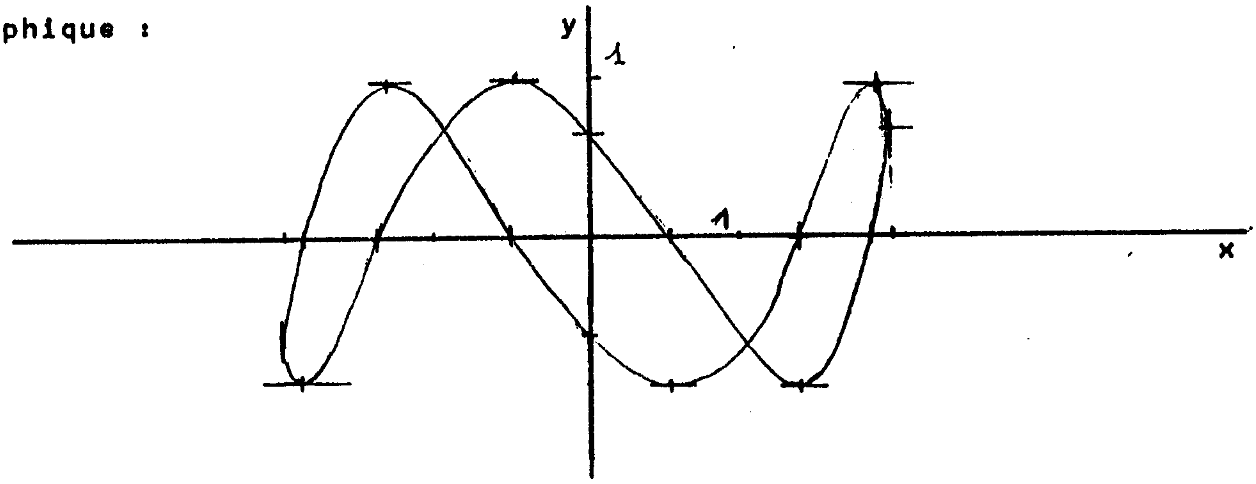
$y'_x = \infty$ si $t = \frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{5\pi}{4}$

Tableau des variations :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π	
x	1,4		1,9		2		1,9		1,4		0,6		0		-0,5		-1,4	
y	0	↗	1 th	↘	0,7 tv	↗	0	↗	-1 th	↘	0	↘	0,7	↘	1 th	↗	0	↗
y'_x	+	+	0	-	∞	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+

t	$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
x	-1,9		-2		-1,9		-1,4		-0,6		0		0,5		1,4
y	-1 th	↘	-0,7 tv	↗	0	↗	1 th	↘	0	↘	-0,7	↘	-1 th	↗	0
y'_x	0	-	∞	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+

Graphique :



Exemple 3 : Etude du Folium de Descartes

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

Dérivées : $x'_t = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3.(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2}$

$$y'_t = \frac{dy}{dt} = \frac{3t.(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{t.(2 - t^3)}{1 - 2t^3}$$

Tableau des variations :

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$		$\sqrt[3]{2}$		∞
x	0	$+$	$+\infty\ -$	$-$	0		$\sqrt[3]{4}$		$\sqrt[3]{2}$		0
y	0 TV	$\searrow$	$-\infty\ +$	$\searrow$	0 TH	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$ TV	$\searrow$	$\sqrt[3]{4}$ TH	$\nearrow$	0 TV
y'_x	∞	$-$	-1	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	∞

Asymptotes :

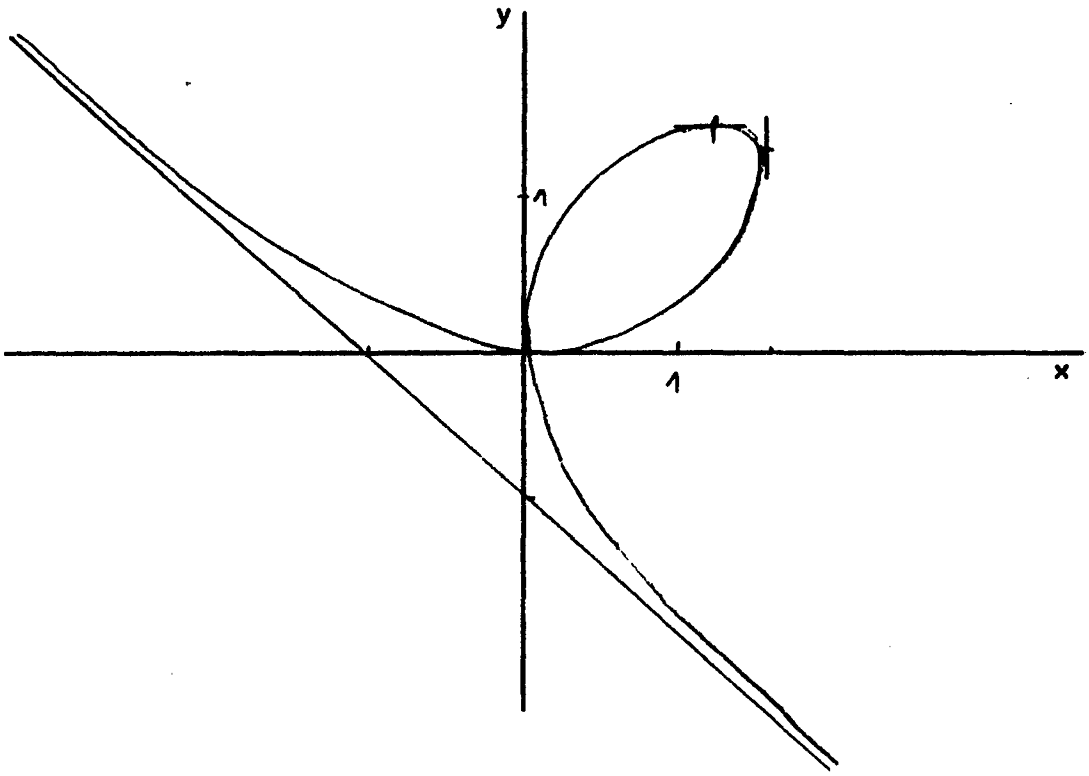
Asyptote oblique : $y = ax + b$

$$a = \lim_{\substack{x \to \infty \\ t \to -1}} \frac{3t^2}{3t} = -1$$

$$b = \lim_{\substack{x \to \infty \\ t \to -1}} \left(\frac{3t^2}{1 + t^3} + \frac{3t}{1 + t^3} \right) = \lim_{t \to -1} \frac{3t}{1 - t + t^2} = -1$$

asymptote oblique : $y = -x - 1$

Graphique :



Exercices :

Etudier les fonctions suivantes (La remarque faite au début de la page 251 est toujours à l' honneur !)

1. $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin(2t + \frac{\pi}{8}) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \sin(3t + \frac{\pi}{3}) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \sin 3t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin(2t + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin(t + \frac{5\pi}{4}) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin(t + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \sin(t + \frac{\pi}{2}) \\ y = \sin 2t \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = 2.\sin(t + \frac{\pi}{3}) \\ y = \sin 2t \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \sin(3t + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin(2t + \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin(t + \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin(2t + \frac{3\pi}{4}) \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \sin(3t + \frac{\pi}{6}) \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = r.(t - \sin t) \\ y = r.(1 - \cos t) \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \dfrac{t + 2}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t - 5}{(t - 3).(t - 1)} \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\operatorname{tg} t + \sin t + \cos t \end{cases}$

20 $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y = \dfrac{t - 2}{t.(t - 1)} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \sin 2t.\cos^2 t \\ y = \cos 2t.\sin^2 t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t + 1)^2} \\ y = \sqrt[3]{(t - 1)^2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ ... Quelle est cette courbe dans E_3 ?