16 : LA DIFFERENTIELLE

7 h/s.

La dérivée avant qu' elle ne fut définie

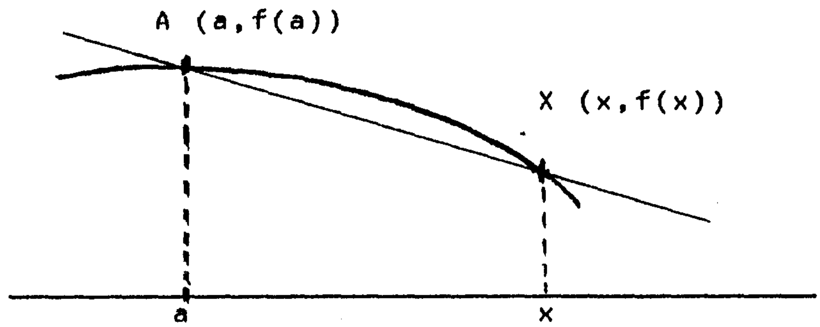
Reprenons la dérivée d' une fonction f en un point a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad (1)$$

Cette définition en termes de limites est due à CAUCHY (1789-1857), de même d' ailleurs que la définition de limite. Elle apparaît vers 1820. Mais la dérivée est bien plus ancienne !

Les pères fondateurs du **calcul différentiel** à savoir NEWTON (1642-1727) et LEIBNIZ (1646-1716) disposaient de leurs géniales inspirations aux alentours de 1670. Comment faisaient-ils ? Nous examinerons le point de vue de Leibniz qui est celui des **différentielles** parce qu' il demeure indispensable à divers égards. Leibniz ne s' exprime pas en termes de limites.

Reprenons l' idée de départ de la dérivée. Nous considérons la courbe d' équation y = f(x) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et un point a intérieur à I. Celui-ci livre le point A = (a , f(a)) de la courbe



Considérons un autre point (variable) X = (x , f(x)) et la sécante AX dont le coefficient angulaire est

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (2)$$

Ces considérations étaient devenues familières à plusieurs devanciers de Leibniz et Newton pour divers cas particuliers comme la courbe définie par un polynôme . Le mérite de nos héros fut de comprendre qu' il s' agisssait d' un procédé général, valable pour une beaucoup d' autres courbes comme par exemple celles dont l' équation met en jeu des fonctions trigononométriques.

La notion de fonction n' est pas encore très explicite à l' époque. On raisonne plutôt en termes de courbes et d' équations, la grande trouvaille de DESCARTES (1596-1650) et de FERMAT (1601-1665), vers 1635.

Revenons à (2).

L' idée fondamentale de Leibni~~t~~z est celle des différences.

On peut considérer x - a comme un **accroissement** de la variable indépendante ou encore comme une nouvelle variable qu' on écrit Δx (delta pour différence).

Dès lors, il est naturel aussi de poser

$$\Delta f = f(x) - f(a)$$

qui est l' accroissement de la variable dépendante ou encore une nouvelle fonction.

Alors, (2) devient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (3)$$

qui est le **taux d' accroissement** (ou accroissement relatif).

Et la dérivée ? Pour Cauchy et pour nous,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Mais Leibni~~t~~z ne dispose pas de ces notions. Voici quelle est sa géniale intuition.

Il imagine qu' il y a un **plus petit accroissement** positif de x qu' il appelle dx (d pour différence) et qui serait une grandeur infiniment petite quoique non nulle.

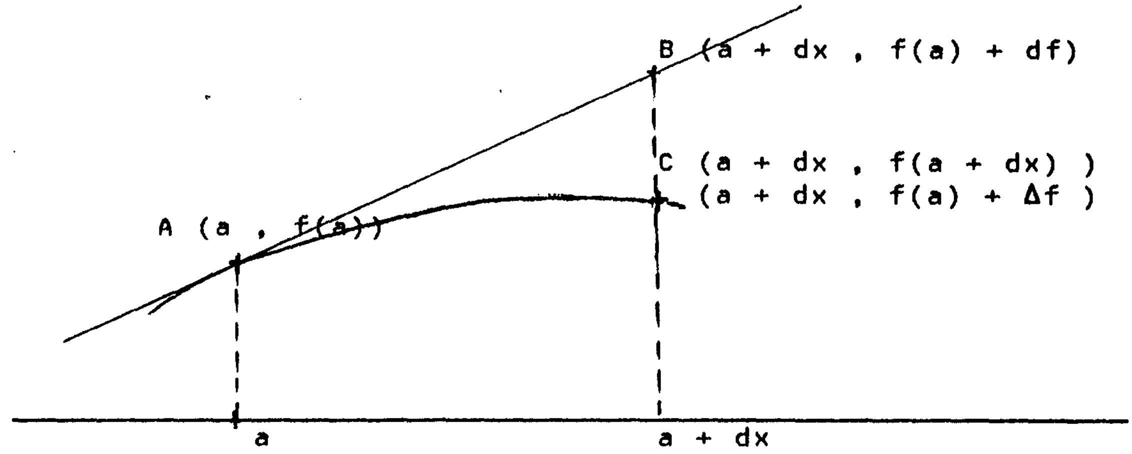
En a + dx, la fonction f prendrait la valeur f(a + dx) = f(a) + df. dx et df se lisent " différentielle de x et de f".

Ainsi, la pente de la tangente à la courbe en A n' est autre que (3) dans le cas particulier où Δx est infiniment petit c' est à dire le **quotient différentiel**

$$\frac{df}{dx} \qquad (4)$$

Leibni~~t~~z ne parlera pas de dérivées. Celles-ci, sous le nom de "fluxions" sont dues à Newton et c' est LAGRANGE (1736-1813) qui introduira vers 1800 le mot dérivée ainsi que la notation encore utilisée actuellement à savoir f'(x) pour la dérivée de la fonction f(x).

Graphiquement, voici comment apparaît le **quotient différentiel** (4) ou la dérivée.



Si dx est infiniment petit, Leibni~~t~~z considère que B = C. Si dx devient un nombre quelconque, B parcourt la tangente à la courbe en a et C parcourt cette courbe.

Une interprétation actuelle ,rigoureuse des différentielles se présente comme suit.

La différentielle de f en a est la **fonction linéaire** df **définie** par

$$df : dx \longrightarrow f'(a).dx$$

C'est la droite parallèle à la tangente en A, passant par l' origine. Cette droite livre la meilleure approximation polynômiale du premier degré de la fonction f en A.

Il faut y croire

Les conceptions de Leibni~~t~~z sont très simples et faciles à mettre en oeuvre. Son calcul différentiel fait merveille.

Ainsi $d(x + y) = dx + dy$

$d(xy) = x.dy + y.dx$

ce que Leibni~~t~~z a trouvé après des années de réflexion.

Si nous considérons une **fonction de fonction** ou **composée** f(g(x)), sa dérivée en a vaut f'(g(a)).g'(a). Pour Leibnitz, ceci est limpide grâce à

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}$$

L' ennui, car il y en a un, est qu' il faut admettre l' existence de grandeurs infiniment petites. La théorie des nombres réels en vigueur au 17^{e} siècle est celle qui a été exposée dans les célèbres Eléments d' Euclide (vers − 300). C' est une théorie qu' on attribue à EUDOXE. Elle constitue la partie la plus difficile des Eléments et ce sera la dernière à être dépassée par une théorie plus efficace, élaborée seulement vers 1870 par DEDEKIND et CANTOR.

Le terrain est donc délicat. D' autant plus délicat que les Eléments sont considérés, en dehors des mathématiques, comme le modèle par excellence d' une théorie vraie. La théologie elle-même s' en inspire dans des efforts en vue d' établir la vérité de la religion catholique ou d' une de ses variantes.

On comprend que les infiniments petits fassent déborder le vase. Il n' est pas question de bousculer LA vérité. Une longue et pénible polémique se déclenche notamment avec la virulente opposition de l' évêque anglican et philosophe BERKELEY.

Pendant ce temps, le calcul différentiel est appliqué avec succès. Il permet des développements foudroyants. Cela donne confiance à ses "fidèles".

D' ALEMBERT aura l' à propos de dire
" *Allez de l' avant et la foi vous viendra* ".

Réhabilitation

Durant deux siècles, de 1670 à 1870 environ, des mathématiciens vont se battre à propos des fondements du calcul différentiel. Le progrès accompli par Cauchy est décisif. Sous l' impulsion de WEIERSTASS, durant la période 1850-1870, les canons actuels de rigueur sont imposés au sujet, sans concessions. La théorie des nombres réels est affranchie de la physique et de la géométrie. Tout recours au raisonnement justifié par un dessin seul est banni. Il est défendu de recourir aux infiniments petits qui n' existent pas. Bien entendu, cette discipline de fer est loin d' être entérinée par tous les professeurs et tous les utilisateurs.

La différentielle survit en tant qu' approximation linéaire de la fonction. Prenons encore un exemple qui est un coup d' oeil sur une prolongation du cours de secondaire :

Si f est une fonction de deux variables et

$$z = f(x,y)$$

l' équation de la surface représentative, f est **différentiable** en (x_0,y_0) s' il existe une application linéaire (tiens! tiens!,)
$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\ (x_0,y_0) + (\Delta x,\Delta y)\ ) - f(x_0,y_0) - T(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Dans ce cas, la **différentielle** de f est

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{(x_0,y_0)} .dx + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_{(x_0,y_0)} .dy$$

et si on sait que l' équation du plan tangent à la surface en $(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0))$ est

$$z - f(x_0,y_0) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_{(x_0,y_0)} .(x - x_0) + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_{(x_0,y_0)} .(y - y_0) \quad ,$$

on conçoit que la différentielle est la meilleure approximation linéaire de la fonction en (x_0,y_0).

Est-ce la fin de l' histoire? Pas du tout. Elle rebondit peu avant 1970. Le mathématicien A. ROBINSON élargit rigoureusement le corps des réels $\mathbb{R}$ en des corps $\overline{\mathbb{R}}$ qui admettent des infiniment petits et des infiniminent grands. Du coup se dével
oppe une **Analyse Non Standard**
dans laquelle les intuitions de Leibni~~t~~z deviennent tout à fait rigoureuses. On peut rêver que c'est un sujet qui attend vos descendants au tournant de la rhétorique en 2170.

Note historique sur LEIBNI~~T~~Z

G.W. Leibni~~t~~z (1646-1716) est né à Leipzig où il rentre à l'université à 15 ans. Il est diplômé à 17 ans après avoir étudié la théologie, le droit, la philosophie et ... les maths. A 20 ans il est prêt à passer le doctorat en droit mais il est refusé vu son jeune âge et il s' en va à Nüremberg où il est fait docteur. Il entre successivement dans les services diplomatiques de plusieurs souverains allemands notamment celui qui allait devenir le roi Georges I d' Angleterre. Leibni~~t~~z voyage beaucoup en raison de son influence au gouvernement en vue de diverses missions. A Paris en 1672, il rencontre Huygens qui lui recommande de lire les traités mathématiques de Pascal (1658-1659). A Londres en 1673, il acquiert le dernier livre de Barrow (le maître de Newton) et il devient membre de la célèbre Royal Society, (l' équivalent de l' Académie). C' est de 1673 à 1676 que Leibni~~t~~z conçoit l' essentiel de ses idées sur le calcul différentiel et intégral, sans savoir que Newton en a fait autant quelques années plus tôt mais sans rien publier. C' est en 1687 que Newton publie le premier aperçu de ses idées. Elles figurent dans " Philosophiae naturalis principia mathematica", le traité scientifique le plus admiré de tous les temps. Ce livre présente les fondements de la physique et de l' astronomie. Une violente querelle teintée de nationalisme allait opposer, sur la question des priorités, les "fans" de Newton et ceux de Leibni~~t~~z. Elle eut des conséquences durables sur le développement des mathématiques.

Gottfried Wilhelm Leibniz.