15 : FONCTIONS REELLES - SYNTHESE

3h/s., 5h/s.,7h/s.

REFLECHIR AUX FONCTIONS

En dehors des cours de mathématiques, il est rare qu' on étudie une fonction pour elle-même. La fonction sert d' outil pour répondre à diverses questions. A titre d' exemple, on peut se préoccuper de croissance, d' accélération, de taux d' intérêt, d' optimisation. C' est la nature des questions posées qui doit guider l' étude le la fonction. IL est possible pour ce faire que les asymptotes ou la dérivée ne soient pas nécessaires et dès lors on ne s' en préoccupe pas.

Ici, notre objectif est de passer en revue les divers outils accumulés peu à peu et de les appliquer à bon escient.

Rappelons l' outil le plus élémentaire et le plus courant (chapitre 3) : certaines fonctions se représentent graphiquement à partir du graphique de fonctions plus simples qui sont déjà connues.

Des questions à se poser rapidement si cet outil n' est pas adéquat ou insuffisant :

* quel est le domaine de la fonction ? (chapitre 3)
* quelles sont les symétries éventuelles du graphique ? (chapitre 3)
    - parité (axe de symétrie, centre de symétrie)
    - période (symétrie de translation)
* a-t-on des informations rapides sur le signe de la fonction?
* quels sont les **points critiques** c'est-à-dire les points en lesquels la fonction s' annule, se maximise, se minimise, change de convexité; ce sont aussi les extrémités éventuelles de segments sur lesquels la fonction est définie ? (chapitre 3, 10)
* quels sont les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante, convexe vers le haut ou vers le bas ?(chapitre 10)
* quelles sont les (droites) asymptotes ? (chapitre 12)

Pour répondre à ces questions, on peut se servir de la dérivée f' de la fonction f à étudier, lui appliquer toutes les questions ci-dessus dans la mesure où ces questions pourront faire avancer l' étude de f. Pour mieux connaître f', on peut être amené à étudier f'', voire f''', etc.

Il peut être parfois utile de déterminer de manière explicite quelques points du graphique et les tangentes en ces points afin d' étoffer ou d' affiner le graphique.

Ces informations de nature analytique, se traduisent globalement sur le graphique. Elles se soutiennent mutuellement et le raisonnement sur le graphique relatif à la cohérence de ces informations permet souvent de détecter des erreurs commises dans l'analyse.

Un autre outil de synthèse est le **tableau des variations**. Dans celui-ci, on fait occuper une ligne respectivement à x, f''(x), f'(x), f(x) et on y reporte les valeurs critiques de x, les valeurs prises par f'' ,f' ,f en ces points (si elles existent), les intervalles de croissance, etc.

Il peut arriver qu' une chaîne d' études soit nécessaire, par exemple une étude détaillée de f'' (via f''' et f^{IV}) puis sur cette base, pour f' et enfin pour f.

Exemple 1 :

Etudions $y = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 3x + 11$

$y' = 5x^4 - 12x^3 + 4x + 3$

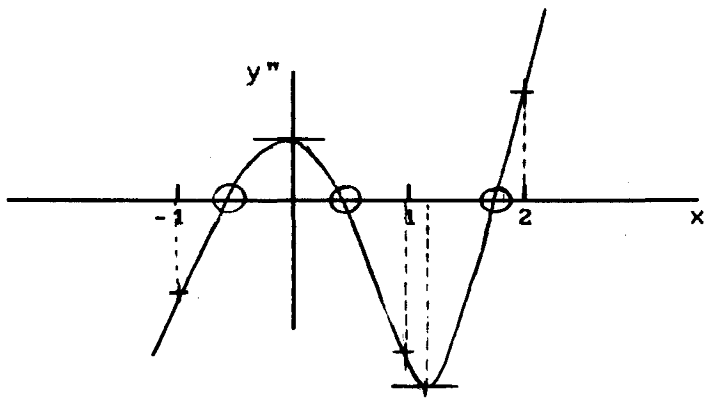
$y'' = 20x^3 - 36x^2 + 4$

$y''' = 60x^2 - 72x = 12x(5x - 6)$

L' étude du signe de la fonction y''' est aisée et nous permet de tirer des conclusions au sujet de la fonction dont elle est la dérivée, à savoir y" :

x		0		$\frac{6}{5}$	
y'''	+	0	−	0	+
y''	↗	max	↘	min	↗

Le calcul de y"(−1) < 0, y"(0) > 0, y"(1) < 0 et y"(2) > 0 nous permet d' esquisser l' allure de y" :



et d' affirmer que y" a 3 racines r_1, r_2 et r_3 avec

$$-1 < r_1 < 0,\ 0 < r_2 < 1,\ 1 < r_3 < 2.$$

Nous connaissons maintenant le signe de y" et nous pouvons recommencer le raisonnement ci-dessus en vue de tirer des conclusions sur y' :

x	-1		0		1		2
y"	−	0	+	0	−	0	+
y'	↘	min	↗	max	↘	min	↗

Comme y'(-1) > 0, y'(0) > 0, y'(1) = 0, y'(2) < 0 et y'(3) > 0 , on peut maintenant en conclure que le graphique de y' possède une des trois formes suivantes :

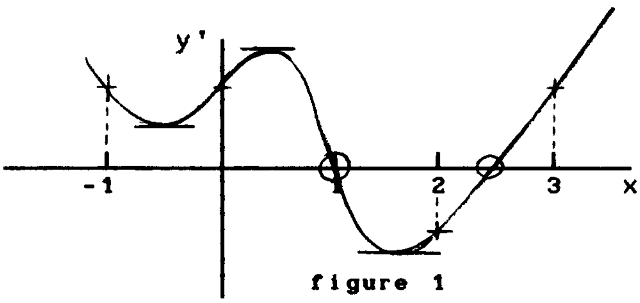


figure 1

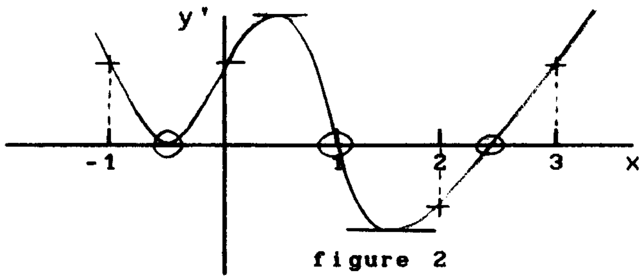


figure 2

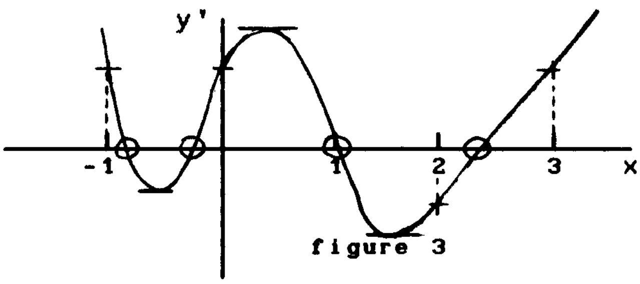


figure 3

Le second minimum pourrait se situer entre 2 et 3 mais ceci n' influe en rien la suite du raisonnement.

De plus, l' équation de la tangente à la courbe au point d' abscisse -1 a pour équation

$$y' = -52x - 36$$

et celle au point d' abscisse 0 a pour équation

$$y' = 4x + 3$$

Ces tangentes se coupent au point $(-\frac{39}{56}, \frac{12}{56})$. Ce point ayant une ordonnée positive, il en est de même pour le mininimum de la fonction étudiée et la figure 1 est donc la bonne esquisse de la courbe recherchée.

Même petit jeu pour le signe de y' :

x		1		2		3
y'	+	0	-	-	0	+
y	↗	max	↘	↘	min	↗

Comme y(0) 〉 0, y(1) 〉 0, y(2) 〉 0 et y(3) 〉 0, on tire comme conclusion que y peut avoir 1, 2 ou 3 racines et que le graphique de y possède une des trois formes suivantes :

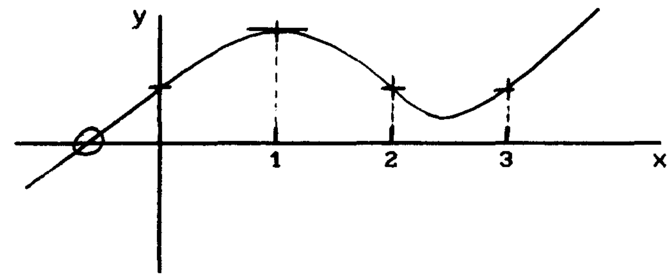


figure 1

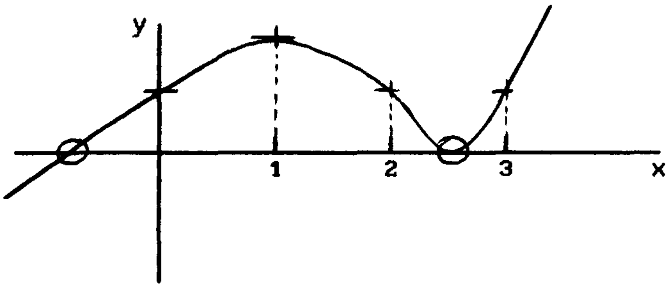


figure 2

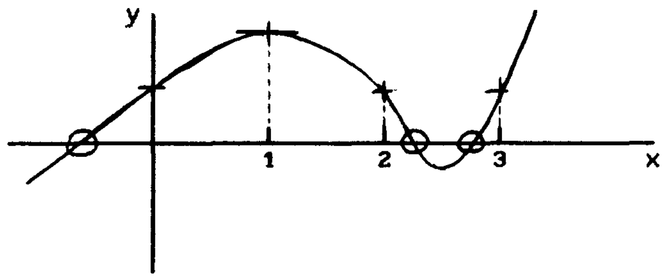


figure 3

De plus, l' équation de la tangente à la courbe au point d' abscisse 2 a pour équation

$$y = -5x + 19$$

et celle au point d' abscisse 3 a pour équation

$$y = 96x - 250$$

Ces tangentes se coupent au point ($\frac{269}{101}$, $\frac{574}{101}$). Ce point ayant une ordonnée positive, il en est de même pour le mininimum de la fonction étudiée et la figure 1 est donc la bonne esquisse de la courbe recherchée.

Nous avons donc progressé à pas de géants dans l' étude de cette fonction et ce à peu de frais.

Il est évident que la liste des questions posées ci-dessus n' est pas exhaustive. Par ailleurs, insistons sur le fait qu' il ne faut pas nécessairement passer par chaque étape indiquée pour obtenir un graphique valable. Evitons la robotisation.

Exemple 2 :

On étudie la fonction dérivable f. On est amené à s' interroger sur ses points d' inflexion. De ce fait on examine la fonction f''. L' objectif poursuivi au sujet de celle-ci est avant tout la détermination des zéros. D' autres questions au sujet de f'' sont pertinentes uniquement dans la mesure où elles permettent d' atteindre l' objectif visé.

Tableau des variations - exemples :

Exemple 3 :Etude de la fonction $f : x \longrightarrow \frac{(1 + x)^3}{x^2}$

Domaine : $x \in \mathbb{R}_0$

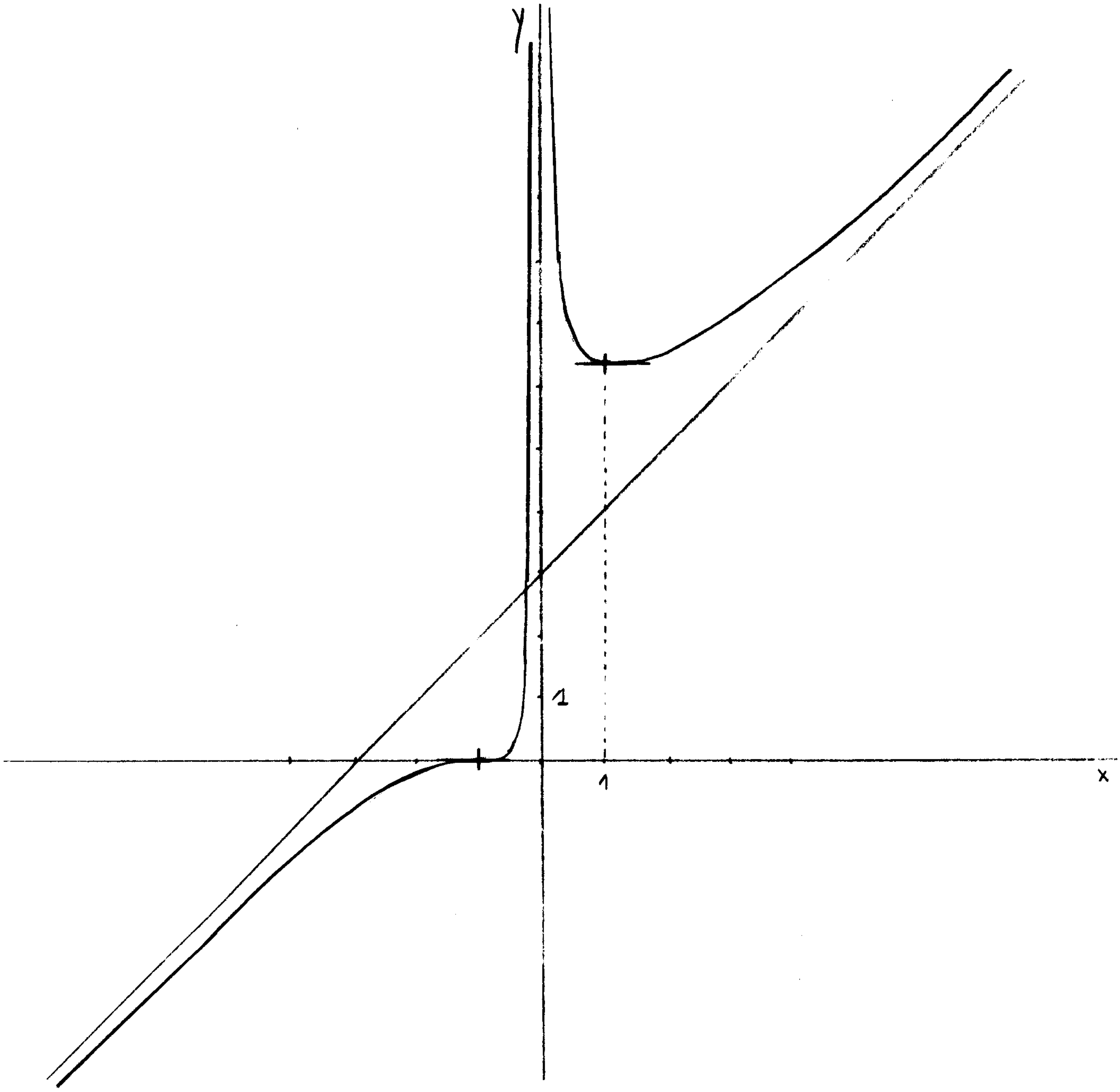
Asymptotes : A.V. : $x = 0$; A.O. : $y = x + 3$

Dérivées : $y' = \frac{(1 + x)^2.(x - 2)}{x^3}$; $y'' = 6.\frac{1 + x}{x^4}$

Tableau des variations de la fonction :

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
y"		−	0	+		+	+	+	
y'	1	+	0	+		−	0	+	1
y	A.O.	−	0		A.V.	+	$\frac{27}{4}$	+	A.O.
			point d' infl.				min.		

Graphique :



Exemple 4 : Etude de la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

Période : $T = 2\pi$. On étudie la fonction pour $0 \leq x \leq 2\pi$

Domaine : $x \neq \dfrac{\pi}{2}$

Asymptote : A.V. : $x = \dfrac{\pi}{2}$

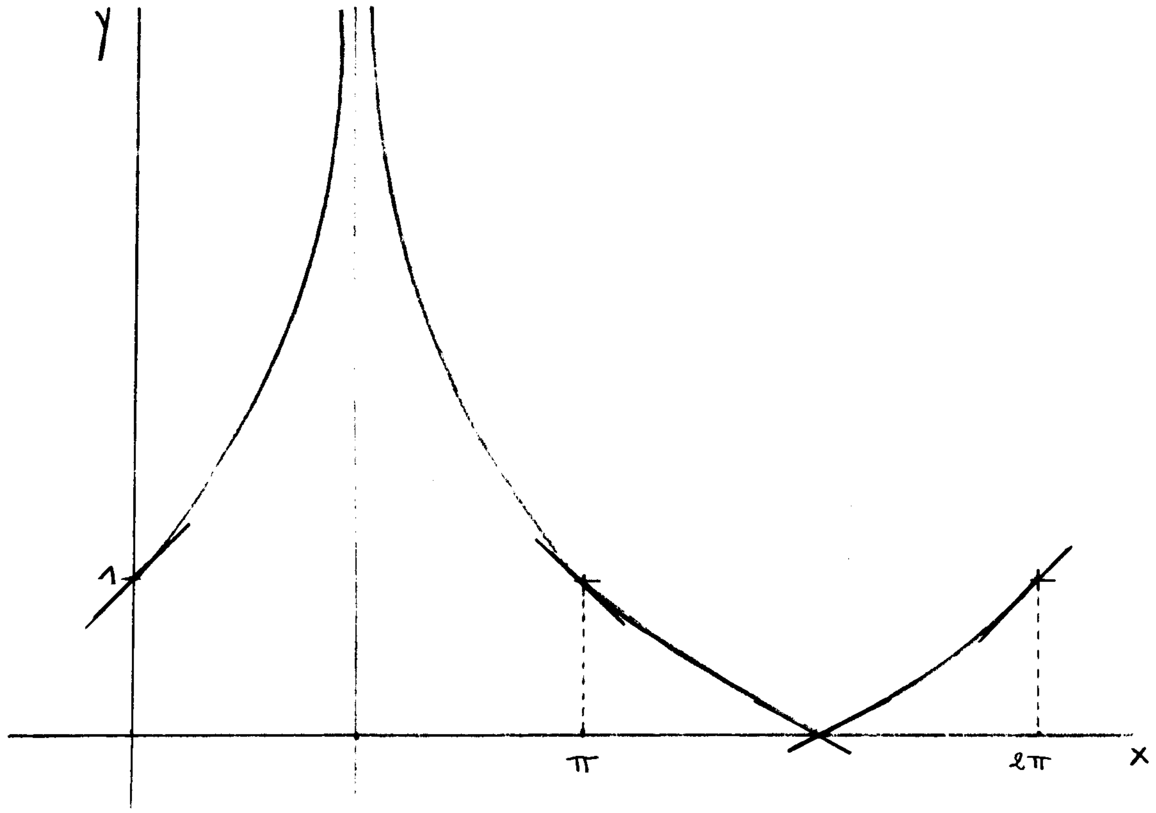
Dérivées : $y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \sin x} & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ \dfrac{-1}{1 - \sin x} & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

$y'' = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ \dfrac{-\cos x}{(1 - \sin x)^2} & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Tableau des variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y''	1	+		+	1	+	0	+	1
y'	1	+		−	−1	−	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	+	1
y	1	+	A.V.	+	1	+	0	+	1
		↗		↘		↘	point angulaire	↗	

Graphique :



<u>Exemple 5</u> : Etude de la courbe qui a pour équation $3x^2 - y^2 - x^3 = 0$

L' ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient cette équation n' est pas une fonction mais la réunion des graphes de deux fonctions à savoir

$$f_1 : x \longrightarrow \sqrt{3x^2 - x^3} \quad \text{et} \quad f_2 : x \longrightarrow -\sqrt{3x^2 - x^3}$$

Nous étudierons f_1 , le graphique de f_2 s' obtient par une symétrie d' axe X.

Etude de $f_1 : x \longrightarrow \sqrt{3x^2 - x^3}$:

Domaine : $x \leq 3$

Pas d' asymptote

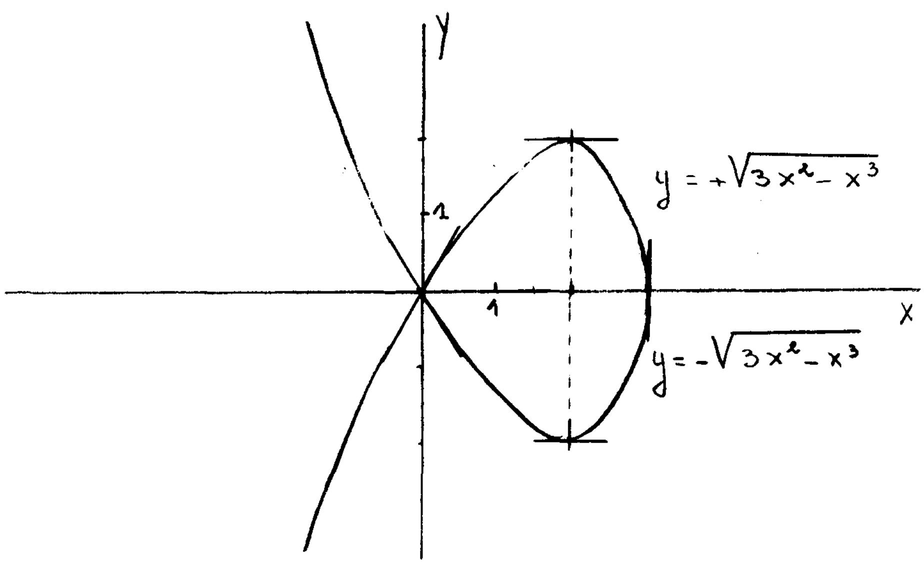
Dérivées : $y' = \dfrac{3x(2 - x)}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}$

$$y'' = \frac{3x^3(x - 4)}{4\sqrt{\left(3x^2 - x^3\right)^3}}$$

Tableau des variations :

x		0		2		3
y"	+		−	−	−	
y'	−	$-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$	+	0	−	∞
y	+	0	+	2	+	0
	↘	point angulaire	↗	max.	↘	

Graphique :



Exemple 6 : Etude de la courbe qui a pour équation $x^3 - xy^2 + y = 0$ (1)

a) Le calcul de y en fonction de x nous fournit le domaine et les asymptotes. En effet, $x^3 - xy^2 + y = 0$ est équivalent à

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x^4}}{-2x} \quad \text{ou} \quad y = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4x^4}}{-2x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ y = 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

A toute valeur non nulle de x correspondent donc deux valeurs de y. Un calcul de limites nous montre que les droites $x = 0$, $y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes.

On remarque de plus que si le point (x,y) appartient au graphique de la courbe, il en est de même pour le point $(-x,-y)$. On a donc une courbe symétrique par rapport à l' origine.

b) Etudions $x^3 - xy^2 = -y$ (2)

qui est une expression équivalente à (1). En un point du graphique de la courbe représentative de (1), les deux membres de (2) doivent avoir le même signe. Le signe de $x^3 - xy^2$ dans le plan est schématisé par la figure 1 et celui de $-y$ par la figure 2. Le graphique de notre courbe ne peut donc passer que dans la zone non hachurée de la figure 3.

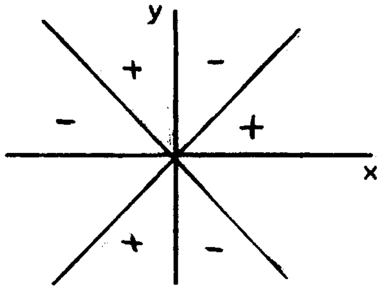


figure 1
signe de $x^3 - xy^2$

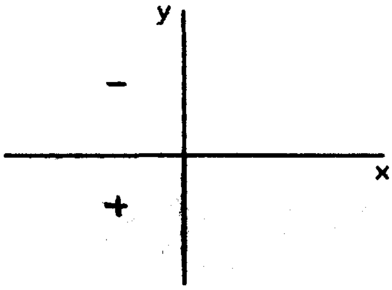


figure 2
signe de - y

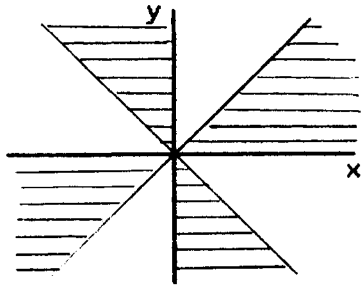


figure 3
partie non hachurée :
zone où peut se situer
la courbe d' équation (1)

c) Le même travail peut être fait pour $x^3 + y = xy^2$ qui est une autre expression équivalente à (1).

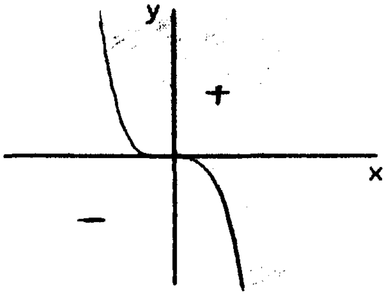


figure 4
signe de $x^3 + y$

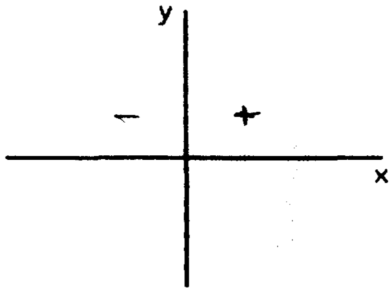


figure 5
signe de xy^2

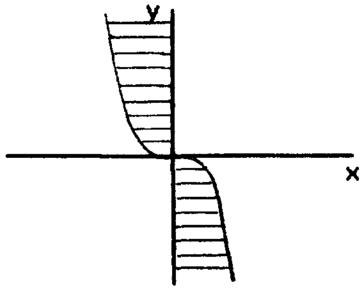


figure 6
partie non hachurée : zone où peut se situer la courbe d' équation (1)

d) continuons ce petit jeu avec $y - xy^2 = -x^3$

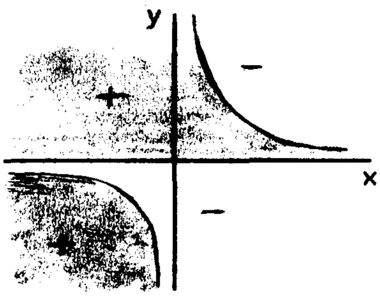


figure 7
signe de $y - xy^2$

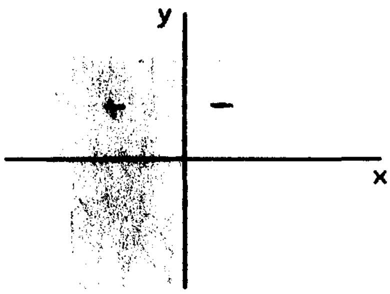


figure 8
signe de $- x^3$

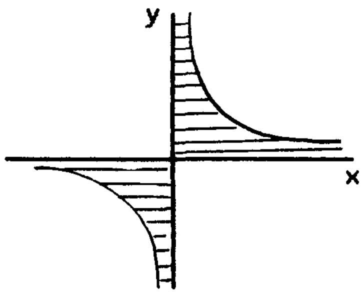
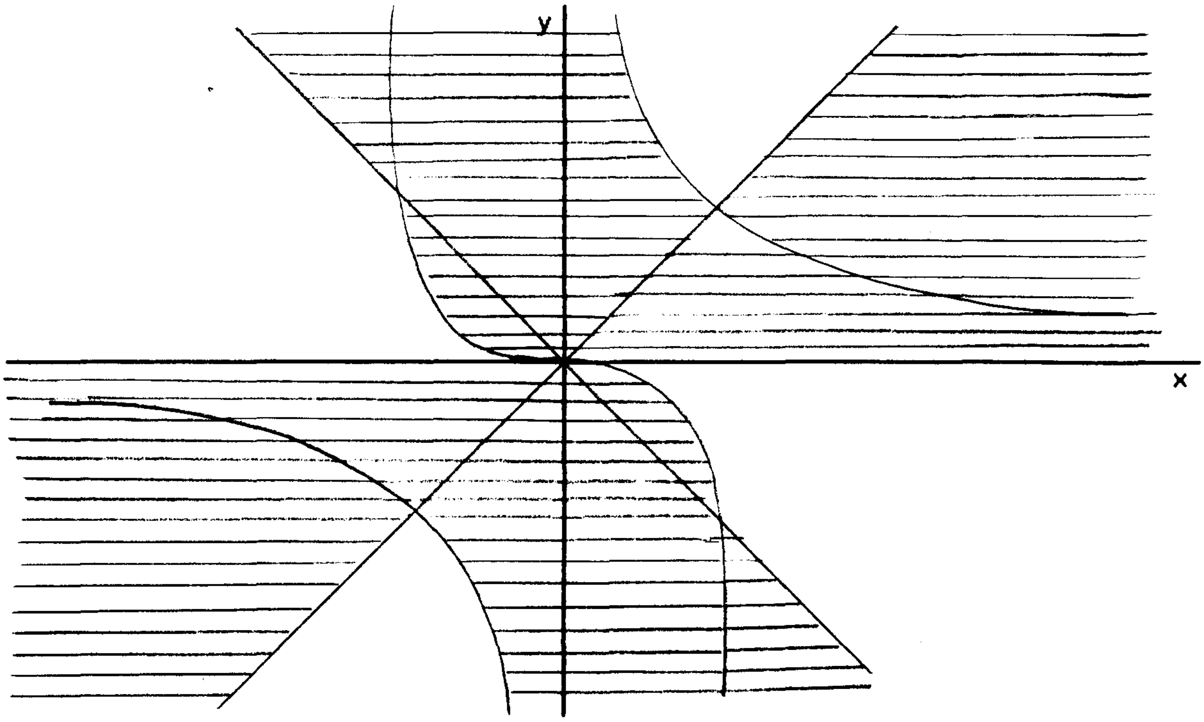


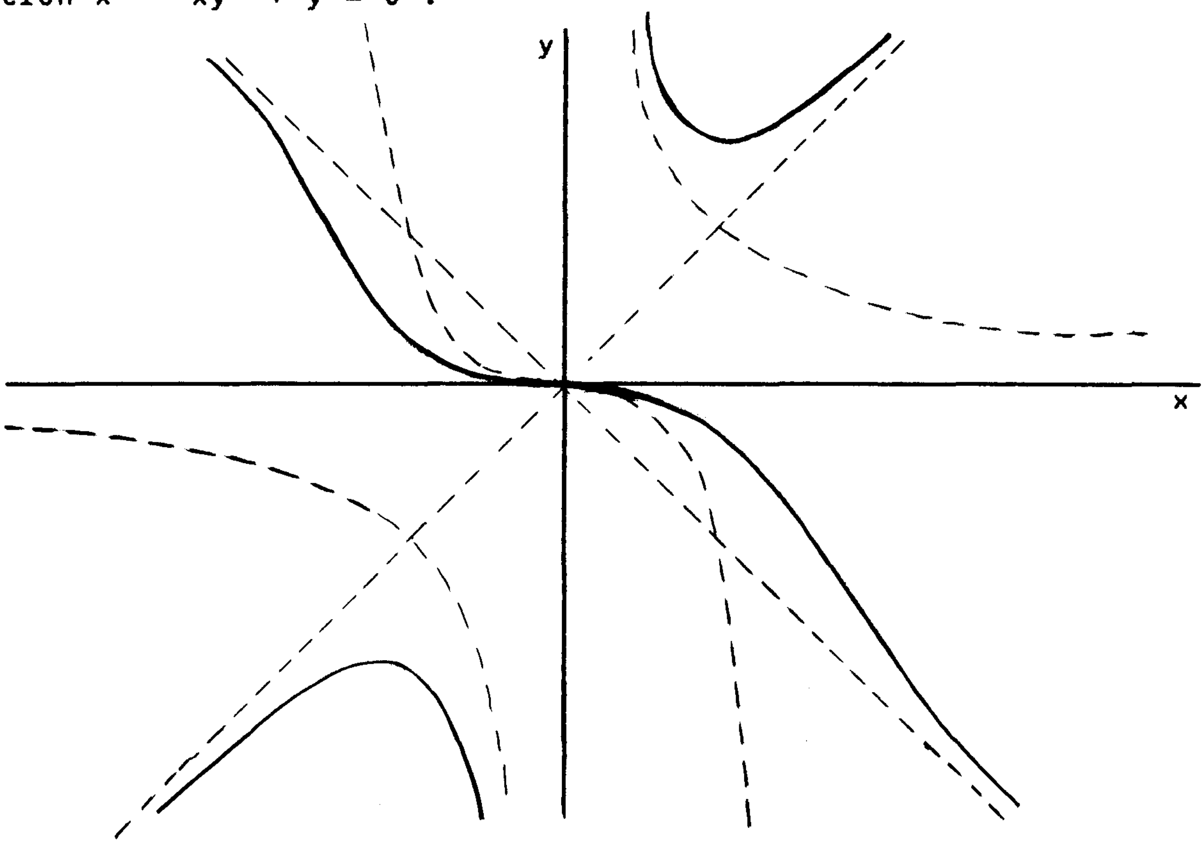
figure 9
partie non hachurée : zone où peut se situer la courbe d' équation (1)

e) La superposition des figures 3, 6 et 9 restreint sensiblement les parties du plan où peut passer le graphique.



Il est à noter que si l' on coupe cette courbe du troisième degré par une droite, on obtient au plus 3 points d' intersection ce qui empêche la courbe d' adopter un comportement par trop sinueux.

On peut deviner maintenant l' aspect du graphique de la courbe d' équation $x^3 - xy^2 + y = 0$:



Calcul approché d' un MAXIMUM sans utilisation de la dérivée

Soit f une fonction dérivable dans [a,b] qui admet un maximum unique dans cet intervalle en un point x qu' on désire approcher avec une approximation donnée par exemple à 10^{-9} près. Supposons f(a) $\leq$ f(b) ce qui livre b comme première approximation. On pourrait bien sûr partager [a,b] en intervalles de longueur 10^{-9} , tester la valeur de f sur leurs extrémités et déterminer la plus grande. Si [a,b] = 1 cela représente un calcul très long d' environ 10^{9} valeurs de f et de leur comparaison. On peut convenir de partager plutôt [a,b] en n intervalles de longueur $\frac{b - a}{n}$ et tester la valeur de f sur leurs extrémités. La programmation est d' autant plus simple que n = 2, 3 ou 4. Prenons n = 3. On a alors

Si f(c) $\leq$ f(d) alors le maximum est compris entre c et b et on peut remplacer [a,b] par [c,b] et réitérer le processus.

Si f(c) > f(d) alors le maximum est compris entre a et d et on peut remplacer [a,b] par [a,d] et réitérer le processus.

Programme en PASCAl pour programmeur en herbe :

```
function f(x:real): real;
begin
  f:=  f(x); ------------------------> On remplace f(x) par la fonction
end;                                                étudiée

procedure Max(var a,b:real; Eps:real);
var interval,c,x1,x2: real;
begin
    if b<a then
      begin
        c:=a;a:=b;b:=c;  (*Echange de a et de b*)
      end;
      (* b toujours > a *)
    interval:= b-a;
    while b-a>Eps do
      begin
        interval:= (b-a)/3;
        x1 := a + interval;
```

```
        x2 := x1 + interval;
        if f(x1) <= f(x2) then a:=x1 else b:=x2;
     end;
end;

var deb,fin,Epsilon:real;
begin
  writeln('Ce    programme    détermine    un    intervalle    de    longueur    '+
    'inférieure    à    Epsilon    dans    lequel    se    trouve    un    maximum    '+
    'de la fonction considérée dans un intervalle [a,b] de '+
    'départ.');
  writeln;
  write('Epsilon = ');
  readln(Epsilon);
  write('a = ');
  readln(deb);
  write('b = ');
  readln(fin);

  Max(deb,fin,Epsilon);

  writeln(' Le maximum trouvé est compris entre ',deb,' et ',fin);
end.
```

Dans les pàges qui suivent, il y a une série de fonctions à étudier.Beaucoup sont du même ordre de difficulté, ceci pour permettre aux élèves d' étudier seuls des fonctions différentes et d' échanger leurs résultats.

1. $y = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

2. $y = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$

3. $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

6. $y = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$

7. $y = \dfrac{(1 + x)^3}{x^2}$

8. $y = \dfrac{3 + 2x - x^2}{(x - 2)^2}$

9. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

10. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

11. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

12. $y = \dfrac{-1}{x^4 - 2x^2 + 1}$

13. $y = \dfrac{x}{(x + 3)^2}$

14. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

15. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

16. $y = x^3 - 3x + 2$

17 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

18. $y = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

19. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3}$

20. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$

21. $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$

22. $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 4}$

23. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

24. $y = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

25. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x}$

26. $y = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x}$

27. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

28. $y = \dfrac{(x + 1)^3}{x^2 - 3x + 2}$

29. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$

30. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$

31. $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

32. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$

33. $y = \dfrac{4.(5x^2 - 4x - 1)}{5.(x^2 - 2x - 3)}$

34. $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 1}$

35. $y = \dfrac{x - 7}{x^2 + 3x + 2}$

36. $y = \dfrac{x^4}{(x + 1)^3}$

37. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

38. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 1}$

39. $y = \cos 2x + \cos x$

40. $y = 2\sin x - \sin 2x$

41. $y = \cos^3 x - 3\cos x + 2$

42. $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 3x$

43. $y = 2\sin^2 x - 3\cos x$

44. $y = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3$

45. $y = \cos x - \cos^2 x$

46. $y = \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x$

47. $y = \sin^2 x \,.\, \cos 2x$

48. $y = \sin 2x + 2\cos x$

49. $y = \sin^2 x \,.\, \sin 2x$

50. $y = \sin 2x + 2\sin x$

51. $y = \cos^2 x \,.\, \cos 2x$

52. $y = 2\cos^2 x - 3\sin x$

53. $y = \sin x - \sin^2 x$

54. $y = \sin x + \sin 2x$

55. $y = \sin^3 x - 3\sin x + 2$

56. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + .\cos x}$

57. $y = \dfrac{3\sin x}{2\sin x - 1}$

58. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2}$

59. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}$

60. $y = \dfrac{3\sin 2x}{1 + \sin 2x}$

61. $y = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$

62. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$

63. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x}$

64. $y = \dfrac{3\cos x}{2\cos x - 1}$

65. $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$

66. $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$

67. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 2}$

68. $y = \dfrac{\sin x \, . \, \cos x}{1 + 4\sin x}$

69. $y = \dfrac{0.5 + \sin x}{1 + \cos x}$

70. $y = \dfrac{\cos 4x}{\cos^4 x}$

71. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$

72. $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

73. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x - 1}{x}$

74. $y = \operatorname{tg}(\pi.\cos\pi x)$

75. $y = \sin(\pi.\operatorname{tg} x)$

76. $y = \sin\frac{1}{x}$

77. $y = \sin x^2$

78. $y = x.\sin x$

79. $y = x \cdot \cos\frac{1}{x}$

80. $y = \dfrac{|x^2 - x| - 2}{1 + |x|}$

81. $y = \dfrac{2x}{1 + |x|}$

82. $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$

83. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

84. $y^3 = \left(3 + 2x - x^2\right)^2$

85. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$

86. $y = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2}$

87. $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

88. $y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

89. $y^3 + 1 = 2 \cdot (x - 1)^2$

90. Trouver l' ensemble de tous les points du plan équidistants d' un point donné f et d' une droite donnée D.

91. Trouver l' ensemble de tous les points du plan dont la somme des distances à deux points fixes f et f' est constante.

92. Trouver l' ensemble de tous les points du plan dont la différence des distances à deux points fixes f et f' est constante.

93. $y^2 = \dfrac{x^2 \cdot (3 - x)}{9}$

94. $y^2 = x^2 \cdot (x + 7)$

95. $y^2 = x^3 - x$

96. $y^2 = x^3 \cdot (4 - x)$

97. $y^2 = x^4 - 4x^3$

98. $\cancel{y^2 = x^3 \cdot (x - 4)}$

99. $9y^2 = x \cdot (3 - x)^2$

100. $y^4 = x^4 \cdot (x+7)$

101. $y^6 = x^4 \cdot (x-1)^2$

102. $y^6 = x^4 \cdot \left(7 - x^2\right)^3$

103. $y^2 = \dfrac{1 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$

104. $y^2 = \dfrac{x^2 \cdot (4 - x)^2}{(x - 7)^3}$

105. $y^2 = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 2x - 3}$

106. $(x^2 + y^2) \cdot (x - 1)^2 = x^2$

107. $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$

Quel est le domaine de cette fonction ?

Prouver que $y = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2.\sqrt{x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

108. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + b'x + c'}$

Que doivent valoir a, b, c, b' et c' si les droites d'équation $y = 1$, $x = -1$ et $x = -3$ sont asymptotes et si le point (0,1) est extremum ?

109. On donne la fonction

$$y = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

On demande de résoudre l' équation $y = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

110. Dans le plan rapporté à un repère d' origine o et d' axes X,Y, on donne la droite D d' équation $y + 2 = 0$.

a) Formez l' équation de la parabole de foyer o et de directrice D.

b) On considère une droite mobile passant par o et coupant la parabole aux points p et q; formez l' équation du cercle variable ayant p et q pour extrémités d' un diamètre; déterminer son centre c et son rayon.

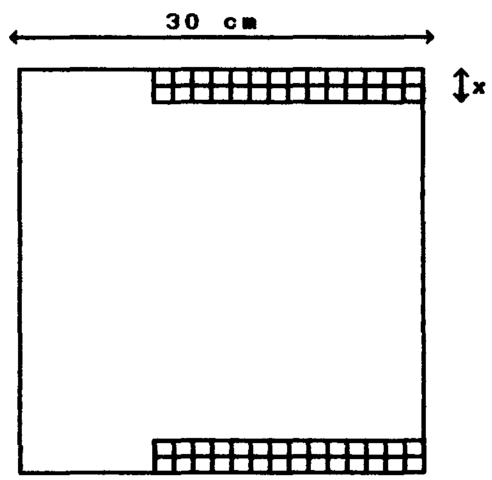
c) Montrez que ce cercle variable est tangent à la directrice D et déterminez le point de contact r. Faites une figure pour les points a), b), c) ci-dessus. (unité = 1 cm)

d) Montrez que les droites or et pq sont perpendiculaires.

e) Déterminer l' équation et la nature du lieu géométrique du point c. Construisez-le.

111. Si 400 personnes assistent à une séance de cinéma lorsque les places sont à 180 F et si l' assistance diminue de 20 personnes pour toute augmentation de prix de 10 F, quel est le prix des places qui permet la recette la plus élevée ?

112. Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée de 30 cm de côté. On désigne par x la mesure en cm de la largeur de la bande découpée.



1) Quel est le volume de la boîte en fonction de x ?

2) Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ?

3) Le fabricant veut obtenir des boîtes de 500 cm^3. Quelle valeur doit-il donner à x ?

113. On veut construire un aquarium dans le hall d' entrée d' un théâtre. Considérant le nombre de poissons qu' on veut y placer, le volume de l' aquarium doit être de 36 m^3. Le directeur du théâtre veut, pour des raisons de place disponible, un aquarium de base carrée avec les quatre côtés en verre et le fond en

mosaïque. Sachant que le verre coûte 3 fois plus cher que la mosaïque, quelles dimensions doit avoir l'aquarium pour être le moins coûteux ?

114. Un gros camion-citerne, rempli à pleine capacité, parcourt une distance de 300 km sur une autoroute, à une vitesse constante de x km/h. Le salaire du chauffeur est de 12,60 $ l'heure; le taux de consommation d'essence du camion est de $1 + \frac{x^2}{100}$ litres à l'heure et le prix de l'essence utilisée est de 20 cents le litre.

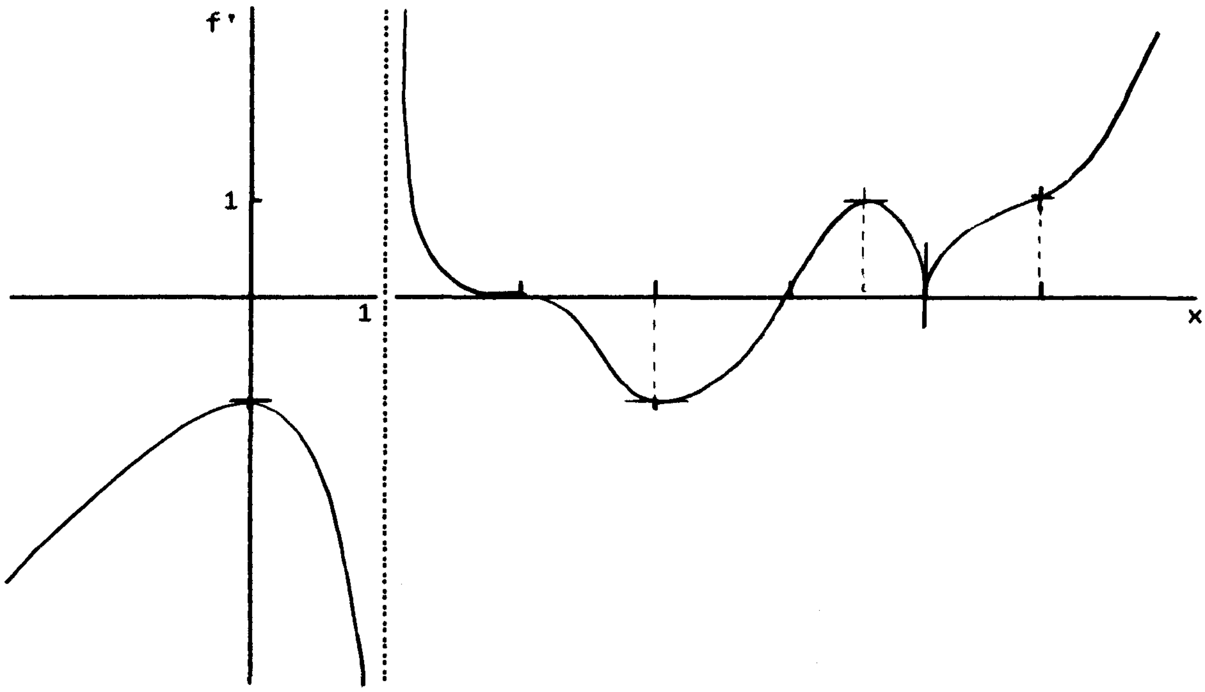
1) Exprimer la durée du trajet en fonction de la vitesse du camion.
2) A quelle vitesse doit circuler le camion-citerne pour que le coût du trajet soit le moins élevé possible ?

115. Trouver une esquisse des courbes suivantes en utilisant un raisonnement similaire à celui tenu pour l'exemple 6 du présent chapitre :

a) $9y^2 - 10x^3 + 10x = 0$

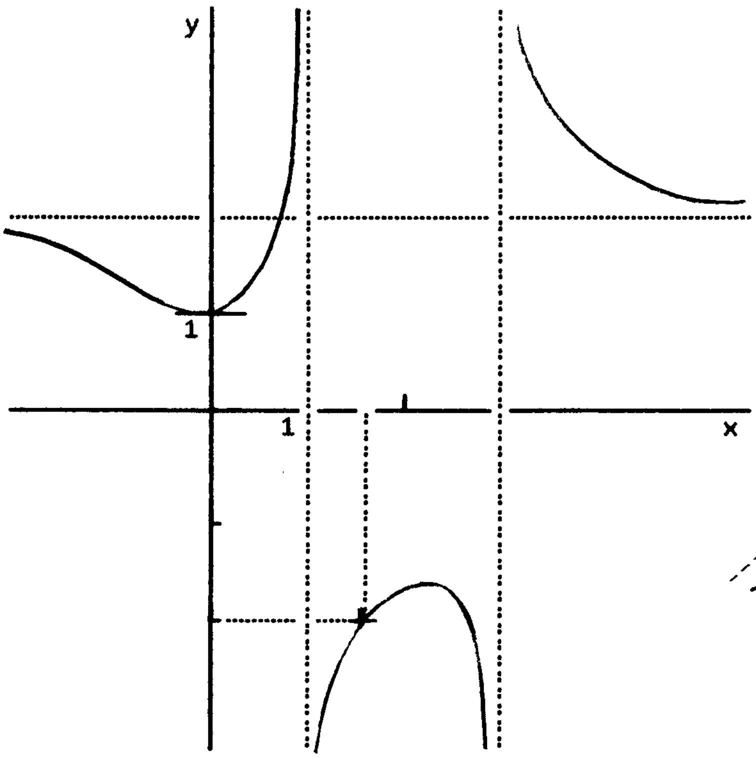
b) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$

116. Connaissant le graphique de f', construire celui de f (à une translation près)

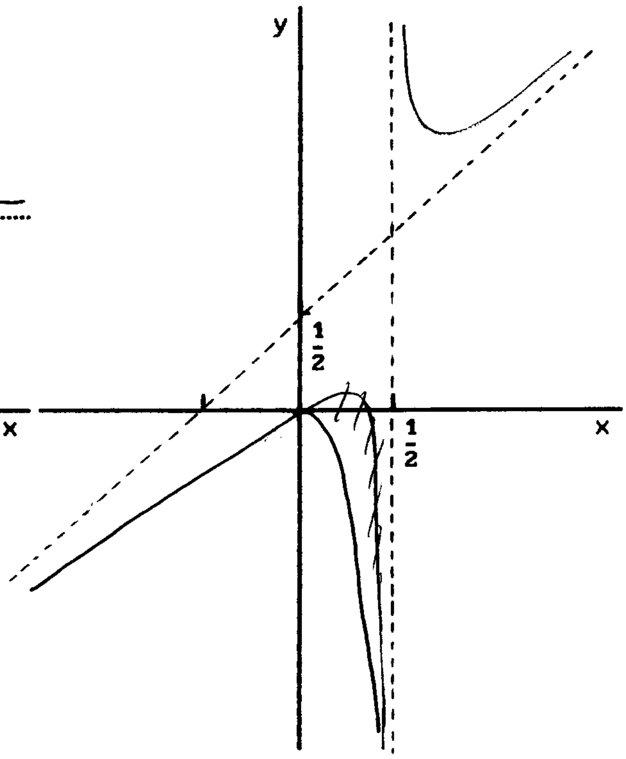


117. Déterminer une équation pouvant caractériser les courbes suivantes :

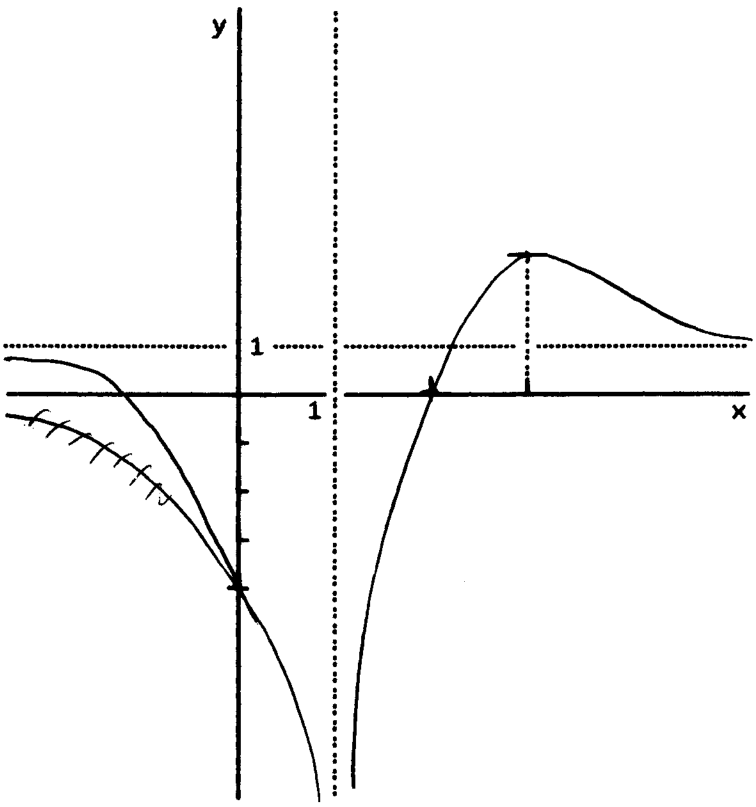
a)



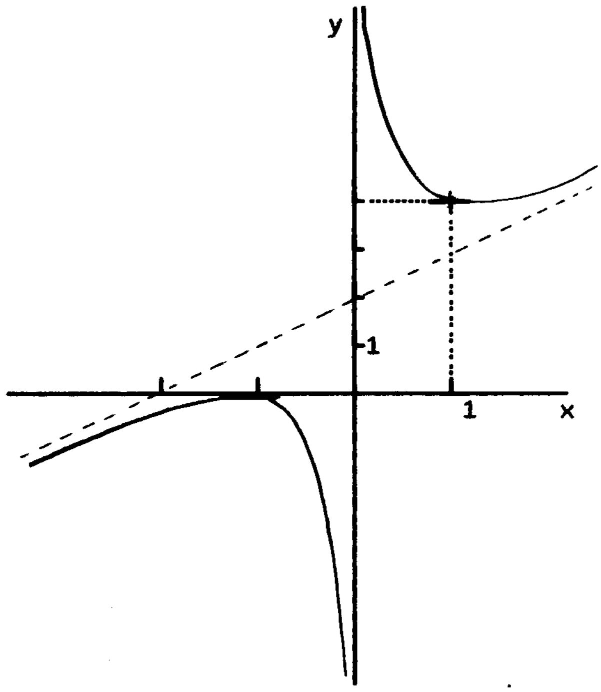
b)



c)



d)



Fonctions dépendant d' un paramètre ou espaces de fonctions

Dès la quatrième nous avons étudié des fonctions dépendant d'un ou plusieurs paramètres telles que

$$y = ax + b \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}_0 \text{ et } b, c \in \mathbb{R}$$

En fait, dès que nous possèdons le contrôle de f(x), nous obtenons aisément celui de familles paramètrées telles que

$$y = f(x) + \alpha,$$

$$y = \beta.f(x)$$

et en combinant celles-ci $y = \alpha.f(x) + \beta$

Nous avons même couvert (chapitre 3)

$$y = \alpha.f(\beta x + \gamma) + \delta \qquad \text{où } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$$

avec comme cas particulier

$$y = \sin x$$

et ses descendants

$$y = \alpha.\sin(\beta x + \gamma) + \delta \qquad \text{où } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire le pain quotidien des physiciens dans une incarnation peu physique.

Pourquoi avoir parlé d' espaces de fonctions ?

Si une fonction dépend de trois paramètres variant chacun dans $\mathbb{R}$, chaque fonction de cette famille peut se représenter par un point de $\mathbb{R}^3$. Ainsi nous jetons un coup d' oeil sur un domaine plus avancé, où une fonction peut se voir comme un point et une famille de fonctions comme un " espace " ou une portion d' espace.

Exercices : Etudier les fonctions suivantes

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - ax \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}$

2. $y = \sqrt[3]{x^2.(x + \lambda)} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$

3. $y = \sin^2 x - 2\alpha\cos x \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$

4. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\mu - \sin x} \qquad \text{où } \mu \in \mathbb{R}$