14 : ZEROS DE FONCTIONS

5h/s., 7h/s.

A. Le poids des zéros

L' expérience acquise montre qu' en étudiant une fonction f ou ses dérivées f', f", ... , on est amené à en rechercher les zéros. Ceux de f' contrôlent la croissance de f, ceux de f" contrôlent la croissance de f' et la convexité de f, ceux de f''' ... , etc.

Ainsi se repose l' éternelle question rencontrée constamment depuis la quatrième : " si f est une fonction, quelles sont les solutions de l' équation $f(x) = 0$? ".

De quels outils disposons-nous pour aborder cette question ?

* des décompositions en facteurs. Les solutions de $g(x).f(x) = 0$ sont livrées par la réunion des solutions de $g(x) = 0$ et de $f(x) = 0$.
* des algorithmes ou " formules classiques " pour les équations du premier ou du second degré ainsi que pour certaines équations trigonométriques.
* de quelques artifices qui permettent de se ramener parfois à une des situations précédentes (exemple : les équations bicarrées).
* dans les cas où f est une fonction continue et où les méthodes rappelées ci-dessus ne s' appliquent pas, on peut comme nous l' avons fait souvent depuis la quatrième, utiliser des méthodes de calcul approché dès qu' on dispose de nombres a et b dans $\mathbb{R}$ avec f(a) et f(b) de signes opposés. Dans ce cas, f possède au moins un zéro dans (a,b). Les méthodes de calcul approché sont devenues particulièrement performantes grâce aux ordinateurs et calculatrices . De nombreux algorithmes existent pour résoudre ce problème. Nous reverrons ici la méthode des segments emboîtés ou méthode de bipartition utilisée en quatrième et nous étudierons également la méthode des cordes ainsi que la méthode de Newton-Raphson qui utilise la notion de tangente c' est-à-dire de dérivée. Il est à noter que ces méthodes ne sont pas infaillibles, qu' il faut les utiliser avec esprit critique et qu' il faut se garder avant tout de foncer dans la "programite" d' algorithmes qui ... n' existent pas. A titre d' exemple, citons le problème de la séparation des racines dont nous parlerons au cours de ce chapitre.

B. Calcul approché de racines d' équations

Comment résoudre une équation

$$f(x) = 0 \quad \text{où} \quad x \in [a, b]$$

$$\text{ou } f(x) = A \quad \text{où} \quad x \in [a, b] \ ?$$

ce dernier cas se ramenant au premier en considérant la fonction

$$g: x \longrightarrow f(x) - A$$

Les solutions de $f(x) = A$ sont celles de $g(x) = 0$ et l' intervalle de définition, $[a, b]$, est demeuré le même.

Un principe de base est de supposer f continue et $f(a).f(b) < 0$. Dans ce cas $[a, b]$ encadre au moins une solution de l' équation $f(x) = 0$.

Un objectif est alors de remplacer $[a, b]$ par un encadrement plus petit et de répéter cette opération. Un objectif plus ambitieux est de faire décroître plus ou moins rapidement la taille de l' encadrement et finalement, d' envisager la convergence du processus. Celle-ci ne sera pas abordée ici.

Nous allons examiner brièvement trois méthodes : la méthode de bipartition, la méthode des cordes et la méthode des tangentes.

C. La méthode de bipartition

Les années précédentes (voir VM3, pg 235 et M4, pg 6), on a plusieurs fois utilisé la méthode de bipartition sans trop se préoccuper de sa validité mais le professeur savait bien qu' il s' agissait de fonctions continues auxquelles la méthode s' applique effectivement.

Le principe est simple. Si f est une fonction continue dans $[a,b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$, f prend des valeurs de signes différents en a et en b et s' annule donc pour au moins une valeur $x \in]a,b[$. En d' autres termes, $[a,b]$ livre un encadrement d' au moins une solution de l' équation $f(x) = 0$.

Si on ignore tout de f en dehors de $f(a).f(b) < 0$ et que f est continue, rien ne permet de dire a priori qu' une racine α entre a et b est plus proche de a que de b. La méthode de bipartition consiste à considérer le milieu de l' intervalle , $x_2 = \frac{a + b}{2}$ comme "candidat racine".

Ensuite on détermine le signe de $f(x_2)$, si c' est possible, et s' il s' oppose par exemple à celui de a, on remplace [a, b] par [a, $\frac{a+b}{2}$] et on recommence.

L' idée est donc de poser $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$, à tester les signes de $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$. Soit $f(x_2)$ est nul et dans ce cas x_2 est racine de l' équation donnée, soit on choisit parmi les intervalles $[x_0, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$ celui qui contient sûrement une racine, on calcule x_3 qui est son milieu et on réitère le procédé.

Une variante consiste à partager [a,b] en n intervalles de longueur $\frac{a-b}{n}$, n entier et à sélectionner, en partant de a, le premier intervalle dans lequel f prend des signes opposés sur les extrémités.

Si n est multiplié par 10, l' avantage est que l' encadrement obtenu est 10 fois plus précis mais le désavantage est qu' il peut être indispensable d' évaluer 10 fois plus de valeurs de f.

Il ne faut pas perdre de vue que quel que soit l' intervalle choisi, celui-ci peut englober une infinité de solutions effectives. A titre d' exemple $\sin \frac{1}{x}$ possède une infinité de zéros dans tout intervalle encadrant zéro.

Exemple :

On veut évaluer $\sqrt{50}$ comme au chapitre 3 de VM 3.

On part de la fonction $f(x) = x^2 - 50$ sur $[0, \infty[$. On se donne l' encadrement $[x_0, x_1] = [7, 8]$. Pour n = 2, on teste $(7,5)^2 - 50$ qui vaut 6,25 d' après une calculatrice. Petite inquiétude, en passant, pour les erreurs d' arrondi... Pas de problème ici! (Pourquoi ?)

La méthode indique que $\sqrt{50} \in [\,7,0\,;\,7,5\,]$. On teste le milieu de l' intervalle : $(7,25)^2 - 50 = 2,5625$ puis on teste

$(7,125)^2 - 50 = 0,765625$ puis

$(7,0625)^2 - 50 = -0,12109375 < 0$

Donc, on se dit que $\sqrt{50} \in]\,7,0625\,,\,7,1250[$ avec une inquiétude pour les erreurs d' arrondi... réflexion faite, ce sont des valeurs exactes.

On peut poursuivre ainsi.

Essayons la même méthode avec $n = 10$.
On a, pour $x = 7{,}0;\ 7{,}1;\ 7{,}2;\ \ldots\ ;\ 8{,}0$ les valeurs suivantes de $x^2 - 50$: -1; $0{,}41$ ... ce qui nous stoppe aussitôt pour conclure que

$$\sqrt{50} \in\ ]\ 7{,}0\ ;\ 7{,}1[$$

Recommençons avec $n = 10$. Pour $x = 7{,}00;\ 7{,}01;\ 7{,}02;\ \ldots$ on obtient $x^2 - 50 = -1;\ -0{,}8599;\ -0{,}7196;\ -0{,}5791;\ -0{,}4384;\ -0{,}2975;\ -0{,}1564;\ -0{,}0151;\ 0{,}1264$, donc

$$\sqrt{50} \in\ ]\ 7{,}07\ ;\ 7{,}08\ [$$

si on ne craint pas les erreurs d' arrondi. Réflexion faite, ce sont des valeurs exactes ... ce ne sera pas toujours le cas, soyons attentifs!

Alors? Plutôt $n = 2$ ou plutôt $n = 10$? Avouons que ce n' est pas limpide. De toute façon, pour expérimenter davantage, mieux vaut se servir d' un petit programme.

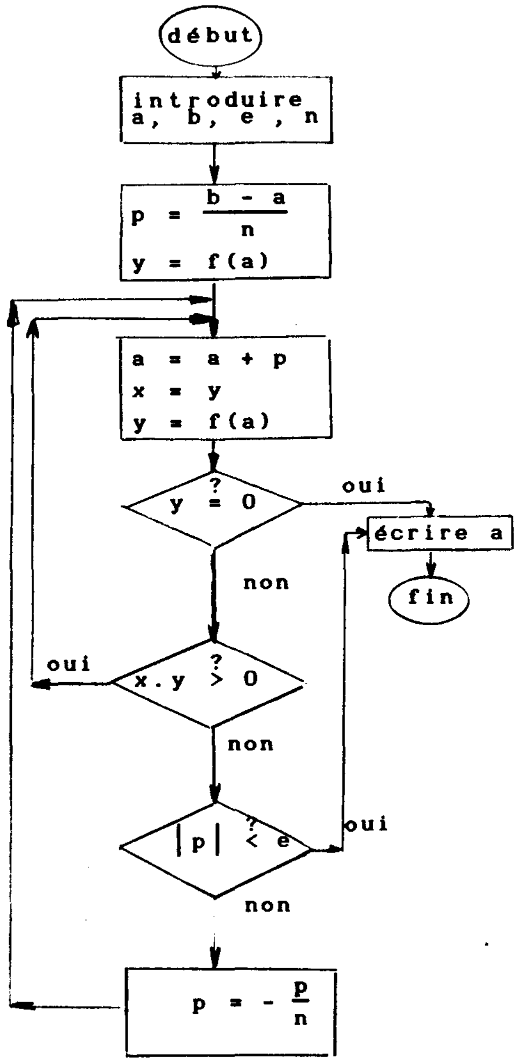
Soient $a < b$, n un nombre entier supérieur à 1 et e un réel positif "petit" et non nul.

On a pour premier but de subdiviser l' intervalle $[a,b]$ en n segments de longueur $p = \dfrac{b - a}{n}$ et de rechercher parmi ceux-ci, le premier où la fonction s' annule. Pour cela, on calcule successivement

$a,\ a + p,\ a + 2p,\ \ldots\ ,\ a + np = b$ (1)

ainsi que la valeurs de la fonction en ces différentes valeurs et ce jusqu' à ce qu' une des deux situations suivantes se présente :

1) Soit l' image par f d' un des nombres de la suite (1) vaut 0 et dans ce cas celui-ci est solution de l' équation $f(x) = 0$ et le problème est résolu (petit veinard !).

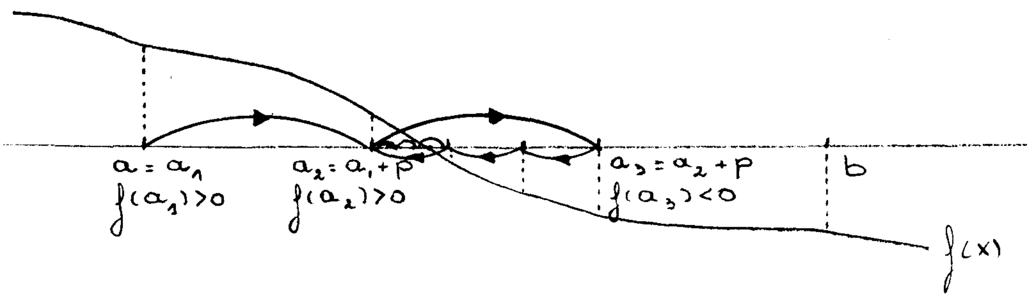


2) Soit les images par f de deux nombres consécutifs de la suite (1) sont de signes contraires. Dans ce cas

   a) soit le pas p est inférieur à l' approximation e et le dernier nombre de la suite (1) dont on a calculé l' image est solution de notre problème.

   b) soit le pas p est supérieur ou égal à A. Dans ce cas on réitère le procédé dans le segment de longueur p où se trouve la racine de l' équation y = f(x).

Exemple où n = 3 :



Voici la traduction en basic et en pascal de cet algorithme. Il y a moyen d' affiner ces programmes, ils sont présentés dans le cadre de cours pour les programmeurs en herbe.

BASIC :
```
10 input a,b,e,n
20 let p = (b - a)/n
30 gosub 140
40 let a = a + p
50 let x = y
60 gosub 140
70 if y = 0 then gøtø 120
80 if x*y > 0 then gøtø 40
90 if abs(p) < e then gøtø 120
100 let p = -p/n
110 gøtø 40
120 print a
130 end
140 let y = f(a)  ———————→ Cette ligne devra être
150 return                 modifiée à chaque nouveau problème.
```

Si la fonction dont on recherche un zéro est $y = x^3 - x^2 - 7$, par exemple, il faut modifier la ligne 140 en

```
140 let y = a ^ 3 - a ^2 - 7
```

```
PASCAL : var a,b,c,pas,epsilon:real;
              n,iter:integer;
         function f(x:real):real;
         begin(* f *)
            f:=    f(x) ──────────────────→ cette   ligne   devra   être
                                  modifiée  à  chaque  nouveau  problème,  en
                                  remplaçant f(x) par la fonction dont on
                                  recherche un zéro.
         end;(* f *)

         begin(* programme principal *)

              (* lecture des données *)
              repeat
                 write('borne inférieure a : ');
                 readln(a);
                 write('borne supérieure b : ');
                 readln(b);
              until  f(a)*f(b)<0;(*  vérifier  que  f(a)  et  f(b)  sont  de
                                  signes contraires *)
              write ('Nombre de divisions de [a,b] : ');
              readln(n);
              write('Précision voulue : ');
              readln(epsilon);

              (* évaluation de la solution *)
              pas := (b-a)/n;
              c := a + pas;
              iter := 1; (* première itération *)
              while abs(f(c)) > epsilon do
                 begin
                    while f(a)*f(b) > 0 do
                    c := c + pas;
                    (*  à  la  fin  de  la  boucle,  f(c)  et  f(a)  sont  de
                       signes contraires *)
                    iter := iter + 1;
                    a := c;
                    pas := - pas/n;
                 end;

              (* impression des résultats *)
              writeln(' Méthode  de   n -partition  avec  une  division  par
                        ',n,' de l''intervalle');
              writeln('La racine trouvée de la fonction vaut ',c);
              writeln('Elle a été calculée en ',iter,' itérations.');

         end.
```

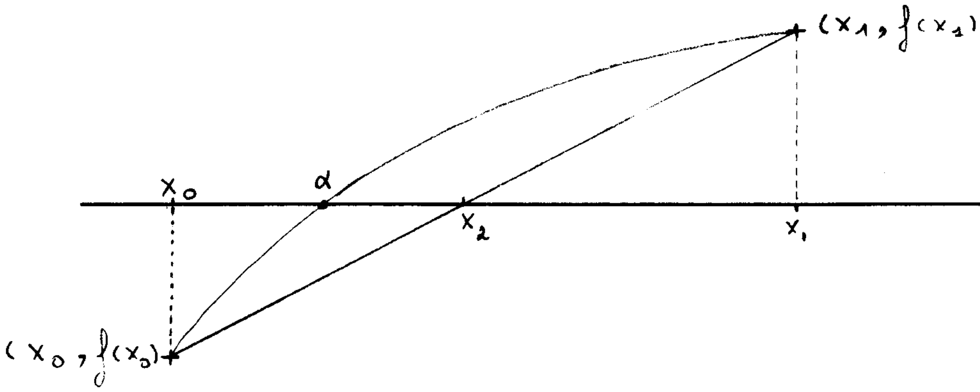
Exemple : Recherche du zéro de $f(x) = x^3 - x^2 - 7$

```
borne inférieure a : 2
borne supérieure b : 3
Nombre de divisions de [a,b] : 2
Précision voulue : 0,00001
Méthode de dichotomie avec une division par 2 de l'intervalle
La racine trouvée de la fonction vaut 2.310820508E+00
Elle a été calculée en 15 itérations.
```

D. Méthode des cordes

Considérons une fonction f continue sur $[x_0,x_1]$ et telle que $f(x_0).f(x_1) < 0$. le théorème des fonctions intermédiaires nous permet d' affirmer quer f(x) a au moins un zéro compris dans $[x_0,x_1]$. Soit α une de ces racines. On décide d' approcher α par le point x_2, intersection de $[x_0,x_1]$ avec la corde (droite) passant par les points $(x_0,f(x_0))$ et $(x_1,f(x_1))$. Elle a pour équation

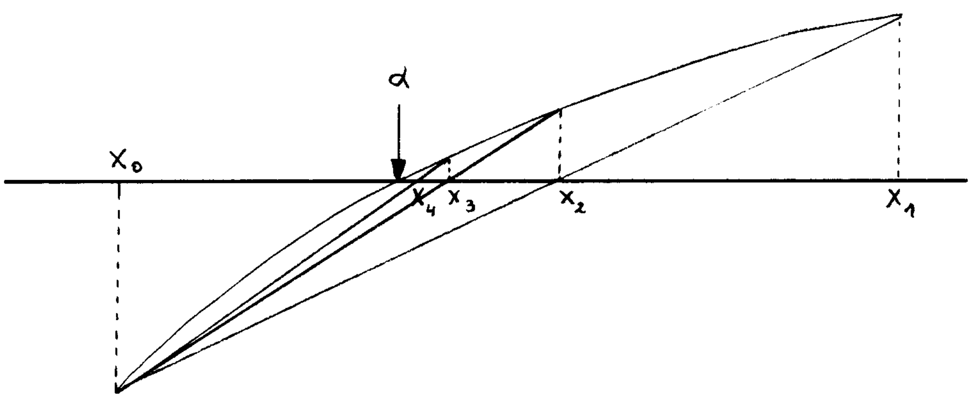
$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.(x - x_0)$$



et coupe l' axe X au point d' abscisse

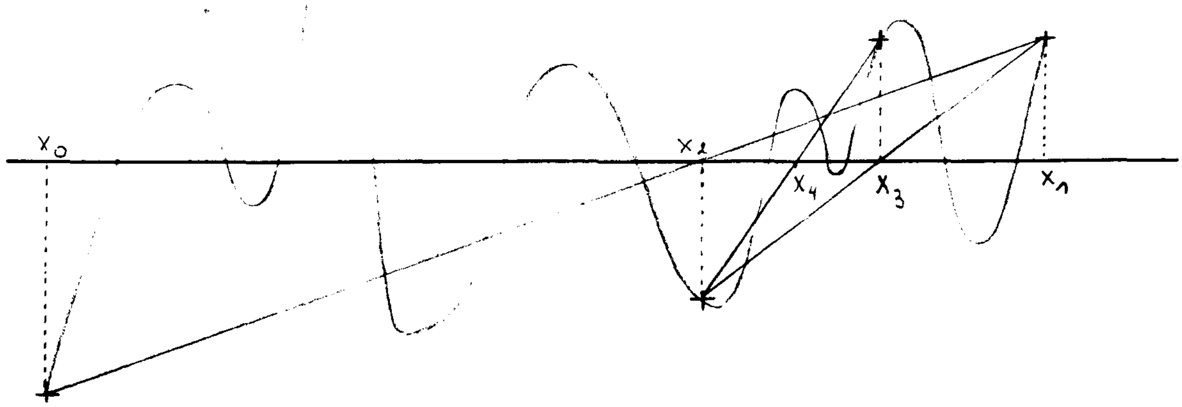
$$x_2 = x_0 - f(x_0).\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

x_2 est une approximation de la racine α recherchée. On calcule $f(x_2)$ et selon son signe, on remplace x_1 ou x_2 par x_3 dans le raisonnement qu' on réitère.



Le dessin est encourageant. La suite x_1, x_2, x_3, ... décroît et les x_i demeurent supérieurs à α.

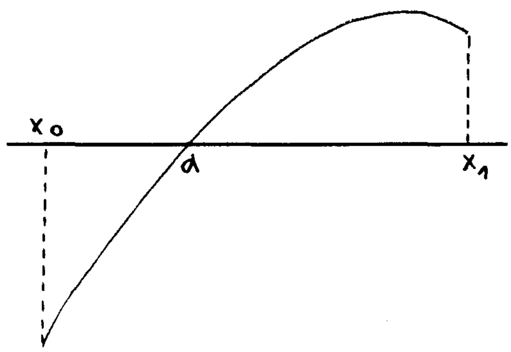
Mais un dessin plus dérangeant est possible. Voici un exemple.

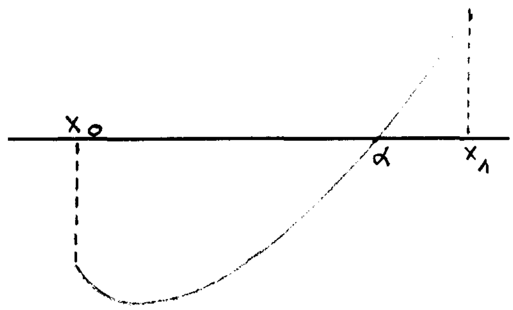


la suite de points qu'on obtient n' est pas contrôlée d' une façon aussi évidente que dans l' exemple précédent. On se rend compte que la prudence s' impose. Et c' est bien naturel. Au fond, la motivation sous-jacente à la méthode est que pour $[x_0,x_1]$ "petit", $y = f(x)$ est "proche de" la corde (droite) passant par $(x_0,f(x_0))$ et $(x_1,f(x_1))$. Dès lors, le point d' intersection de celle-ci avec l' axe X et celui de la courbe doivent être "proches".

On constate que l' intérêt de la méthode dépend de la précision qu' on est en mesure de mettre dans les termes "petit" et "proche de". Une idée raisonnable s' impose. Mieux vaut appliquer la méthode à une fonction continue f ayant un seul zéro dans $[x_0,x_1]$.

<u>Hypothèse de prudence :</u> Appliquons la méthode à une fonction f, uniquement si f est convexe vers le haut ou convexe vers le bas (et deux fois dérivable) sur $[x_0,x_1]$, avec une seule racine sur $[x_0,x_1]$.





Dans ce cas, on est assuré que $\alpha < \dots < x_n < \dots < x_3 < x_2 < x_1$ ou que $x_0 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots < \alpha$ et un de nos objectifs du début est réalisé.

La raison ? Dans le premier cas, $f(x_n) > 0$ pour tout $n \geq 1$ et dans le second cas, $f(x_n) < 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exemple : Reprenons le thème classique du calcul approché de $\sqrt{A}$ où A est un réel positif.

La méthode de Héron (déjà exposée dans VM 3) qui remonte à l'antiquité, recommande de choisir une approximation de x_0 arbitraire. Puis de choisir $x_1 = \frac{1}{2}.(x_0 + \frac{A}{x_0})$ et de réitérer cette formule.

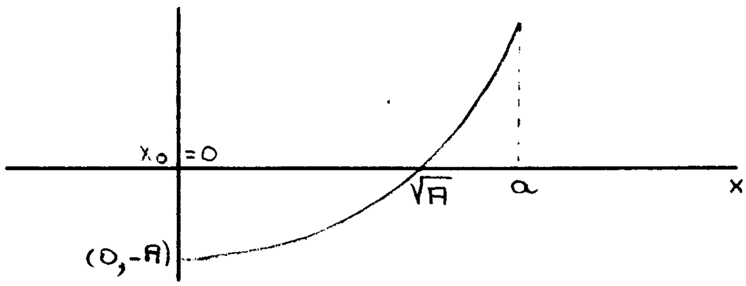
Si $x_0 < \sqrt{A}$, (ou $x^2 < A$) la suite est $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, elle est croissante et majorée par $\sqrt{A}$.

Si $x_0 > \sqrt{A}$, la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{A}$.

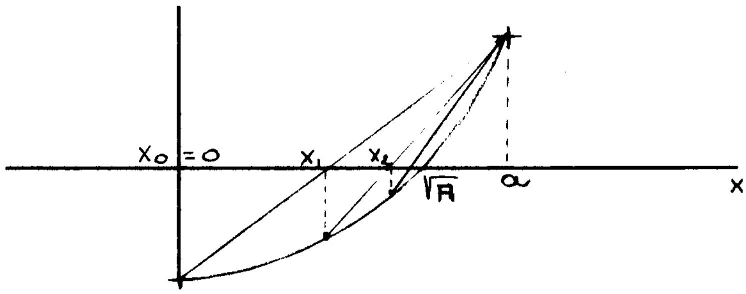
Dans VM 3, on a observé, qu' en raison des erreurs d' arrondi, mieux vaut choisir un x_0 tel que $x_0 < \sqrt{A}$.

Comparons cette méthode à celle des cordes.

La fonction f est donnée par $f(x) = x^2 - A$ sur $[0 , \infty[$. Elle est convexe vers le haut.



Le mécanisme d' approximation est suggéré par le dessin suivant :



Il convient donc d' utiliser des cordes issues de $(a, f(a))$ où a est choisi tel que $a^2 > A$.

Les points $x_0, x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots$ sont livrés par

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{a.f(0)}{f(0) - f(a)} = \frac{-aA}{-A - (a^2 - A)} = \frac{A}{a}$$

Ceci est intéressant : $[\frac{A}{a} , a]$ est précisément l' encadrement sur lequel est basé la méthode de Héron.

Ici, $x_2 = \dfrac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)} = \dfrac{a.\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2 - A\right) - \frac{A}{a}.(a^2 - A)}{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - A - a^2 + A}$

$$= \frac{a(A^2 - a^2 A) - A(a^3 - Aa)}{A^2 - a^4} = \frac{2aA^2 - 2a^3 A}{(A - a^2).(A + a^2)}$$

$$= \frac{2aA}{A + a^2}$$

Tentons le cas de $\sqrt{50}$, par la méthode des cordes.

Partons de a = 8. On a $x_1 = \dfrac{50}{8}$, $x_2 = \dfrac{2.50.8}{50 + 64} = \dfrac{400}{57} = 7{,}017543...$

$$x_3 = \frac{af(x_2) - x_2 f(a)}{f(x_2) - f(a)} = \frac{8.\left(\left(\frac{400}{57}\right)^2 - 50\right) - \frac{400}{57}.(8^2 - 50)}{\left(\frac{400}{57}\right)^2 - 50 - 64 + 50} = 7{,}067757...$$

$x_4 = 7{,}070863...$, $x_5 = 7{,}071055...$, $x_6 = 7{,}071067...$, ...

Comme $x_1^2 = 39{,}0625$, $x_2^2 = 49{,}24592...$, $x_3^2 = 49{,}.95318...$, $x_4^2 = 49{,}99711...$, $x_5^2 = 49{,}99982...$, $x_6^2 = 49{,}99998...$, ...

la convergence semble assez satisfaisante.

N' oublions pas de faire attention aux erreurs d' arrondi !

Programme de la méthode des cordes (PASCAL)

Ce programme calcule une racine d'une fonction f(x) qui satisfait à l'hypothèse de prudence précitée. Soit p=(a,f(a)) et q=(b,f(b)) deux points du graphe de la fonction f tels que f(a).f() < 0.

```
var a,b,c,epsilon:real;
    iter:integer;

function f(x:real):real;
    begin(* f *)
        f:=    f(x) ————————————→    cette    ligne    devra    être
                                 modifiée  à  chaque  nouveau  problème,  en
                                 remplaçant f(x) par la fonction dont on
                                 recherche un zéro.
        end;(* f *)

begin(* programme principal *)

    (* lecture des données *)
    repeat
    write('borne inférieure a : ');
    readln(a);
    write('borne supérieure b : ');
    readln(b);
    until  f(a)*f(b)<0;(*  vérifier  que  f(a)  et  f(b)  sont  de  signes
                          contraires *)
    write('Précision voulue : ');
    readln(epsilon);

   (* évaluation de la solution *)
    c := (a*f(b) - b*f(a))/(f(b) - f(a));
    iter := 1; (* première itération *)
    while abs(f(c)) > epsilon do
            begin
               a := b;
               b := c;
               c := (a*f(b) - b*f(a))/(f(b) - f(a));
               iter : = iter + 1;
            end;

    (* impression des résultats *)
    writeln('La racine trouvée de la fonction vaut ',c);
    writeln('Elle a été calculée en ',iter,' itérations.');

end.
```

Exemple : Recherche du zéro de $f(x) = x^3 - x^2 - 7$

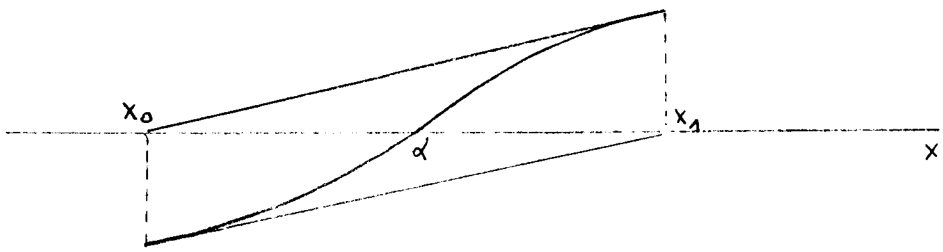
```
borne inférieure a  : 2
borne supérieure b : 3
Précision voulue : 0,00001
La racine trouvée de la fonction vaut 2.3108521463E+00
Elle a été calculée en 5 itérations.
```

E. Méthode des tangentes (Newton - Raphson)

Son inspiration est très proche de la méthode des cordes.

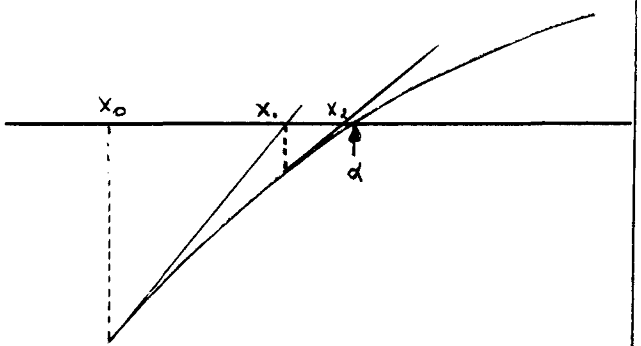
L' idée est encore de remplacer $y = f(x)$ par une droite mais au lieu d' une corde, on choisit une tangente.

Cette méthode est souvent performante ... mais prudence ! Voici un exemple où le processus Newton-Raphson bégaie (il est périodique).



Dans d' autres cas, x_n peut s' éloigner de plus en plus de la racine recherchée ou être attiré vers un autre zéro.

Pour travailler en toute sécurité à notre niveau, l' hypothèse de prudence faite pour la méthode des cordes est reprise ici.



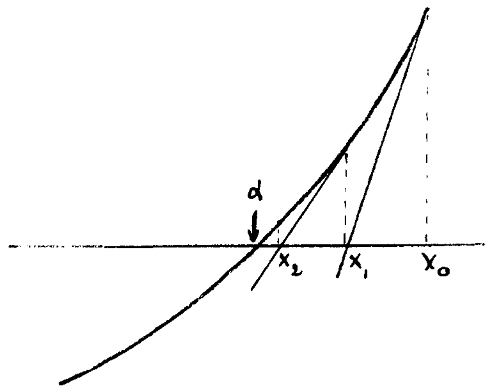
f est convexe vers le bas.

x_0 est une valeur approchée de α par défaut ($x_0 < \alpha$) donc $f(x_0) < 0$.

La tangente à f en $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

et coupe l' axe X au point d' abscisse $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \in [x_0, \alpha]$



f est convexe vers le haut.

x_0 est une valeur approchée de α par excès ($x_0 > \alpha$) donc $f(x_0) > 0$.

La tangente à f en $(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

et coupe l' axe X au point d' abscisse $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \in [\alpha, x_0]$

Reprenons le cas de $\sqrt{A}$ avec $f(x) = x^2 - A$.

Alors $f'(x_0) = 2x_0$ et $x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - A}{2x_0} = \frac{x_0^2 + A}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{A}{x_0} \right)$.

On retrouve la méthode de Héron ! Coup de chapeau à nos ancêtres héllénistiques qui ne disposaient pas de la dérivée. Et Newton - Raphson alors ? Nous ont-ils fait travailler pour rien ? Mais non! La méthode de Héron ne s' applique qu' à la fonction $\sqrt{A}$, la méthode de Newton-Raphson est générale ! Elle s' applique à toutes les fonctions qui satisfont les hypothèses de prudence.

Programme pour programmeur en herbe :

BASIC :
```
10 let y = 0
20 input x
30 x = x - f(x)/f'(x) ——————————→ Cette ligne sera modifiée
                                   suivant la fonction étudiée
40 if abs(y-x)<0.0000001 then print x:goto 80
50 y = x
60 print x
70 goto 30
80 end
```

Exemple : Recherche d' une racine de $y = -0,9x^4 - 0,2x^3 + 2,1x^2 - 1,2$

Soit x = 10

On obtient successivement

x = -10
x = -7,543968
x = -5,712054
x = -4,351589
x = -3,349093
x = -2,620661
x = -2,104647
x = -1,75602
x = -1,54184
x = -1,435869
x = -1,405206
x = -1,402608
x = -1,402589
x = -1,402589

Soit x = -3

On obtient successivement

x = -3
x = -2,371212
x = -1,933335
x = -1,647160
x = -1,483601
x = -1,415835
x = -1,403036
x = -1,402590
x = -1,402589
x = -1,402589

Il est à remarquer que la fonction possède un autre zéro aux environs de -0,8.

PASCAL :

```
var a,epsilon:real;
   iter:integer;

function f(x:real):real; (* fonction f(x) *)
    begin(* f *)
        f:=   f(x);——————————————→  cette  ligne  devra  être
                                    modifiée à chaque nouveau problème, en
                                    remplaçant f(x) par la fonction dont on
                                    recherche un zéro.
    end;(* f *)

function  df(x:real):real;  (*  dérivée  de f(x) *)
    begin(* f' *)
        df:=   f'(x);——————————————→  cette  ligne  devra  être
                                    modifiée à chaque nouveau problème, en
                                    remplaçant f'(x) par la  dérivée  de la
                                    fonction dont on recherche un zéro.

    end;(* f' *)

begin(* programme principal *)

    (* lecture des données *)
    write('Première approximation de la racine  : ');
    readln(a);
    write('Précision voulue : ');
    readln(epsilon);

    (* évaluation de la solution *)
    iter := 0;
    while abs(f(a)) > epsilon do
          begin
             a := a - f(a)/df(a);
             iter : = iter + 1;
          end;

    (* impression des résultats *)
    writeln('La racine trouvée de la fonction vaut ',a);
    writeln('Elle a été calculée en ',iter,' itérations.');

end.
```

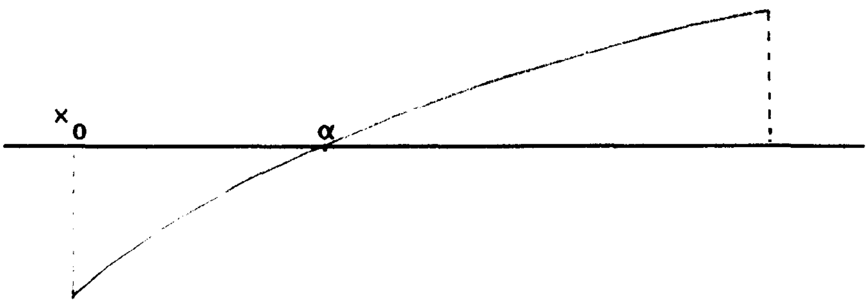
Exemple pour $f(x) = x^3 - x^2 -7$, $df = 3x^2 - 2x$

```
    Première approximation de la racine  : 2
    Précision voulue : 0.00001
    La racine trouvée de la fonction vaut 2.3108521635E+00
    Elle a été calculée en 4 itérations.
```

Cordes ou tangentes ?

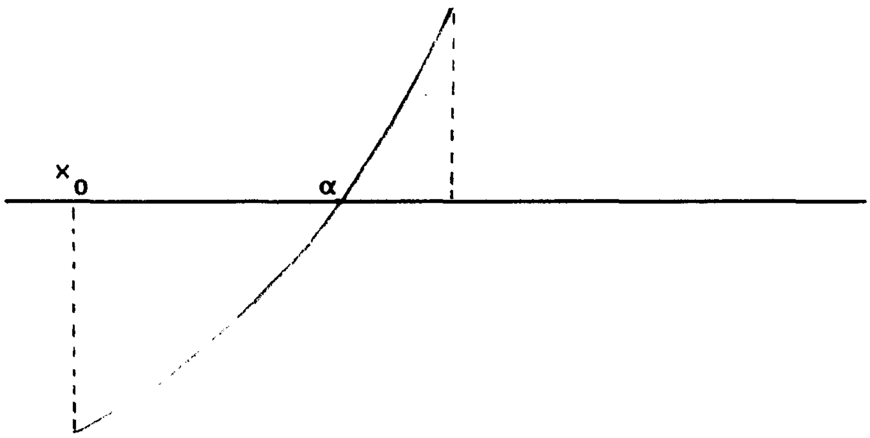
Laquelle des deux méthodes est-elle la plus avantageuse ? ... Cela dépend !

Exemple : f est convexe vers le bas et croissante.



Que préférer ici ? Plutôt approcher α par la gauche en raison des erreurs d' arrondis. Mais alors la méthode des tangentes s' impose.

Exemple : f est convexe vers le haut et croissante.



On préfère toujours approcher α par la gauche. (Pourquoi ?) Ici, la méthode des cordes s' impose.

F. Interlude historique

Nous empruntons le texte de cette section au livre

Mathématiques au fil de âges de J. Dhombres e. a.

Gauthier-Villars – 1987

"Ainsi, on s' est longtemps posé la question de savoir comment Archimède a obtenu l' encadrement suivant

$$\frac{265}{163} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

utilisé pour approcher π dans la mesure du cercle. Or, on a retrouvé à Constantinople, vers 1900, un manuscrit en grec du traité *Les Métriques* de Héron d' Alexandrie. Cet ouvrage rassemble les connaissances mathématiques de son époque, probablement le premier siècle de notre ère; il donne des indications sur la tradition grecque de calcul. A propos d' une formule donnant l' aire d' un triangle en fonction des longueurs des côtés, on trouve une méthode de calcul de valeurs approchées de la racine carrée d' un nombre entier qui n' est pas un carré. On part du triangle de côtés $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$; le demi-périmètre est $s = 12$. On en déduit les trois valeurs $s-a = 5$, $s-b = 4$ et $s - c = 3$. L' aire du triangle est

$$\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)} = \sqrt{720}$$

On est donc amené à chercher le côté d' un carré dont l' aire vaut 720.

HERON D' ALEXANDRIE : *Pour extraire une racine carrée.*

Puisque 720 n' a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27; cela fait 26 et $\frac{2}{3}$*; ajoute 27, cela fait 53* $\frac{2}{3}$*; prends-en la moitié : cela fait 26* $\frac{5}{6}$*. Ainsi donc le côté de 720 sera proche de 26* $\frac{5}{6}$. (*)

En fait, 26 $\frac{5}{6}$ *multiplié par lui-même donne 720* $\frac{1}{36}$*; de sorte que la différence est* $\frac{1}{36}$.

Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$*, nous mettrons 26* $\frac{5}{6}$ *trouvé tout à l' heure à la place de 27 et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que* $\frac{1}{36}$. (**)

Pour extraire la racine carrée de 720, Héron prend pour valeur approchée 27; alors $\frac{720}{27}$ donne une autre valeur approchée de cette racine. La valèur exacte de $\sqrt{720}$ étant encadrée par ces deux valeurs approchées, on en prend la moyenne arithmétique.

On obtient une approximation meilleure encore en itérant le procédé; on aboutit ainsi à un algorithme dont les premières étapes datent de l' Antiquité.

L' origine du mot *algorithme* se rattache au nom de *al-Khwãrizmi* dont le traité, traduit en latin, amorça la diffusion du système de numérotation décimale. Dans les traités latins du Moyen-Age, tout procédé de calcul utilisant la numérotation décimale est désigné par les termes *algorisme*, *algorismus* et *algorithmus*, par opposition à l' utilisation d' abaque.

On désigne maintenant par algorithme un procédé automatique de calcul reposant sur les idées d' itération des opérations et de finitude de l' ensemble des opérations."

* **Notons que dans le livre cité nous avons cru découvrir une valeur erronée de** 26 $\frac{21}{33}$ **que nous avons remplacée par** 26 $\frac{5}{6}$.
** **De même les valeurs** 720 $\frac{1}{36}$ **et** 721 **ont été respectivement remplacées par** 26 $\frac{5}{6}$ et 27.

G. Prendre un peu d' altitude

Revenons au point de départ où f continue sur $[x_0 , x_1]$ vérifie $f(x_0).f(x_1) < 0$ et où f possède un seul zéro α dans $[x_0 , x_1]$. On pourrait même supposer que f est croissante.

Pour approcher α, toutes les méthodes rencontrées donnent une règle, un algorithme fixant un point $x_2 \in]x_0 , x_1[$. On teste alors le signe de $f(x_2)$ et on recommence avec $[x_0 , x_2]$ ou $[x_1 , x_2]$.

Au fond, la méthode des cordes et celle des tangentes livrent des fonctions de 2 variables $A(x_0,x_1)$ dont la valeur est dans $]x_0 , x_1[$ pour tout $x_0 \leq x_1$. Ceci nous montre que pour étudier les fonctions d' une variable, il est indispensable à un moment donné ,d' étudier des fonctions de deux variables. Quelle perspective! La suite en sixième.

Par ailleurs, les contraintes sur A dans l' étude de f(x) = A, nous rappellent la notion de moyenne discutée dans M4, chapitre 3.

H. Exercices

1.Trouver les racines des fonctions suivantes en utilisant les diverses méthodes proposées dans ce chapitre et comparer l' efficacité de chaque méthode :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 3x + 11$

c) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

d) $f(x) = -0{,}9x^4 - 0{,}2x^3 + 2{,}1x^2 - 1{,}2$

2.Examiner le calcul approché de $A^{\frac{1}{3}}$, de sin A, de 2^A à l' aide de divers algorithmes.

3.Reprendre diverses moyennes de M4, chapitre 3 (notamment à l' exerice 4) et en tester les qualités en vue du calcul approché de racines.

I. Racines multiples de polynômes

Une difficulté ... un polynôme (f) peut posséder une racime multiple a. Dans ce cas, f ne change pas forcément de signe dans un voisinage de a et les méthodes précédentes ne peuvent déceler a sauf si par chance, le programme teste f(a).

Signalons qu' il existe un algorithme pour déceler si f a une racine multiple :

a) Si f est un polynôme et f' son polynôme dérivé, les racines multiples de f sont automatiquement des racines de f' (prouvez-le)

b)De plus il y a un algorithme pour déterminer le plus grand commun diviseur f_3 = PGCD (f_1, f_2) de deux polynômes f_1, f_2 ou encore de déterminer un polynôme f_3 qui admet pour racines celles qui sont communes à f_1 et f_2:

Si le degré de f_1 est plus grand que le degré de f_2, on effectue la décomposition

$$f_1 = f_2.q + r \quad (\ q = \text{quotient},\ r = \text{reste}\ ) \qquad (1)$$

où le degré de r est inférieur au degré de f_2 et (1) livre que

$$\text{PGCD } (f_1, f_2) = \text{PGCD } (f_2, r)$$

donc par une récurrence finie, on détermine PGCD (f_1, f_2).

On en déduit un algorithme pour déterminer les racines communes de f_1 et f_2; ce sont celles de f_2 et de r. On applique ensuite le même raisonnement à f_2 et r.

Exemple :

Soit $f_1 = x^5 - x^4 - 27x^3 + x^2 + 146x + 120$

et $f_2 = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$

On effectue la division de f_1 par f_2 pour obtenir

$$f_1 = f_2 \cdot (x + 4) + r_1$$

où $r_1 = - 8x^3 - 24x^2 + 80x + 192$

On a P.G.C.D.(f_1, f_2) = P.G.C.D.(f_2, r_1)

On effectue la division de f_2 par r_1 pour obtenir

$$f_2 = r_1 \cdot (- \frac{1}{8} x + 1) + r_2$$

où $r_2 = 35x^2 - 35x - 210$

On a P.G.C.D.(f_2, r_1) = P.G.C.D.(r_1, r_2)

On effectue la division de r_1 par r_2 pour obtenir

$$r_1 = r_2 \cdot (- \frac{8}{35} x - \frac{32}{35}) + 0$$

On a P.G.C.D.(r_1, r_2) = r_2

Les racines de r_2 valant -2 et 3, les racines communes à f_1 et à f_2 sont -2 et -3.

Comme nous l' avons vu en (a) si f est un polynôme et f' son polynôme dérivé, les racines multiples de f sont automatiquement des racines de f' et de ce fait, l' algorithme précédent s' applique.

Exemple :

Soit le polynôme $y = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

On a $y' = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$

On effectue la division de y par y' pour obtenir

$$y = y' . (\frac{1}{4} x - \frac{1}{16}) + r_1$$

où $r_1 = - \frac{27}{16} x^2 + \frac{27}{8} x - \frac{27}{16}$

On a P.G.C.D.(y,y') = P.G.C.D.(y', r_1)

On effectue la division de y' par r_1 pour obtenir

$$y' = r_1 \cdot (- \frac{64}{27} x - \frac{80}{27}) + 0$$

On a P.G.C.D.(y', r_1) $= r_1 = - \frac{27}{16} x^2 + \frac{27}{8} x - \frac{27}{16}$

$$= - \frac{27}{16} (x - 1)^2$$

On en conclut que 1 est une racine multiple d' ordre 2 de y' et d' ordre 3 de y.

On a en fait $y = (x - 1)^3.(x + 2)$.

J. Séparation des racines

Etant donnée une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on aimerait disposer d' un algorithme permettant de décider s' il existe n ($n \in \mathbb{N}$) intervalles fermés deux à deux, de points dans $\mathbb{R}$, contenant chacun exactement un x tel que $f(x) = 0$. Un tel algorithme n' est pas connu et il y a des raisons de penser qu' il n' existe pas.

Ce problème qui est celui de la **séparation des racines** peut cependant être résolu pour certaines fonctions données. Ceci s' applique particulièrement bien aux polynômes. Un polynôme de degré n a au plus n racines (fait que nous ne démontrerons pas), encore faut-il savoir combien il y a effectivement de racines d' une part et où les chercher d' autre part ! Toutes les méthodes vues précédemment supposent que l' on connaît un intervalle fini de $\mathbb{R}$ où se situe une des racines de la fonction étudiée et il est parfois très difficile de rechercher ces intervalles.

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur ce problème et nous en donnerons pour exemples la règle des signes de DESCARTES (1596-1650), les bornes de CAUCHY (1789-1857) et les bornes de KNUTH (1981).

K. La règle des signes de Descartes

Interlude historique

Extrait de " La Géométrie " - Livre troisième - Descartes

Scachés donc qu' en chafque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimenfions, autant peut il y auoir de diuerfes racines, c' eft a dire de valeurs de cete quantité. car par exemple fi on fuppofe x efgale a 2; oubien x--2 efgal a rien; & derechef x ∞ 3; oubien x -- 3 ∞ 0; en multipliant ces deux équations x -- 2 ∞ 0 & x -- 3 ∞ 0, l' vne par l' autre, on aura x x -- 5x + 6 ∞ 0, oubien xx ∞ 5x -- 6, qui eft vne Equation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout enfemble vaut 3. Que fi derechef on fait x -- 4 ∞ 0 & qu' on multiplie cette fomme par x *x -- 5x + 6 ꝏ 0, on aura* x^3 *-- 9 x x + 26x -- 24 ꝏ 0, qui eft une autre Equätion en laquelle x ayant trois dimensions a auffy trois valeurs , qui font 2, 3, & 4.*

Mais fouuent il arriue, que quelques vnes de ces racines font fauffes, ou moindres que rien. comme fi on fuppofe que x defigne auffy le defaut d' vne quantité, qui foit 5, on a x + 5 ꝏ 0, qui eftant multipliée par x^3 *-- 9 x x + 26x -- 24 ꝏ 0 fait*

$$x^4 -- 4x^3 -- 19\ x\ x + 106\ x -- 120 ꝏ 0$$

pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a fçauoir trois vrayes qui font 2, 3, 4 & vne fauffe qui eft 5.

....

On connoift auffy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fauffes en chafque Equation. A fçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les fignes + & -- s' y trouuent de fois eftre changés; & autant de fauffes qu' il s' y trouue de fois deux fignes +, ou deux fignes -- qui s' entrefuiuent.Comme en la derniere, a caufe qu' aprés + x^4 *il y a --* $4x^3$*, qui est vn changement du figne + en --, & après -- 19x x il y a + 106 x, & aprés + 106x il y a -- 120 qui font encore deux autres changemens, on connoift qu' il y a trois vrayes racines; & vne fauffe, a cause que les deux fignes --, de 4* x^3 *& 19 xx, s' entrefuiuent.*

....

Il est à remarquer que Descartes utilise les notations que l' on connaît aujourd' hui pour écrire un polynôme si ce n' est l' utilisation du signe ꝏ pour = et de -- pour -. Ceci est le résultat d' une longue évolution historique. Quelques siècles auparavant, tout se décrivait en langage courant; par exemple $x^2 - 1$ donnait une phrase du genre, "la quantité recherchée est multipliée par elle-même et le résultat est diminué de l' unité".

D' autre part, nous avons ici une preuve que les nombres négatifs étaient des nombres mal aimés puisqu' appelés valeurs fausses ou moindres que rien. Nous y reviendrons en sixième lors de l' étude des nombres complexes.

La règle des signes de Descartes

Travaillons sur l' exemple

$$9\ x^{11} + 5\ x^{9} - 24\ x^{7} - 31\ x^{6} + 5\ x^{5} - 9\ x^{4} + 8\ x^{3} + x^{2} = 0 \qquad (1)$$

qui a au plus 11 racines réelles.

1. Il est évident que $x = 0$ est racine double de cette équation.

2. La règle de Descartes nous apprend que le nombre de racines positives est au plus égal au nombre de changements de signe des coefficients. Comme les signes des coefficients des puissances décroissantes de x sont

   $$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad +$$

   l' équation (1) possède au plus 4 racines positives.
3. Si on change x en $-x$ dans (1), on obtient

   $$- 9\ x^{11} - 5x^{9} + 24x^{7} - 31x^{6} - 5x^{5} - 9x^{4} - 8x^{3} + x^{2} = 0 \qquad (2)$$

   dont chaque racine positive est une racine négative de (1).
   La règle de Descartes nous apprend que (2) a au plus 3 racines positives et il s' en suit que (1) a au plus 3 racines négatives.
4. On conclut en disant que (1) a au plus 9 racines réelles (dont deux nulles).

On obtient ainsi une règle qui permet de délimiter la recherche des racines d' un polynôme. Reste la question de savoir dans quel intervalle fini de $\mathbb{R}$ se situent ces racines. Pour les polynôme p(x) à **coefficients entiers** une réponse à cette question nous est donnée par Cauchy et Knuth :

L. **Bornes de Cauchy et de Knuth** pour tout polynôme à coefficients entiers

Voici des exemples de théorèmes nous fournissant une borne inférieure et une borne supérieure des racines d' un polynôme à coefficients entiers ... Voilà qui est bien utile et nous permet de ne pas chercher indéfiniment des racines là où il n' en existe pas !

Ces propositions ne sont valables que pour les polynômes à coefficients entiers mais peuvent être facilement utilisées pour les polynômes à coefficients rationnels (comment ?), ces derniers étant les polynômes les plus fréquemment utilisés .

<u>Proposition 1 (Cauchy - 1829)</u>

Soit α une racine de $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, polynôme à coefficients entiers, alors

$$| \alpha | \leq 1 + \max \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| , \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| , \left| \frac{a_{n-3}}{a_n} \right| , \ldots , \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right)$$

<u>Proposition 2 (Cauchy - 1829)</u>

Soit α une racine de $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, polynôme à coefficients entiers, alors

$$| \alpha | \leq \max \left(\left| \frac{n.a_{n-1}}{a_n} \right| , \left| \frac{n.a_{n-2}}{a_n} \right|^{\frac{1}{2}} , \left| \frac{n.a_{n-3}}{a_n} \right|^{\frac{1}{3}} , \ldots , \left| \frac{n.a_0}{a_n} \right|^{\frac{1}{n}} \right)$$

<u>Proposition 3 (Knuth - 1981)</u>

Soit α une racine de $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, polynôme à coefficients entiers, alors

$$| \alpha | \leq 2.\max \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| , \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|^{\frac{1}{2}} , \left| \frac{a_{n-3}}{a_n} \right|^{\frac{1}{3}} , \ldots , \left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{\frac{1}{n}} \right)$$

Chacune de ces propositions nous donne aussi une borne pour la valeur absolue **minimale** d' une racine d' un polynôme (en supposant que le coefficient a_0 n' est pas nul) : on remplace x par $\frac{1}{x}$ dans le polynôme , ou, autrement dit, on recherche la racine maximale de

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

dont l' inverse est la racine minimale de

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Pour terminer, citons encore un résultat intéressant de Knuth qui date de 1992 :

> Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($n \geq 2$) est un polynôme à coefficients réels positifs et si
>
> $$a_1^2 - 4.a_{i-1}.a_{i+1} > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots , n-1$$
>
> alors toutes les racines de p(x) sont réelles et distinctes.