13. GEOMETRIE DE L' ESPACE

5h/s, 7h/s

Rappels : il sera bon de revoir dans VM1, les chapitres 1 et 2, dans VM2, le chapitre 2 et dans VM5, le chapitre 11.

LA RICHESSE STRUCTURELLE DE L'ESPACE

Pour les élèves, la géométrie de l'espace n'est pas neuve. Nous y avons fait incursion chaque fois que c'était possible. Nous vivons dans l'espace physique et non dans un plan. De ce fait, la plupart des applications de géométrie dans la vie courante ont une origine spatiale. L'espace étudié en mathématique est une idéalisation de l'espace ambiant qui sert de cadre à nos activités. Chacun comprend que cette idéalisation puisse emprunter des voies très différentes et, dès lors, qu'il y a plus d'un espace mathématique. Aussi convient-il de préciser quel espace on utilise. Dans l'enseignement secondaire belge, le mot espace est presque toujours synonyme d'espace euclidien réel de dimension 3. Cet espace a une structure d'une richesse quasi inépuisable et dont il n'est pas facile de rendre compte avec justice. Qu'on en juge.

Nous distinguons et nous avons déjà une grande expérience de

1) la structure linéaire ou d'incidence, concernant les points, droites, plans avec leurs propriétés d'intersection et de jonction;

2) la structure de parallélisme des droites et plans;

3) la structure orthogonale des droites et plans;

4) la structure vectorielle qui émerge du groupe des translations et homothéties;

5) la structure convexe qui s'occupe des segments, demi-droites, demi-plans, demi-espaces, angles;

6) la structure groupale qui traite des déplacements, isométries, similitudes, affinités, transformations linéaires.

Il y en a bien d'autres encore que nous renoncons à citer. Ces structures présentent des liens entre elles.

Exemples

1) La donnée des segments permet de reconstituer la droite comme union des segments contenant deux points distincts.

2) La donnée de l'orthogonalité des droites permet de construire les sphères comme ensembles de points p tels que $ap \perp bp$ où a et b sont des points donnés.

Chacun aura compris qu'il est exclu à notre niveau de présenter une étude approfondie de la géométrie spatiale. Il y faudrait des volumes.

De même, une approche axiomatique, basée sur quelques notions et propriétés dont on dérive les autres notions et propriétés, risque de progresser avec une extrême lenteur et risque de laisser une série de sujets fondamentaux sans aucun examen.

Pour faire face à ces difficultés, nous allons procéder comme suit :

1) élaborer avec l'aide de notre expérience déjà très riche, une liste de faits géométriques présentés de manière ordonnée, par thèmes;

2) reprendre l'un ou l'autre thème, par une approche axiomatique.

PROPRIETE D' INCIDENCE DE E^3, l'espace euclidien de dimension 3

Ces propriétés concernent les points, droites et plans. Droites et plans sont des ensembles de points en nombre infini.

Points et plans déterminent les droites: une droite est l'intersection de plans distincts ayant deux points communs.

Points et droites déterminent les plans mais ceci est un peu plus compliqué et requiert le concept de sous-espace linéaire qu'on va introduire ci-dessous.

Par deux points distincts passe une et une seule droite. Par trois points non alignés passe un et un seul plan. Une droite ayant deux points distincts dans un plan est contenue dans ce plan.

Appelons **sous-espace linéaire** de E^3 tout ensemble de points tel que la droite passant par deux de ses points distincts soit contenue dans l'ensemble, quels que soient ces deux points.

Les sous-espaces linéaires sont: la partie vide, les ensembles réduits à un seul point, les droites, les plans et l'espace même.

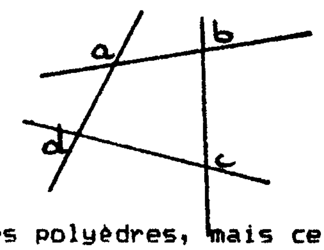
Toute intersection d'une famille de sous-espaces linéaires est un sous-espace linéaire.

Deux plans ayant un point commun ont une droite commune.

Y-a-t-il des figures de E^3 qui peuvent se définir en termes de points, droites et plans seuls ? Oui.

On peut définir un quadrilatère comme un ensemble de quatre points distincts a,b,c,d et de quatre droites distinctes ab,bc,cd,da.

Avec ces conditions, un quadrilatère n'est pas forcement inclusà un plan; ceci pourrait etre exigé.



On peut définir de même des polygones et des polyèdres, mais ceci est déjà compliqué.

On peut définir une figure conique de sommet o, où o est un point, et de base B, où B est un ensemble de points, comme la réunion des droites ob où b $\in$ B, ces droites étant les **génératrices** de la figure conique.

EXERCICES

1. Enoncer d'autres propriétés d'incidence des points, droites et plans.

2. Parmi les propriétés énoncées ci-dessus, quelles sont celles qui se laissent

démontrer à partir des précédentes ?

3. Définir une pyramide (Un peu difficile, tant qu'on ne dispose pas des segments. On essaie...).

4. La figure conique dont la base est une droite D et le sommet un point $o \notin D$ est-elle un plan, contenue dans un plan ?

5. Définir la projection centrale de E^3 sur un plan π , à partir d'un point $o \notin \pi$ et examiner soigneusement l'image d'une droite D ne passant pas par o et coupant π en un point a (ceci anticipe sur le parallélisme).

6. Observer un <u>quadrilatère gauche</u>, c'est-à-dire un quadrilatère qui n'est pas inclus à un plan. Ses diagonales peuvent-elles se couper ?

7. Considérer successivement un ensemble Ω de n= 1,2,3,4,5 plans distincts quelconques et leurs intersections 2 à 2 et 3 à 3. Ici, " quelconque " veut dire que deux plans de Ω ont une droite commune, que trois d'entre eux ont exactement un point commun et que quatre d'entre eux ont une intersection vide.

a) Quelles sont les figures obtenues pour n = 1,2,3,4 ?

b) Pour n = 5, montrer que la figure obtenue est constituée de 10 points et 10 droites contenant chacune 3 de ces points alors que chaque point est sur 3 de ces droites. Cette figure est appelée <u>configuration de DESARGUES</u> (17e siècle). Dessiner cette configuration.

c) En projetant la configuration de Desargues, à partir d'un point o n'appartenant à aucun des 5 plans, dans un plan ne passant pas par o, on obtient l'idée du <u>théorème de Desargues</u>:

si a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 sont deux triangles tels que $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ soient des droites bien déterminées, distinctes, ayant un point commun et si $a_1 b_1 \cap a_2 b_2$, $b_1 c_1 \cap b_2 c_2$, $c_1 a_1 \cap c_2 a_2$ sont des points c', a', b' , alors a', b', c' sont des points d'une même droite.

d) Ebaucher une démonstration du théorème de Desargues, d'abord dans l'espace (c'est plus facile !), puis dans le plan.

e) Envisager le cas où $a_1 b_1 // a_2 b_2$.

==

PROPRIETES DE PARALLELISME

Dans un plan π de $\mathbb{E}^3$, si D est une droite et p un point non inclus à D dans π , il existe une et une seule droite de π , par p, disjointe de D.

On appelle parallèles deux droites A,B contenues dans un même plan et disjointes ou confondues. Notation : A // B.

On appelle parallèles deux plans α, β disjoints ou confondus. Notation : $\alpha // \beta$.

On appelle parallèles une droite D et un plan π disjoints ou tels que $D \subset \pi$. Notation: $D // \pi$.

La relation // est une équivalence sur l'ensemble des droites et sur l'ensemble des plans. Toute classe d'équivalence de cette relation est appelée direction (de droites ou de plans) et livre une partition des points de l'espace, c'est-à-dire que par tout point de $\mathbb{E}^3$ passe une droite (ou un plan) de toute direction.

Si la droite D est parallèle au plan π et si $p \in \pi$, la droite parallèle à D par p est contenue dans π.

Si $D // D'$ et si $D' \subseteq \pi$, alors $D // \pi$ (D,D' sont des droites et π , un plan).

Si A,B sont des droites du plan π ayant un point commun et si $A // \pi'$, $B // \pi'$ (π' est un plan), alors $\pi // \pi'$.

Si A,B sont deux droites gauches c'est-à-dire deux droites disjointes et non parallèles et si p est un point en dehors de $A \cup B$, il existe une droite P par p telle que P soit coplanaire avec A et B.

==

EXERCICES

8. Définir une figure cylindrique de base B (un ensemble de points) et de direction Δ (un ensemble de droites parallèles). Comment s'appellerait cette figure si B est un polygone, une droite, un plan ?

9. Définir un parallèlogramme et un parallélépipède.

10. Définir le milieu d'une paire de points.

11. Supposons qu'on sache ce qu'est une boule ouverte B de $\mathbb{E}^3$. On décide que B deviendra un espace (de Lobachevski), dont les droites sont les intersections avec B des droites de $\mathbb{E}^3$ ayant deux points dans B et dont les plans sont les intersections avec B des plans de $\mathbb{E}^3$ ayant trois points non alignés dans B.

Quelles sont les propriétés d'incidence et de parallélisme citées pour $\mathbb{E}^3$ qui demeurent vraies dans B ?

12. Si D, D' sont deux droites gauches et p un point de $\mathbb{E}^3$ n'appartenant pas à $D \cup D'$, montrer qu'il existe une (et une seule) droite S par p qui est coplanaire avec D et avec D'.

13. Définir la projection parallèle de $\mathbb{E}^3$ sur un plan, parallèlement à une direction de droites non parallèles au plan.

Quelle est l'image d'une droite, de deux droites parallèles, de deux droites perpendiculaires, d'un parallèlogramme ?

Si a,b,c sont alignés et si $\vec{ac} = r.\vec{ab}$, on appelle r le <u>rapport de section</u> de (a,b,c). Montrer que le rapport de section de points alignés sur une droite non projetante est conservé par projection parallèle. C'est une nouvelle version du <u>théorème de Thalès</u>. Apporter des arguments en vue de prouver que la projection parallèle d'un plan sur un plan conserve les rapports d'aires mais pas les rapports de longueurs.

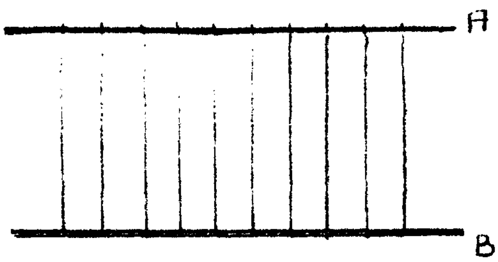
==

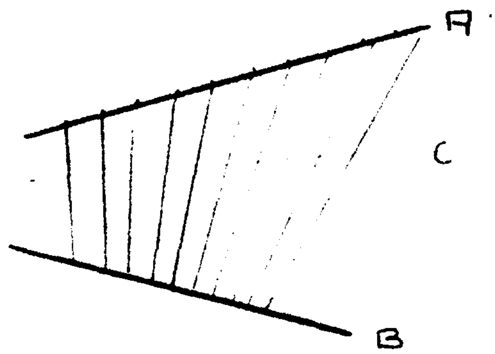
LES DROITES LIVRENT DES CORPS RONDS ?

On aura remarqué la prudence de l'énoncé 11. En fait, les points, droites et plans de E^3 avec leurs propriétés d'incidence et de parallèlisme permettent-ils de construire des " corps ronds "? C'est possible.

Considérons trois droites A, B, C deux à deux gauches. Dans l'exercice 12, on a vu que tout point de C est sur une droite coplanaire avec A et B. Soit H la réunion des droites coplanaires A,B et C et appelons <u>génératrices</u> de H chacune de ces droites. La figure H est appelée <u>hyperboloïde</u> (<u>réglé</u> ou <u>à une nappe</u>) si A, B, C ne sont pas parallèles à un même plan et <u>paraboloïde</u> (<u>hyperbolique</u>) si A, B, C sont parallèles à un plan.

L'adjectif " hyperbolique " ou " réglé " permet de distinguer H d'autres paraboloïdes (elliptiques) et hyperboloïdes (à deux nappes) obtenus par la révolution d'une parabole ou d'une hyperbole autour d'un de leurs axes (bien choisi car l'hyperboloïde réglé s'obtient également de cette manière). Un modèle simple permet de visualiser quelque peu H. Deux tiges rectilignes A, B sont reliées par des élastiques de même longueur, régulièrement espacés.





On tend le dispositif en écartant A de B et on tord A par rapport à B. Une surface réglée apparaît. Sur celle-ci on vérifie expérimentalement qu'il y a une droite C (en fait, une infinité) en contact avec toutes les génératrices élastiques. Un calcul qui n'est pas hors de notre portée permet de s'en assurer avec plus de force.

==

EXERCICES

13. Construire et observer les modèles d'hyperboloïdes à une nappe et de paraboloïdes hyperboliques.

14. Expérimenter et observer: si H est l'hyperboloïde engendré par les droites gauches A, B, C et si A', B', C' sont des génératrices distinctes de H, montrer que A', B', C' sont 2 à 2 gauches et engendrent un hyperboloïde qui est encore H.

15. Si H est un hyperboloïde à une nappe engendré par les droites gauches A, B, C, montrer que H contient une et une seule droite parallèle à A et distincte de A.

16. Soit π un plan et A, B deux droites gauches qui coupent π . Soit P la réunion des droites parallèles à π coplanaires avec A et B. Démontrer que P est un paraboloïde (on admettra des observations faites dans l'exercice 14).

==

POINTS A L' INFINI - DROITES A L' INFINI

Les problèmes posés par la perspective, c'est-à-dire le dessin d'objets à trois dimensions, imitant le plus fidèlement possible l'image qui s'en forme dans notre oeil, ont été résolus par les peintres de la Renaissance. Ces questions ont débouché, peu à peu, sur la géométrie projective. Nous en abordons les premiers rudiments.

==

EXERCICES

17. Soit α la projection centrale de E^3 à partir d'un point o sur un plan π avec $o \notin \pi$.

Montrer que l'image par α d'une famille de droites parallèles de E^3 , soient D_1 , D_2 , D_3 ,... non parallèles à π est constituée par une famille de droites de π , amputées d'un même point situé sur la parallèle à D_1 par o.

18. Les observations faites dans l'exercice 17 amènent à poser les constructions suivantes. Soit E^3 l'espace euclidien.

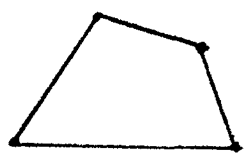
A toute direction de droites Δ on associe un nouveau point, qu'on crée, appelé point à l'infini et toute droite appartenant à Δ est complétée par ce point. Si D est une droite, on note ∞ (D) le point à l'infini de D.

On obtient un nouvel espace constitué des points de E^3 et des points à l'infini, ainsi que des droites et plans de E^3 complétés par des points à l'infini.

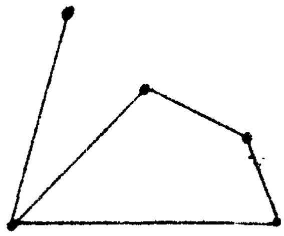
Etudier la projection centrale dans ce nouvel espace. En déduire qu'il est opportun d'introduire également des droites à l'infini.

Le nouvel espace est appelé espace projectif.

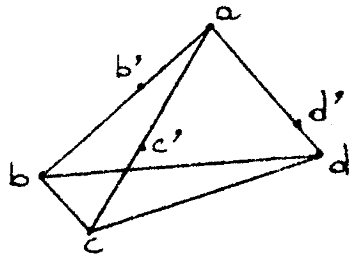
19. Soit α comme dans l'exercice 17. Dans E^3 , on considère un quadrillage dans un plan β et on projette celui-ci, selon α . Voici le dessin (la projection) d'un carreau. Dessiner avec précision les carreaux voisins.



20. Voici une partie de la perspective d'un cube. Achever cette perspective avec grande précision après avoir (bien) choisi l'image d'un autre sommet.



21. Voici un tetraèdre abcd en perspective.
a) construire avec précision la droite d'intersection des plans bcd et b'c'd';
b) le problème a-t-il un lien avec le théorème de Desargues ?
c) construire avec précision la droite d'intersection des plans bcd et b'c"d" si c" $\in$ abc, d" $\in$ abd.
d) construire avec précision la droite d'intersection des plans bcd et b"c"d" si b" $\in$ acd, c" $\in$ abd, d" $\in$ abc.



22. Construire une homothétie en perspective. Que faut-il se donner pour que la transformation soit déterminée ?

==

PROPRIETES DE CONVEXITE

On a beau manipuler les points, droites et plans, il n'est pas possible d'en déduire la notion de segment. Nous demandons d'accepter ce fait. Donnons-nous les segments fermés [a,b] d'extremités a, b où a, b sont des points. On peut en déduire une foule de notions, y compris les droites et les plans, donc tout ce qui précède.

Le segment ouvert]a,b[est le segment fermé [a,b] amputé des points a et b. La demi-droite fermée [a,b d'origine a, est la réunion des segments [a,x] tels que b $\in$[a,x] . La droite ab est la réunion des segments [x,y] tels que a,b $\in$ [x,y] .

On appelle <u>ensemble convexe</u> tout ensemble de points C tels que pour x,y $\in$ C on ait [x,y] $\subseteq$ C .

Toute intersection d'ensembles convexes est un ensemble convexe. Tout ensemble de points X engendre un ensemble convexe qu'on appelle sa <u>fermeture convexe</u> et qui est l'intersection des ensembles convexes contenant X.

Tout plan π détermine une relation de séparation sur les points de $E^3 - \pi$ par la condition : a est séparé de b si [a,b] contient un point de π . La relation " non séparé de " est une relation d'équivalence possédant deux classes d'équivalence qu'on appelle <u>demi-espaces ouverts</u> déterminés par π . Ces demi-espaces sont convexes. Si α est un plan non parallèle à π , l'intersection de α avec chacun des demi-espaces ouverts déterminés par π est ce qu'on appelle un <u>demi-plan</u>. Si α est un plan et D une droite de α , α - D est la réunion disjointe de deux demi-plans.

Un <u>angle</u> est la fermeture convexe de deux demi-droites de même origine ou encore, l'intersection de deux demi-plans fermés bien choisis.

Les notions de convexité sont utiles pour exprimer les <u>parties vues et cachées</u> dans le phénomène de vision. Si o est un point (assimilé à l'oeil) et P une partie de E^3 , un point p de P est <u>vu de o</u> si $[p,o] \cap P = \{p\}$ et p est <u>caché de o</u> si $[p,o] \cap P$ contient un point de P autre que p.

==

EXERCICES

23. Définir un polygone et un polygone convexe.
Définir un polyèdre convexe.
Définir une figure bornée.
Définir une figure conique limitée par un sommet et une base.
Définir une figure cylindrique limitée par deux bases.
Définir un ensemble ouvert.

24. Dessiner la fermeture convexe de diverses figures choisies librement.

25. Si E est un ensemble de points, un point m de E est un <u>mirador</u> si $[m,x] \subsetneq E$ pour tout $x \in E$.
a) Dessiner des ensembles et l'ensemble de leurs miradors;
b) Démontrer que l'ensemble des miradors d'un ensemble E est convexe.

26. Reprendre l'exercice 20, supposer que le cube est " plein " et faire le dessin en perspective, en exprimant les arêtes vues par un trait plein et les arêtes cachées par un trait interrompu.

27. Dessiner en perspective correcte
a) une pyramide droite à base hexagonale régulière;
b) un prisme droit à base octogonale régulière;
c) un antiprisme droit à base hexagonale régulière.
De quelle liberté de choix dispose-t-on ?

==

STRUCTURE AFFINE

La structure analysée jusqu'ici et constituée par les points, droites, plans, parallèlisme, convexité est invariante par le groupe des affinités alors que celui-ci ne conserve pas l'orthogonalité des droites. Nous dégageons ainsi la notion de <u>structure affine</u> qui est une partie de la structure euclidienne, en quelque sorte plus profonde puisqu'elle résiste à un groupe de transformations plus grand que celui de la géométrie euclidienne.

Ceci nous amène à distinguer entre notions affines et notions euclidiennes (ou métriques).

==

EXERCICES

28. Dans le plan euclidien, séparer ci-dessous les notions affines et euclidiennes:
point, droite, droites parallèles, droites sécantes, angle, angle de 30° ,

équidistance de points, cercle, droites perpendiculaires, translation, homothétie, rotation, parallélogramme, trapèze, losange, rectangle, milieu, égalité d'aires, théorème de Thalès, théorème de Pythagore.

29. Enoncer et démontrer un " théorème de Thalès " pour deux droites gauches de l'espace E^3 .

===